
Centro de Massa

Da Geometria à Física: baricentros, somas trigonométricas, cálculo integral e os teoremas de Pappus–Guldinus

Professor Yuri Politano • Politano Aprova

1. Introdução: a geometria de uma distribuição

O centro de massa costuma aparecer como uma fórmula de Mecânica, associada à localização de um ponto de equilíbrio. Entretanto, a relação fundamental que o define é geométrica: uma distribuição de pontos pode ser substituída, no cálculo de seus primeiros momentos, por um único ponto cuidadosamente determinado.

Esse princípio explica a concorrência das medianas de um triângulo, produz identidades trigonométricas, conduz naturalmente às integrais que descrevem arcos e lâminas e, por meio dos teoremas de Pappus–Guldinus, permite calcular áreas e volumes de revolução. A interpretação física acompanha o desenvolvimento, mas a linha condutora é a geometria das médias ponderadas.

O problema que orientará o artigo é o seguinte: *qual propriedade de uma distribuição permanece inalterada quando ela é representada por um único ponto?*

2. Pontos ponderados e primeiros momentos

Considere partículas de massas positivas $m_1, \dots, m_n$, situadas nos pontos de vetores de posição $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$, relativamente a uma origem O . Seja $M = \sum_{i=1}^n m_i$ a massa total. Define-se o centro de massa G pela relação

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (1)$$

A soma $\sum m_i \vec{r}_i$ é o primeiro momento vetorial da distribuição relativamente à origem. Por definição, $M \vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i$. Se trocarmos a origem, ambos os lados se transformam de maneira compatível: o ponto geométrico G não depende da escolha de coordenadas.

2.1. Duas partículas e o princípio da alavanca

Para massas m_A e m_B em A e B , segue de (1) que

$$\vec{r}_G - \vec{r}_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} (\vec{r}_B - \vec{r}_A).$$

Logo G pertence ao segmento AB e

$$\boxed{\frac{AG}{GB} = \frac{m_B}{m_A}} \iff \boxed{m_A AG = m_B GB.}$$

A segunda igualdade exprime o equilíbrio dos momentos das forças peso quando o campo gravitacional é uniforme. A partícula de maior massa está mais próxima de G .

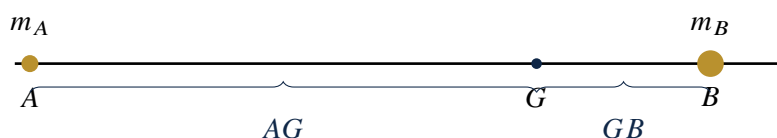


Figura 1. A divisão do segmento é inversamente proporcional às massas concentradas nos extremos.

2.2. Centro de massa, centroide e centro de gravidade

O **centro de massa** considera a distribuição real de massa; o **centroide** é a média de posições tomada sobre comprimento, área ou volume; o **centro de gravidade** descreve a aplicação equivalente do peso quando essa redução é apropriada. Uma lâmina homogênea tem centro de massa coincidente com o centroide de sua área. Em campo gravitacional uniforme, centro de massa e centro de gravidade coincidem. Essas coincidências deixam de ser automáticas para densidades ou campos gravitacionais não uniformes.

3. O princípio de composição e a geometria afim

Agrupe as partículas em subconjuntos de massas totais $M_1, \dots, M_s$ e centros de massa $G_1, \dots, G_s$. A fórmula (1) fornece imediatamente

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{M_1 \vec{r}_{G_1} + \dots + M_s \vec{r}_{G_s}}{M_1 + \dots + M_s}.}$$

Assim, cada subconjunto pode ser substituído por uma partícula de mesma massa localizada em seu próprio centro de massa, *desde que o que se pretenda preservar sejam os primeiros momentos*. Essa substituição não preserva, em geral, o momento de inércia.

Há ainda uma restrição geométrica: como os coeficientes m_i/M são positivos e somam 1, G é uma combinação convexa dos pontos da distribuição. Portanto, encontra-se no seu *fecho convexo*. O centro de massa pode, contudo, estar fora do material: o centro de um aro homogêneo é um exemplo imediato.

4. O baricentro do triângulo: dois modelos, o mesmo ponto

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Para três massas iguais concentradas nesses vértices,

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}.$$

Se N é o ponto médio de BC , temos $\vec{r}_N = (\vec{r}_B + \vec{r}_C)/2$; daí,

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_N}{3} \implies \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AN}.$$

Aplicando o mesmo argumento aos demais lados, obtemos a concorrência das medianas e

$$\boxed{\frac{AG}{GN} = 2} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}}.$$

É necessário justificar por que esse mesmo ponto é o centroide de uma *lâmina triangular* homogênea, cuja massa não está concentrada nos vértices.

4.1. Uma demonstração por faixas semelhantes

Fixemos o vértice A e a base BC , de comprimento b e altura h . Uma seção paralela a BC , a uma fração t da altura medida a partir de A , tem comprimento bt . Sua área diferencial é $bht \, dt$. Pela semelhança dos triângulos com vértice A , o ponto médio de cada faixa pertence à mediana AN e está à fração t do percurso de A até N .

A fração correspondente ao centroide de toda a lâmina é a média ponderada das frações t :

$$\frac{AG}{AN} = \frac{\int_0^1 t (bht) \, dt}{\int_0^1 bht \, dt} = \frac{\int_0^1 t^2 \, dt}{\int_0^1 t \, dt} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

A mesma demonstração vale a partir de qualquer vértice; logo o centroide da lâmina coincide com o baricentro das três massas iguais localizadas nos vértices.

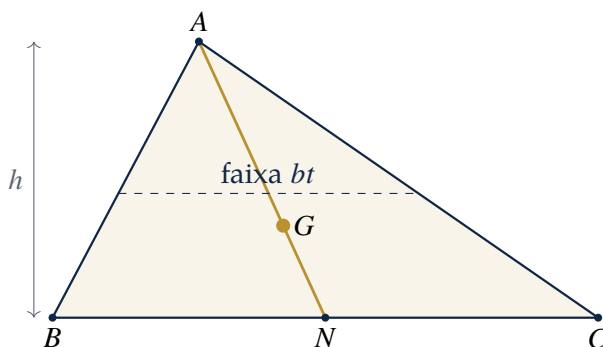


Figura 2. A seção paralela à base cresce linearmente com a distância ao vértice.

A expressão vetorial também revela a generalização: para um tetraedro homogêneo, o centroide é a média dos vetores de seus quatro vértices, situando-se a $3/4$ do caminho de um vértice ao centroide da face oposta.

5. Somas trigonométricas como momentos de polígonos regulares

Inscriva um polígono regular de $n \geq 3$ lados em uma circunferência de raio R e centro O . Coloque massas iguais nos vértices de argumentos

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Por simetria rotacional, seu centro de massa é O . Calculando coordenadas, porém,

$$0 = x_G = \frac{R}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 = y_G = \frac{R}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0.$$

A simetria geométrica forneceu identidades trigonométricas sem calcular termo a termo.

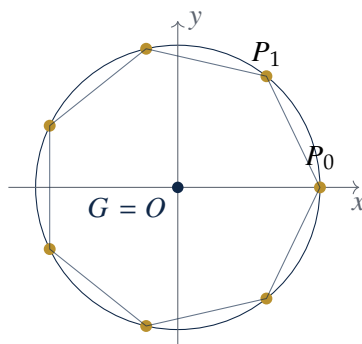


Figura 3. Massas iguais nos vértices: o primeiro momento resultante é nulo relativamente ao centro.

5.1. Massas crescentes: uma progressão geométrica ponderada

Agora atribua aos vértices as massas $m_k = (k+1)m$. A simetria desaparece e surgem somas ponderadas. Defina

$$\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \zeta^n = 1, \quad \zeta \neq 1.$$

A soma geométrica $S(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1} = (1 - z^n)/(1 - z)$ pode ser derivada como polinômio. Multiplicando sua derivada por z e substituindo $z = \zeta$, resulta

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \zeta^k = -\frac{n}{1 - \zeta}.$$

Pela identidade

$$\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

identificamos as partes real e imaginária:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \cos \frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k \sin \frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2} \cot \frac{\pi}{n}.$$

Como $\sum \zeta^k = 0$, as mesmas expressões valem com $k+1$ em lugar de k . A posição complexa do centro de massa ponderado é

$$z_G = \frac{R \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \zeta^k}{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)} = -\frac{2R}{(n+1)(1-\zeta)}.$$

O mesmo problema, antes resolvido pela simetria, passa a exigir álgebra: mudar os pesos altera a geometria e revela somas trigonométricas mais sofisticadas.

6. Da soma trigonométrica à distribuição contínua

Considere o *arco superior* de uma circunferência de raio R . Coloque n massas iguais nos pontos de ângulos médios

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

A simetria fornece $x_G = 0$; para a ordenada,

$$y_G^{(n)} = \frac{R}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

A soma de uma progressão trigonométrica satisfaz, para $\alpha = \pi/(2n)$,

$$2 \sin \alpha \sum_{k=1}^n \sin((2k-1)\alpha) = \sum_{k=1}^n [\cos((2k-2)\alpha) - \cos(2k\alpha)] = 2.$$

O termo intermediário cancela telescopicamente e $\cos(2n\alpha) = \cos \pi = -1$. Logo,

$$y_G^{(n)} = \frac{R}{n \sin(\pi/(2n))}.$$

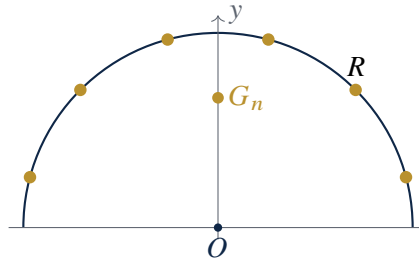


Figura 4. Partículas nos pontos médios de subarcos iguais: uma aproximação discreta do arco homogêneo.

Quando $n \rightarrow \infty$, cada partícula representa uma fração cada vez menor de um comprimento total fixo. Como $\sin u/u \rightarrow 1$ quando $u \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_G^{(n)} = R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin(\pi/(2n))} = \frac{2R}{\pi}.$$

$$OG_{\text{arco semicircular}} = \frac{2R}{\pi}.$$

O limite explica o sentido geométrico de uma integral: ao refinar uma soma de contribuições ponderadas, passamos de massas isoladas a uma distribuição contínua.

7. O Cálculo Integral: da definição discreta aos centroides

Para uma distribuição contínua, a massa elementar dm substitui os pesos isolados. O centro de massa é definido por

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm, \quad M = \int dm.$$

Em uma curva homogênea de comprimento L , $dm = \lambda ds$, em que λ é a densidade linear constante. Para uma lâmina homogênea de área A , $dm = \sigma dA$, com σ constante. Por cancelamento da densidade,

$$\vec{r}_{G,\text{curva}} = \frac{1}{L} \int_C \vec{r} ds, \quad \vec{r}_{G,\text{lâmina}} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} \vec{r} dA.$$

Quando a densidade varia, deve permanecer dentro das integrais; não podemos substituí-la pela área ou pelo comprimento apenas.

7.1. Arco semicircular: verificação integral

Parametrize o arco superior por $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ e $ds = R d\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Como $L = \pi R$,

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi (R \sin \theta) R d\theta = \frac{R}{\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}.$$

A integral confirma o resultado obtido pela soma trigonométrica.

7.2. Lâmina semicircular: a dimensão muda a resposta

Na região semicircular superior, $dA = r dr d\theta$, com $0 \leq r \leq R$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. Sua área é $A = \pi R^2/2$ e

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^\pi \int_0^R (r \sin \theta) r dr d\theta = \frac{1}{\pi R^2/2} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$OG_{\text{arco}} = \frac{2R}{\pi}, \quad OG_{\text{lâmina}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

O contorno semicircular e a região que ele delimita têm centroides diferentes: uma média é calculada sobre comprimento; a outra, sobre área.



Figura 5. Distribuições unidimensional e bidimensional sobre a mesma geometria semicircular.

8. Composição de regiões e o método dos vazios

Considere uma lâmina homogênea composta por regiões não sobrepostas de áreas A_j e centroides G_j . Pela composição dos primeiros momentos,

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_j A_j \vec{r}_{G_j}}{\sum_j A_j}.$$

Se uma porção de área A_2 é removida de uma região inicial de área $A_1 > A_2$, aplica-se a mesma relação por subtração de integrais:

$$\vec{r}_G = \frac{A_1 \vec{r}_{G_1} - A_2 \vec{r}_{G_2}}{A_1 - A_2}.$$

A *massa negativa* é aqui apenas um artifício algébrico de subtração; a lâmina remanescente possui massa positiva.

8.1. Exemplo: disco excêntrico perfurado

De um disco homogêneo de raio R e centro na origem, retiramos inteiramente um disco de raio r e centro $(a, 0)$, com $a > 0$, $0 < r < R$ e $a + r < R$. A simetria em relação ao eixo x garante $\bar{y} = 0$. Logo,

$$\bar{x} = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \pi r^2 \cdot a}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\frac{r^2 a}{R^2 - r^2}.$$

$$G = \left(-\frac{r^2 a}{R^2 - r^2}, 0 \right).$$

O centroide afasta-se do vazio e pode ser determinado sem realizar uma integral dupla desde o início.

9. Os teoremas de Pappus–Guldinus

A teoria dos primeiros momentos conduz a dois resultados nos quais o centroide deixa de ser apenas um ponto procurado e passa a *calcular* uma grandeza geométrica tridimensional.

9.1. Áreas de superfícies de revolução

Se uma curva plana regular, de comprimento L , gira uma volta em torno de um eixo de seu plano, que não atravessa a curva, podendo tocá-la nas extremidades, e a superfície é gerada

sem autointerseção (cada ponto da superfície é percorrido uma única vez), seja d a distância do centroide da *curva* ao eixo. Então

$$S = 2\pi d L.$$

Para justificá-lo, escolha o eixo vertical e parametrize a curva por $(x(s), y(s))$, $x(s) \geq 0$, usando o comprimento de arco s . A rotação de um elemento ds gera área diferencial $2\pi x(s) ds$. Assim,

$$S = 2\pi \int_C x ds = 2\pi L \underbrace{\left(\frac{1}{L} \int_C x ds \right)}_d.$$

Quando a curva encontra o eixo apenas em pontos de extremidade, a expressão permanece válida por passagem ao limite.

9.2. Volumes de sólidos de revolução

Se uma região plana de área A gira em torno de um eixo de seu plano sem atravessar seu interior, seja d a distância do centroide da *região* a esse eixo. Então

$$V = 2\pi d A.$$

Com o eixo vertical, cada elemento de área dA percorre uma circunferência de raio $x \geq 0$. O método das cascas cilíndricas, entendido como limite de somas de cascas, fornece

$$V = 2\pi \iint_{\Omega} x dA = 2\pi A \underbrace{\left(\frac{1}{A} \iint_{\Omega} x dA \right)}_d.$$

As duas igualdades exibem exatamente a mesma estrutura: **grandeza geradora** $\times$ **percurso circular de seu centroide**. Não se deve trocar o centroide da curva pelo centroide da região: em geral são pontos distintos.

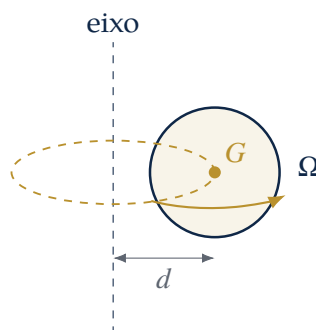


Figura 6. O centroide da região geradora percorre uma circunferência de comprimento $2\pi d$.

10. Pappus em ação: esfera, cone e toro

10.1. Duas distribuições semicirculares, dois resultados esféricos

O arco semicircular de raio R tem comprimento $L = \pi R$ e centroide a $2R/\pi$ de seu diâmetro. Girando-o em torno desse diâmetro, obtemos a superfície esférica:

$$S = 2\pi \cdot \frac{2R}{\pi} \cdot \pi R = \boxed{4\pi R^2}.$$

A lâmina semicircular, por sua vez, tem área $A = \pi R^2/2$ e centroide a $4R/(3\pi)$ do diâmetro. Sua rotação gera uma esfera maciça:

$$V = 2\pi \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Duas distribuições no mesmo semicírculo conduzem, respectivamente, a área superficial e volume.

10.2. Cone circular reto

Uma região triangular retângula de catetos r e h gira em torno do cateto h . Sua área é $rh/2$ e a distância de seu centroide ao eixo é $r/3$. Pelo teorema dos volumes,

$$V = 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{rh}{2} = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}.$$

A hipotenusa de comprimento $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$ gera a superfície lateral: seu ponto médio está à distância $r/2$ do eixo. Pelo teorema das áreas,

$$S_{\text{lat}} = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \ell = \boxed{\pi r \ell}.$$

10.3. Toro

Gire um disco de raio r em torno de uma reta coplanar, distante $R > r$ de seu centro. Como o centroide da região circular está em seu centro,

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = \boxed{2\pi^2 R r^2}.$$

Se girarmos apenas a circunferência geradora, de comprimento $2\pi r$, obtemos a superfície do toro:

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = \boxed{4\pi^2 R r}.$$

São aplicações diretas dos dois teoremas, cada uma com a distribuição geométrica apropriada.

11. O retorno à Física: equilíbrio e movimento

Em um campo gravitacional uniforme $\vec{g}$, o peso da partícula i é $m_i \vec{g}$. O momento resultante dos pesos relativamente a uma origem tem a forma

$$\sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M \vec{r}_G \times \vec{g}.$$

Assim, para o cálculo da força gravitacional resultante e de seu torque em campo uniforme, o sistema pode ser substituído por uma única força $M\vec{g}$ aplicada em G . Essa é a justificação precisa

do equilíbrio de uma lâmina apoiada ou suspensa, desde que as demais forças e condições de apoio também sejam consideradas.

O centro de massa é igualmente relevante para o movimento de um sistema: quando as massas são constantes, a segunda lei de Newton aplicada às partículas e somada fornece $M\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$, pois as forças internas se cancelam em pares sob as hipóteses usuais da Mecânica Newtoniana.

Distinção necessária. O primeiro momento determina o centro de massa. Já o momento de inércia envolve o *quadrado* da distância ao eixo, $I = \int \rho^2 dm$. Duas distribuições podem ter o mesmo centro de massa e momentos de inércia diferentes.

12. Conclusão

O centro de massa nasce de uma relação geométrica entre pontos ponderados, mas sua força explicativa ultrapassa a localização de um ponto de equilíbrio. O mesmo primeiro momento demonstra propriedades do baricentro, transforma simetria em identidades trigonométricas, passa de somas a integrais e organiza o cálculo de centroides de curvas e regiões.

Os teoremas de Pappus–Guldinus tornam explícito o alcance dessa ideia: áreas de superfícies e volumes de sólidos podem ser encontrados a partir do percurso descrito pelo centroide de uma figura geradora. A Física fornece a interpretação dos momentos e do equilíbrio; a Geometria e o Cálculo revelam por que as fórmulas funcionam.

Um único ponto não preserva toda a distribuição.

Ele preserva precisamente os primeiros momentos — e essa propriedade basta para conectar medianas, trigonometria, integrais, equilíbrio e sólidos de revolução.

Referências para aprofundamento

- [1] OPENSTAX. *Calculus, Volume 2*. Seção 2.6: “Moments and Centers of Mass”. <https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-6-moments-and-centers-of-mass>.
- [2] WEISSTEIN, E. W. “Pappus’s Centroid Theorem”. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem.html>.
- [3] SYMON, K. R. *Mechanics*. Capítulo 5, seção 5-5, p. 221, sobre centro de massa e teoremas de Pappus; edição consultável em https://www.ss.ncu.edu.tw/~lyu/lecture_files/2020Fall/Symon-Mechanics_text.pdf.