

SAC x Price

A matemática escondida por trás das parcelas do seu financiamento

Professor Yuri Politano • Politano Aprova • Prévia editorial

1. O problema matemático

Dois financiamentos podem ter o mesmo valor inicial, a mesma taxa de juros e o mesmo prazo e, ainda assim, apresentar sequências de prestações e custos totais diferentes. A razão não está em uma “taxa diferente” escondida no cálculo: está na maneira como o principal da dívida é amortizado ao longo do tempo.

Neste texto, deduziremos os sistemas SAC e Price a partir de princípios elementares de Matemática Financeira. O objetivo não é memorizar fórmulas, mas compreender quais condições definem cada sistema, como o saldo devedor evolui e por que essa evolução determina o montante de juros pago.

2. Notação e hipótese fundamental

Considere um empréstimo de valor inicial V , liquidado em n períodos, com taxa efetiva de juros i por período. Denotaremos por S_k o saldo devedor imediatamente após a k -ésima prestação, com $S_0 = V$ e $S_n = 0$. Na k -ésima prestação, A_k representa a amortização do principal, J_k os juros do período e P_k o valor total pago.

$$\boxed{P_k = A_k + J_k}, \quad \boxed{J_k = iS_{k-1}}, \quad \boxed{S_k = S_{k-1} - A_k}.$$

Essas três relações são comuns aos dois sistemas. Portanto, SAC e Price não se distinguem pela regra de incidência dos juros. A diferença essencial está na condição adicional imposta à sequência de pagamentos ou de amortizações.

3. Sistema de Amortização Constante (SAC)

No SAC, a condição definidora é que todas as amortizações sejam iguais. Como o principal V deve ser integralmente amortizado em n períodos,

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = \frac{V}{n}.$$

Após k prestações, foram amortizados kV/n . Logo,

$$\boxed{S_k = V - \frac{kV}{n} = V \left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

Os juros da k -ésima prestação são calculados sobre o saldo imediatamente anterior:

$$J_k = iS_{k-1} = iV \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Assim,

$$\boxed{P_k = \frac{V}{n} + iV \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}.$$

3.1. As prestações do SAC formam uma PA

Calculando a diferença entre prestações consecutivas,

$$P_{k+1} - P_k = -\frac{iV}{n}.$$

A diferença é constante e negativa. Portanto, (P_k) é uma progressão aritmética decrescente.

3.2. Juros totais no SAC

Como $J_k = iS_{k-1}$,

$$J_{\text{total,SAC}} = i \sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

Os saldos $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ formam uma PA de primeiro termo V e último termo V/n . Logo,

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{n}{2} \left(V + \frac{V}{n} \right) = \frac{V(n+1)}{2},$$

e, consequentemente,

$$J_{\text{total,SAC}} = \frac{iV(n+1)}{2}.$$

4. Sistema Price

Na Tabela Price, a condição definidora é outra: as prestações são constantes,

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = P.$$

A amortização, portanto, não é constante.

Para determinar P , usamos equivalência financeira na data inicial. O valor presente das n prestações deve ser exatamente V :

$$V = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

O lado direito é uma PG de razão $q = 1/(1+i)$. Portanto,

$$V = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i},$$

de onde

$$P = \frac{Vi}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{Vi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

4.1. A amortização na Price

Como P é constante,

$$A_k = P - iS_{k-1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= P - iS_k \\ &= P - i(S_{k-1} - A_k) \\ &= (P - iS_{k-1}) + iA_k \\ &= (1+i)A_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$A_{k+1} = (1 + i)A_k,$$

isto é, as amortizações da Price formam uma PG crescente de razão $1 + i$.

4.2. Fórmula explícita do saldo devedor

A recorrência do saldo é

$$S_k = (1 + i)S_{k-1} - P.$$

Sua solução é

$$S_k = V(1 + i)^k - P \frac{(1 + i)^k - 1}{i}.$$

Equivalentemente,

$$S_k = P \frac{1 - (1 + i)^{-(n-k)}}{i},$$

expressão que corresponde ao valor presente, no instante k , das $n - k$ prestações ainda não pagas.

5. A ideia central: os juros seguem a trajetória do saldo

Em ambos os sistemas,

$$J_k = iS_{k-1}.$$

Somando os juros de todos os períodos,

$$J_{\text{total}} = i \sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

Essa identidade revela o mecanismo essencial do financiamento: para uma mesma taxa i , o custo nominal de juros depende da soma dos saldos devedores mantidos ao longo do tempo. Quanto maior o saldo médio da dívida, maior o total de juros.

Em uma representação gráfica discreta, $\sum S_k$ pode ser visualizada como a soma das áreas de retângulos de largura unitária e alturas S_k . Essa leitura oferece uma interpretação geométrica para a comparação entre os sistemas.

6. Exemplo comparativo

Considere

$$V = \text{R\$ } 120.000,00, \quad i = 1\% \text{ a.m.}, \quad n = 60.$$

No SAC,

$$A = \frac{120000}{60} = \text{R\$ } 2.000,00.$$

A primeira prestação é R\$ 3.200,00, a última é R\$ 2.020,00 e as prestações diminuem R\$ 20,00 por mês. Os juros totais são

$$J_{\text{SAC}} = 0,01 \cdot 120000 \cdot \frac{61}{2} = \text{R\$ } 36.600,00.$$

Na Price,

$$P = \frac{120000 \cdot 0,01}{1 - (1,01)^{-60}} \approx \text{R\$ } 2.669,33.$$

O total nominal pago é aproximadamente R\$ 160.160,02, dos quais R\$ 40.160,02 correspondem a juros.

Sistema	1ª prestação	Última prestação	Total pago	Juros totais
SAC	R\$ 3.200,00	R\$ 2.020,00	R\$ 156.600,00	R\$ 36.600,00
Price	R\$ 2.669,33	R\$ 2.669,33	R\$ 160.160,02	R\$ 40.160,02

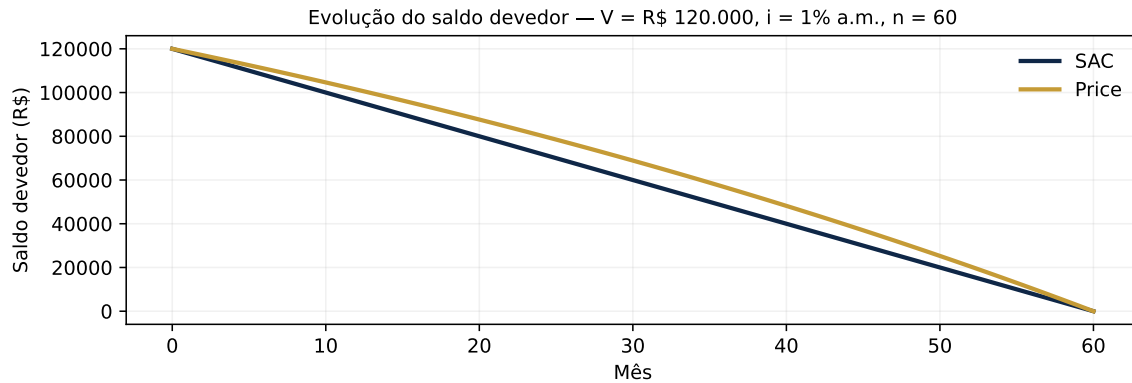


Figura 1: Comparação das trajetórias do saldo devedor no exemplo. O saldo da Price permanece acima do saldo do SAC em todos os meses intermediários.

7. Uma leitura matemática mais profunda

Os dois sistemas podem ser vistos como soluções diferentes para o mesmo problema de evolução de uma dívida:

$$S_k = (1 + i)S_{k-1} - P_k.$$

O SAC escolhe P_k de modo que S_k seja uma função afim de k ; a Price escolhe P_k constante, fazendo S_k obedecer a uma recorrência linear não homogênea.

Essa perspectiva conecta Matemática Financeira a progressões, funções, recorrências e somatórios. Em vez de duas “tabelas” isoladas, SAC e Price tornam-se exemplos de como condições diferentes impostas a uma mesma dinâmica produzem trajetórias distintas.

8. Conclusão

A comparação entre SAC e Price é, essencialmente, uma comparação entre formas de distribuir a amortização no tempo. Ambos calculam juros sobre o saldo devedor e ambos respeitam a equivalência financeira.

No SAC, a amortização constante produz saldo devedor linearmente decrescente e prestações em PA. Na Price, a prestação constante produz amortizações em PG crescente. Sob as mesmas condições de principal, taxa e prazo, a Price mantém saldo devedor estritamente maior em todos os períodos intermediários; por isso, sua soma nominal de juros é também estritamente maior.

Isso não significa que a frase “SAC é sempre melhor” seja uma conclusão econômica universal. O SAC exige prestações iniciais maiores. Em contratos reais, liquidez, inflação, custo de oportunidade, CET, seguros, tarifas, indexadores e amortizações antecipadas podem alterar a decisão. O que a matemática demonstra aqui é uma comparação precisa dentro de um modelo controlado.

Nota Final — Demonstração rigorosa da comparação entre os saldos devedores

A comparação central do artigo pode ser formalizada sem recorrer ao exemplo numérico.

Teorema. *Sejam $V > 0$, $i > 0$ e $n \geq 2$. Considere um financiamento SAC e um financiamento Price com o mesmo principal V , a mesma taxa efetiva i por período e o mesmo número n de pagamentos, todos ao fim de cada período. Então, para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$,*

$$\boxed{S_k^{\text{Price}} > S_k^{\text{SAC}}}.$$

Nos extremos, $S_0^{\text{Price}} = S_0^{\text{SAC}} = V$ e $S_n^{\text{Price}} = S_n^{\text{SAC}} = 0$.

Demonstração. Na Price, vimos que

$$A_{k+1} = (1+i)A_k.$$

Como $i > 0$ e $A_1 > 0$, a sequência de amortizações é estritamente crescente:

$$0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n.$$

Além disso, ao término do contrato, todo o principal foi amortizado:

$$\sum_{j=1}^n A_j = V.$$

Fixe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ e defina a média das primeiras k amortizações:

$$m_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k A_j.$$

Como (A_j) é crescente,

$$m_k \leq A_k < A_{k+1}.$$

Consequentemente, cada termo do bloco $A_{k+1}, \dots, A_n$ é estritamente maior que m_k . A média de todas as n amortizações, que é uma média ponderada entre a média do primeiro bloco e a média do segundo, é então estritamente maior que m_k . Assim,

$$m_k < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n A_j = \frac{V}{n}.$$

Multiplicando por k ,

$$\sum_{j=1}^k A_j < \frac{kV}{n}.$$

O lado esquerdo é o principal amortizado pela Price após k prestações. Já no SAC, a amortização acumulada após k prestações é exatamente kV/n . Portanto,

$$S_k^{\text{Price}} = V - \sum_{j=1}^k A_j > V - \frac{kV}{n} = S_k^{\text{SAC}}.$$

Isso conclui a demonstração. □

Corolário. *Sob as mesmas hipóteses,*

$$\boxed{J_{\text{total}}^{\text{Price}} > J_{\text{total}}^{\text{SAC}}}.$$

Demonstração. Como

$$J_{\text{total}} = i \sum_{k=0}^{n-1} S_k,$$

os dois sistemas têm o mesmo saldo inicial, mas a Price possui saldo estritamente maior em cada período intermediário. Como $i > 0$, a soma de juros da Price é estritamente maior. □

Escopo da demonstração. O resultado compara o modelo matemático puro com taxa efetiva constante, pagamentos regulares e ausência de custos adicionais. CET, seguros, tarifas, correção monetária, impostos e amortizações extraordinárias devem ser incorporados separadamente na análise de contratos reais.