

O Radical de Heron: uma demonstração geométrica via incírculo e excírculo

Professor Yuri Politano

Resumo

Neste aceptor matemático apresentaremos uma demonstração pouco usual para a fórmula de Heron. Antes disso, deduziremos uma expressão para a altura de um triângulo em função de seus três lados e do semiperímetro. Em seguida, utilizaremos o incírculo, um excírculo e duas identidades de área para obter o radical de Heron a partir de uma relação de semelhança.

1 Uma fórmula para a altura

Considere um triângulo não degenerado ABC , com

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

e seja h_a a altura relativa ao lado a . Denotaremos por

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

o semiperímetro.

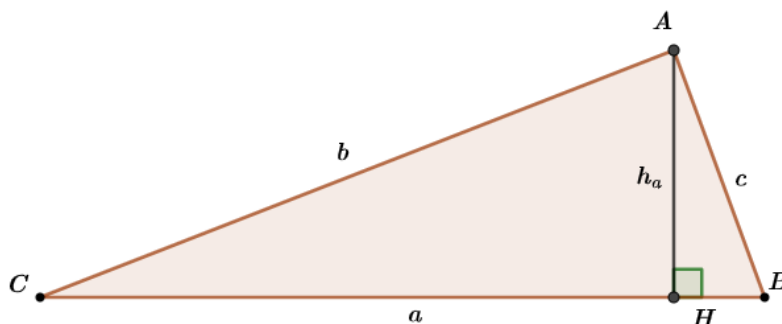


Figura 1: Altura h_a relativa ao lado a .

A expressão que desejamos demonstrar é

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1)$$

Demonstração

Seja H o pé da perpendicular traçada de A à reta BC e ponha

$$\alpha = \angle BCA.$$

Pela Lei dos Cossenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Como a projeção de CA sobre a reta CB tem comprimento algébrico $b \cos \alpha$, obtemos

$$CH = b \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

No triângulo retângulo ACH ,

$$b^2 = h_a^2 + CH^2,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} h_a^2 &= b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2, \\ 4a^2 h_a^2 &= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2, \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2), \\ &= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2), \\ &= (a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b). \end{aligned}$$

Como

$$a+b+c = 2p, \quad a+b-c = 2(p-c), \quad b+c-a = 2(p-a), \quad a+c-b = 2(p-b),$$

segue que

$$4a^2 h_a^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Como $h_a > 0$ em um triângulo não degenerado, extraímos a raiz positiva e chegamos a (1).

2 O radical de Heron

Se $\mathcal{A}$ denota a área do triângulo, a fórmula de Heron afirma que

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. \quad (2)$$

Naturalmente, (2) já decorre de (1), pois $\mathcal{A} = ah_a/2$. Nosso objetivo, entretanto, é apresentar uma segunda demonstração, geometricamente distinta, baseada no incírculo e em um excírculo.

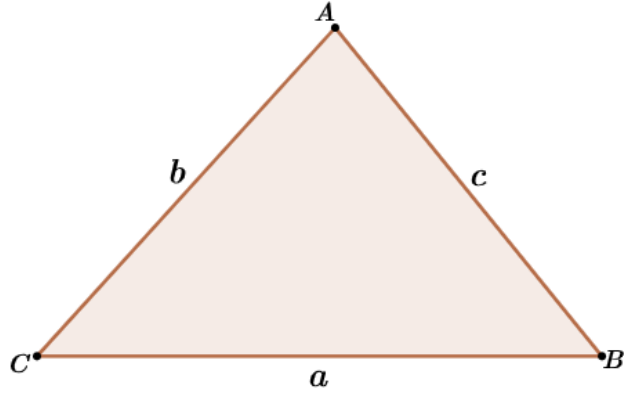


Figura 2: Triângulo ABC de lados a, b, c .

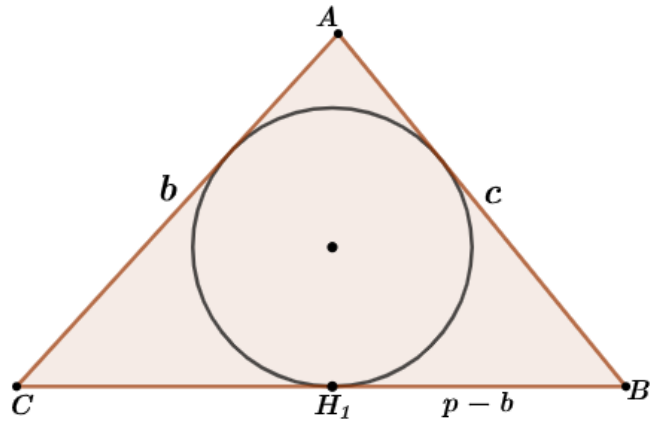


Figura 3: Incírculo e o segmento $BH_1 = p - b$.

2.1 Dois fatos de tangência

Seja o incírculo tangente a BC em H_1 . Pelos segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto a uma circunferência, os comprimentos dos dois segmentos de tangência são iguais. Se $BH_1 = x$, então, escrevendo os segmentos tangentes a partir de A , B e C , obtemos imediatamente

$$\boxed{BH_1 = p - b}.$$

Agora considere o excírculo oposto ao vértice C , de raio r_c , tangente ao prolongamento de BC em H_2 . Pelo mesmo teorema dos segmentos tangentes,

$$\boxed{BH_2 = p - a}.$$

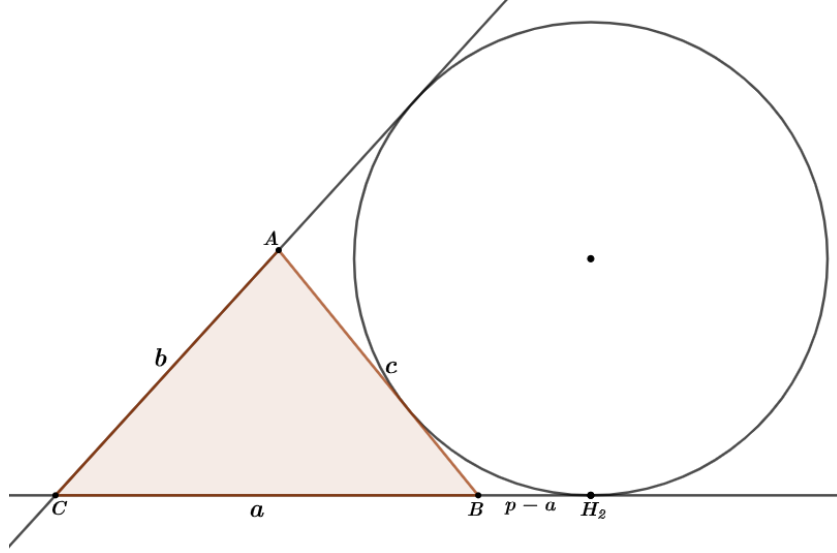


Figura 4: Excírculo oposto a C e o segmento $BH_2 = p - a$.

2.2 A semelhança fundamental

Denotemos por O_1 o incentro, por O_2 o excentro oposto a C , por r o inraio e por r_c o exraio correspondente.

Os triângulos retângulos O_1H_1B e O_2H_2B são semelhantes. De fato, ambos possuem um ângulo reto em H_1 e H_2 , respectivamente, e os ângulos agudos em torno de B são complementares às mesmas bissetrizes interna e externa; equivalentemente, as bissetrizes interna e externa de um mesmo ângulo são perpendiculares. Assim, pelo critério AA,

$$\triangle O_1H_1B \sim \triangle O_2H_2B.$$

Da semelhança,

$$\frac{r}{BH_2} = \frac{BH_1}{r_c}.$$

Usando $BH_1 = p - b$ e $BH_2 = p - a$, obtemos

$$\boxed{rr_c = (p - a)(p - b)}. \quad (3)$$

2.3 A área fecha a demonstração

Para o incírculo, decompondo ABC nos três triângulos com vértice no incentro,

$$\mathcal{A} = pr, \quad \text{logo} \quad r = \frac{\mathcal{A}}{p}.$$

Para o excírculo oposto a C , a decomposição orientada das áreas fornece

$$\mathcal{A} = (p - c)r_c, \quad \text{logo} \quad r_c = \frac{\mathcal{A}}{p - c}.$$

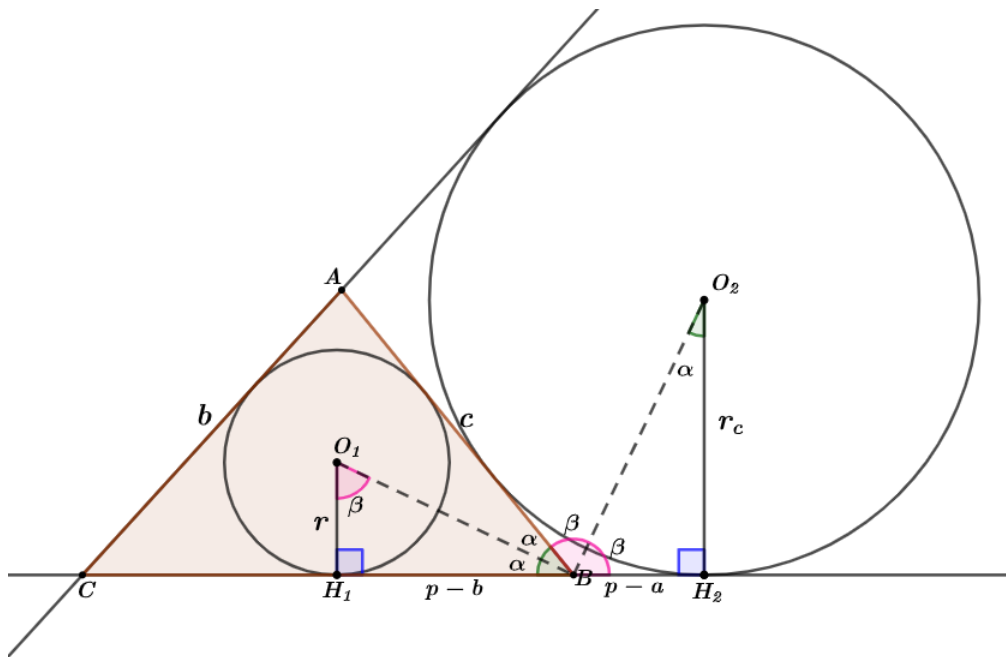


Figura 5: Configuração que produz a semelhança entre O_1H_1B e O_2H_2B .

Substituindo essas duas expressões em (3),

$$\frac{\mathcal{A}}{p} \cdot \frac{\mathcal{A}}{p-c} = (p-a)(p-b).$$

Consequentemente,

$$\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Como $\mathcal{A} > 0$ para um triângulo não degenerado,

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Está demonstrada a fórmula de Heron.

Nota final: o que o radical “sabe” sobre o triângulo

A expressão sob o radical não é apenas um artifício algébrico. Para um triângulo não degenerado,

$$p > 0, \quad p-a > 0, \quad p-b > 0, \quad p-c > 0,$$

pois essas três últimas desigualdades são exatamente equivalentes às desigualdades triangulares

$$b+c > a, \quad a+c > b, \quad a+b > c.$$

Assim, o próprio radicando de Heron codifica a condição de existência de um triângulo não degenerado. Quando, por exemplo, $a = b+c$, temos $p-a = 0$ e a área se anula: o triângulo degenera em um segmento.

Há ainda uma identidade útil:

$$16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

que evidencia de modo simétrico a dependência da área em relação aos três lados.