

Desigualdade das Médias: da geometria aos problemas de otimização

Demonstrações algébricas e geométricas da desigualdade AM–GM e aplicações a máximos e mínimos

Professor Yuri Politano

Resumo

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é um resultado elementar na forma, mas profundo nas consequências. Neste artigo, demonstramos a desigualdade AM–GM para dois números positivos por métodos algébrico e geométrico, examinamos cuidadosamente sua condição de igualdade e mostramos como ela se transforma em uma ferramenta de otimização sem cálculo diferencial. Aplicações clássicas envolvendo retângulos, expressões do tipo $x + k/x$ e problemas tridimensionais revelam uma ideia unificadora: sob determinadas restrições simétricas, o extremo ocorre quando as grandezas se igualam. Ao final, discutimos a generalização para n variáveis e sua relação com métodos de Cálculo.

1 Uma desigualdade simples com consequências profundas

Sejam $a, b > 0$. Definimos a média aritmética e a média geométrica de a e b por

$$\text{MA}(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad \text{MG}(a, b) = \sqrt{ab}.$$

A desigualdade AM–GM afirma que

$$\boxed{\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}}, \quad (1)$$

com igualdade se, e somente se, $a = b$.

A condição de igualdade não é um detalhe periférico. Em problemas de otimização, a desigualdade fornece o limitante; a condição de igualdade identifica precisamente a configuração na qual esse limitante é atingido.

2 Demonstração algébrica

A prova mais curta parte de um fato elementar: todo quadrado real é não negativo. Como $a, b > 0$,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo,

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0,$$

e, portanto,

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Além disso,

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \iff a = b.$$

Assim, a igualdade ocorre exatamente quando os dois números são iguais.

3 Uma demonstração geométrica

Considere um segmento AB de comprimento $a+b$ e um ponto C entre A e B tal que $AC = a$ e $CB = b$. Construa a semicircunferência de diâmetro AB e, por C , erga a perpendicular a AB , encontrando a semicircunferência em D .

Como AB é diâmetro, o Teorema de Tales fornece $\angle ADB = 90^\circ$. No triângulo retângulo ADB , DC é a altura relativa à hipotenusa. Pela relação métrica da altura,

$$DC^2 = AC \cdot CB = ab,$$

logo

$$DC = \sqrt{ab}.$$

Por outro lado, o raio da semicircunferência vale

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

A distância de um ponto da semicircunferência à reta do diâmetro não pode exceder o raio; portanto $DC \leq R$. Consequentemente,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

A igualdade ocorre apenas quando D é o ponto mais alto da semicircunferência, isto é, quando C é o ponto médio de AB . Nesse caso, $a = b$.

A prova geométrica revela algo que a manipulação algébrica pode ocultar: a igualdade corresponde à configuração de máxima simetria.

4 Dois princípios de otimização

A desigualdade AM–GM pode ser reorganizada em dois princípios extremamente úteis.

Proposição 1 (Soma fixa, produto máximo). *Se $x, y > 0$ e $x + y = S$ é constante, então*

$$xy \leq \frac{S^2}{4},$$

com igualdade se, e somente se, $x = y = S/2$.

Demonstração. Pela AM–GM,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{S}{2}.$$

Como ambos os membros são não negativos, elevando ao quadrado obtemos $xy \leq S^2/4$. A igualdade na AM–GM exige $x = y$; combinando com $x + y = S$, segue $x = y = S/2$. $\square$

Proposição 2 (Produto fixo, soma mínima). *Se $x, y > 0$ e $xy = P$ é constante, então*

$$x + y \geq 2\sqrt{P},$$

com igualdade se, e somente se, $x = y = \sqrt{P}$.

Demonstração. Da AM–GM,

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{P}.$$

Logo $x + y \geq 2\sqrt{P}$. A igualdade ocorre precisamente quando $x = y$, e então $x^2 = P$; como $x > 0$, $x = y = \sqrt{P}$. $\square$

Esses resultados formalizam uma heurística recorrente: em problemas simétricos com variáveis positivas, a igualdade entre as variáveis é uma forte candidata à configuração extrema. A desigualdade é o que transforma essa intuição em prova.

5 Aplicação I: o retângulo de maior área

Entre todos os retângulos de perímetro $P > 0$, qual possui maior área?

Se x e y são os lados, então

$$2x + 2y = P \implies x + y = \frac{P}{2}.$$

A área é $A = xy$. Como a soma dos lados é fixa, pela proposição anterior,

$$A = xy \leq \frac{(P/2)^2}{4} = \frac{P^2}{16}.$$

Portanto,

$$\boxed{A_{\max} = \frac{P^2}{16}},$$

e a igualdade ocorre quando

$$x = y = \frac{P}{4}.$$

Logo, entre todos os retângulos de perímetro fixado, o de maior área é o quadrado.

6 Aplicação II: o problema dual

Fixemos agora uma área $A_0 > 0$ e procuremos o retângulo de menor perímetro. Temos $xy = A_0$ e

$$P = 2(x + y).$$

Como o produto é fixo,

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{A_0}.$$

Assim,

$$\boxed{P \geq 4\sqrt{A_0}},$$

com igualdade quando $x = y = \sqrt{A_0}$. Novamente, a configuração extrema é o quadrado.

Os dois problemas são duais: soma fixa leva à maximização do produto; produto fixo leva à minimização da soma.

7 Aplicação III: minimizando $x + k/x$

Seja $k > 0$ e considere

$$f(x) = x + \frac{k}{x}, \quad x > 0.$$

Os dois termos são positivos e seu produto é constante:

$$x \cdot \frac{k}{x} = k.$$

Aplicando AM–GM,

$$x + \frac{k}{x} \geq 2\sqrt{k}.$$

Logo,

$$\boxed{f_{\min} = 2\sqrt{k}}.$$

A igualdade exige

$$x = \frac{k}{x},$$

e, como $x > 0$,

$$\boxed{x = \sqrt{k}}.$$

A desigualdade fornece simultaneamente o valor mínimo e o ponto em que ele é atingido.

8 Otimização sem cálculo diferencial

Considere, por exemplo,

$$f(x) = x + \frac{9}{x}, \quad x > 0.$$

Pela AM–GM,

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6,$$

com igualdade quando $x = 3$. Portanto, $f_{\min} = 6$.

Pelo Cálculo Diferencial,

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

A equação $f'(x) = 0$ fornece $x = 3$ no domínio positivo. Além disso,

$$f''(x) = \frac{18}{x^3} > 0,$$

logo $x = 3$ é ponto de mínimo, e $f(3) = 6$.

Os métodos chegam ao mesmo resultado, mas respondem a perguntas de naturezas distintas. A derivada analisa a variação local da função e, acompanhada de argumentos adequados, determina o extremo. A desigualdade estabelece diretamente um limitante global e identifica a condição em que ele é atingido.

9 Generalização para n números positivos

Para $x_1, \dots, x_n > 0$, a desigualdade AM–GM assume a forma

$$\boxed{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \quad (2)$$

com igualdade se, e somente se,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

É importante observar que o caso geral não deve ser apresentado como consequência automática da repetição do caso $n = 2$. Uma demonstração completa requer um argumento adicional. Há provas por indução de Cauchy, por convexidade/concavidade e por outros métodos clássicos. Para manter o foco deste artigo nas aplicações elementares, tomaremos (2) como a generalização do resultado demonstrado anteriormente.

10 Aplicação IV: do retângulo ao cubo

Considere um paralelepípedo retângulo de arestas $x, y, z > 0$ e volume fixo

$$xyz = V.$$

Sua área total é

$$S = 2(xy + xz + yz).$$

Aplicando AM–GM aos três números positivos xy , xz e yz ,

$$\frac{xy + xz + yz}{3} \geq \sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)}.$$

Mas

$$(xy)(xz)(yz) = x^2 y^2 z^2 = (xyz)^2 = V^2.$$

Portanto,

$$xy + xz + yz \geq 3V^{2/3},$$

e

$$\boxed{S \geq 6V^{2/3}}.$$

A igualdade exige

$$xy = xz = yz.$$

Como $x, y, z > 0$, segue $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Assim, entre todos os paralelepípedos retângulos de volume fixo, o cubo possui a menor área total.

11 O que realmente está sendo otimizado?

As aplicações anteriores compartilham uma mesma estrutura. Não basta perceber que a configuração simétrica “parece” ótima. Uma prova de otimização deve responder a três questões:

- 1) qual grandeza possui um limitante superior ou inferior;
- 2) por que nenhuma configuração admissível pode ultrapassar esse limitante;
- 3) em qual configuração a igualdade é efetivamente atingida.

A AM–GM responde às três questões de uma só vez quando o problema pode ser colocado na forma apropriada.

Nota final: simetria, igualdade e extremos

Existe uma mensagem conceitual que atravessa todo o artigo. Na desigualdade

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

a diferença entre os dois lados pode ser escrita como

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}.$$

O “quanto” a média aritmética excede a geométrica é, portanto, medido por um quadrado que se anula exatamente quando $a = b$. A igualdade não surge por acaso: ela representa o desaparecimento da assimetria entre as variáveis.

Esse fenômeno reaparece nos problemas de otimização. Com soma fixa, afastar x e y um do outro reduz o produto; com produto fixo, afastá-los aumenta a soma. A configuração simétrica é extrema porque é precisamente nela que a desigualdade se transforma em igualdade.

É essa passagem — de uma desigualdade abstrata para uma afirmação sobre máximos e mínimos — que torna a AM–GM muito mais do que uma relação entre duas médias: ela é uma ferramenta elementar de otimização global.