O problema de Fagnano

Reflexões e o triângulo inscrito de menor perímetro

Professor Yuri Politano · Politano Aprova

1. Um problema de mínimo

Em 1775, Giovanni Francesco Fagnano publicou uma questão que seu pai, Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, já havia investigado: inscrever, num triângulo acutângulo dado, o triângulo de menor perímetro possível.

> Dado um triângulo **acutângulo** ABC, determinar o triângulo PQR de menor perímetro, com P sobre BC, Q sobre CA e R sobre AB.

A resposta é um velho conhecido de quem estuda Geometria: o **triângulo órtico**, formado pelos pés das três alturas de ABC. Surpreendente é o caminho até ela.

Fagnano resolveu o problema com cálculo. As demonstrações puramente geométricas vieram depois, com Lipót Fejér e Hermann Amandus Schwarz. A que apresentamos aqui, devida a Fejér, dispensa o cálculo: usa apenas reflexões e uma única desigualdade, a triangular.

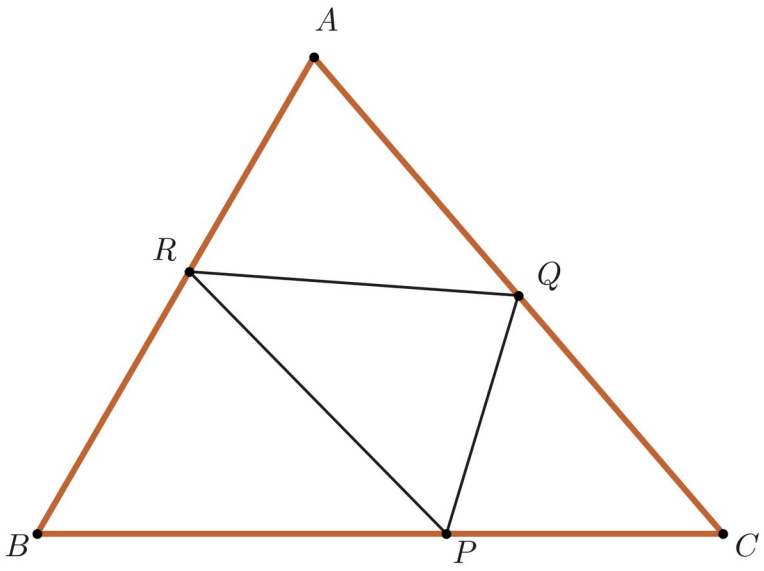


Figura 1. Um triângulo inscrito: um vértice em cada lado de ABC.

2. A ferramenta: reflexão e caminho mínimo

Lema (Heron). Sejam r uma reta e M, N pontos de um mesmo semiplano. Se N' é o reflexo de N em relação a r, então, para todo X em r,

$$MX + XN = MX + XN' \geq MN'$$

com igualdade exatamente quando X pertence ao segmento MN'.

Demonstração. A reflexão é uma isometria que fixa r; logo $XN = XN'$ e $MX + XN = MX + XN'$. Pela desigualdade triangular no triângulo MXN', essa soma é no mínimo MN', com igualdade se, e somente se, X está sobre o segmento MN'. ■

Na configuração de igualdade, MX e XN formam ângulos iguais com r (Figura 2): o caminho mínimo se comporta como um raio de luz refletido num espelho. Esse princípio, já conhecido de Heron de Alexandria, é a única ferramenta de que precisaremos.

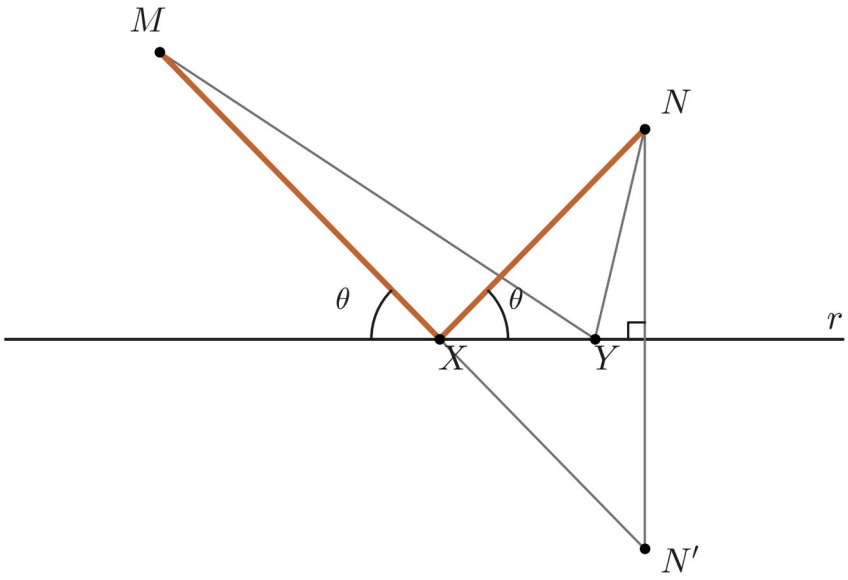


Figura 2. O caminho mínimo de M a N tocando a reta r passa pelo reflexo N'.

3. O triângulo órtico e sua propriedade de espelho

Sejam D, E e F os pés das alturas de ABC relativas a A, B e C, concorrentes no ortocentro H. Como ABC é acutângulo, D, E e F pertencem aos interiores dos lados, e o **triângulo órtico** DEF está de fato inscrito em ABC (Figura 3).

Teorema. Os lados do triângulo órtico formam ângulos iguais com os lados de ABC:

$$\angle FDB = \angle EDC = \alpha\,,\ \angle DEC = \angle FEA = \beta\,,\ \angle EFA = \angle DFB = \gamma$$

onde $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ e $\gamma = \angle ACB$.

Demonstração. Como $\angle BFC = \angle BEC = 90°$, o quadrilátero $BFEC$ é inscritível, e seu ângulo externo iguala o interno oposto: $\angle AFE = \gamma$ e $\angle AEF = \beta$.

Como $\angle BFH = \angle BDH = 90°$, o quadrilátero $BFHD$ é inscritível; ângulos que subtendem o mesmo arco FH dão $\angle FDH = \angle FBH = 90° - \alpha$ (pois o triângulo ABE é retângulo em E). Sendo AD perpendicular a BC, concluímos $\angle FDB = 90° - \angle FDH = \alpha$. O mesmo raciocínio com o quadrilátero $CDHE$ fornece $\angle EDC = \alpha$.

As demais igualdades seguem: no triângulo BFD, $\angle DFB = 180° - \alpha - \beta = \gamma$; no triângulo DEC, $\angle DEC = 180° - \alpha - \gamma = \beta$. ∎

Em outras palavras, o triângulo órtico tem a **propriedade de espelho**: seus lados se refletem nos lados de ABC como raios de luz. Equivalentemente, as alturas de ABC são as bissetrizes internas de DEF; em particular, o ortocentro de ABC é o incentro do triângulo órtico.

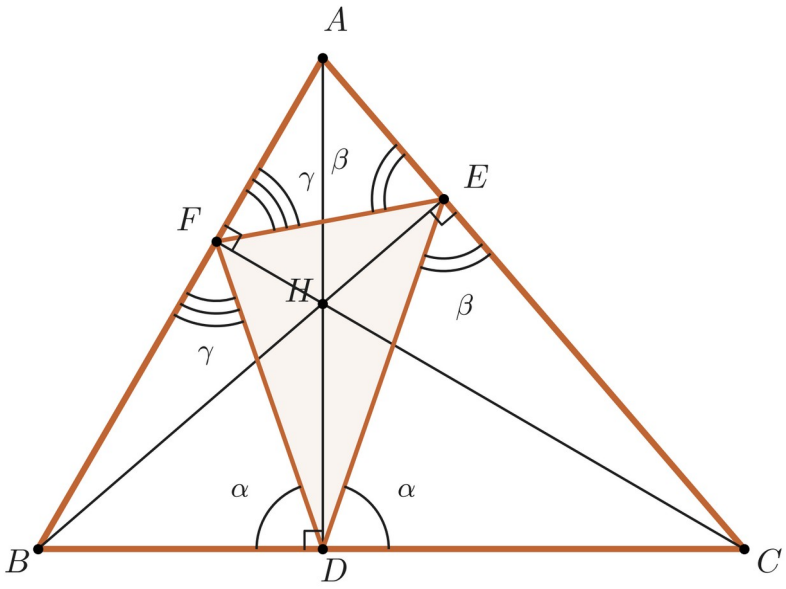


Figura 3. O triângulo órtico: em cada pé de altura, os dois lados de *DEF* formam ângulos iguais com o lado de *ABC*.

4. A solução de Fejér

Passo 1. Dois reflexos de P. Fixe um ponto P sobre BC e considere seus reflexos P_1 em relação a AB e P_2 em relação a AC. Para quaisquer R sobre AB e Q sobre AC, o lema dá $PR = P_1R$ e $PQ = P_2Q$. O perímetro de PQR é, portanto,

$$PR + RQ + QP = P_1R + RQ + QP_2 \geq P_1P_2$$

com igualdade quando R e Q estão sobre o segmento P_1P_2.

Passo 2. O melhor ponto P. Como $AP_1 = AP = AP_2$ e $\angle P_1AP_2 = 2\alpha$ (cada reflexão replica o ângulo que AP faz com o lado), os triângulos AP_1P_2, com P variando em BC, são todos isósceles de ângulo do vértice constante, logo todos semelhantes. A base P_1P_2 é, portanto, proporcional ao lado igual AP, e é mínima quando AP é mínimo: isso ocorre quando P é o pé da altura, $P = D$.

Conclusão parcial: todo triângulo inscrito PQR tem perímetro maior ou igual a D_1D_2, onde D_1 e D_2 são os reflexos de D em relação a AB e a AC.

Passo 3. O órtico realiza o mínimo. Resta mostrar que o valor D_1D_2 é atingido. No ponto F, a reflexão do segmento FD forma com AB o mesmo ângulo γ que FE (Teorema): logo D_1, F e E são colineares. No ponto E, o mesmo argumento com o ângulo β mostra que D_2, E e F são colineares. Portanto D_1, F, E e D_2 estão sobre uma única reta (Figura 4), e o perímetro do órtico é

$$DE + EF + FD = D_2E + EF + FD_1 = D_1D_2$$

O triângulo inscrito de menor perímetro é o triângulo órtico *DEF*, e ele é o único.

A unicidade remete às condições de igualdade: ela exige, ao mesmo tempo, $P = D$ (Passo 2) e R, Q sobre o segmento D_1D_2 (Passo 1). Como essa reta encontra AB e AC em pontos únicos, F e E, nenhum outro triângulo inscrito realiza o mínimo.

Observação (o valor do mínimo). No triângulo isósceles AD_1D_2, de lados iguais a AD e ângulo do vértice 2α, a altura relativa à base a divide em dois segmentos de comprimento $AD \cdot sen\,\alpha$; logo $D_1D_2 = 2 \cdot AD \cdot sen\,\alpha$. Por outro lado, como $\angle AFE = \gamma$ e $\angle AEF = \beta$, os triângulos AEF e ABC são semelhantes, com razão $\dfrac{AF}{AC} = \cos\alpha$ (o triângulo AFC é retângulo em F). Logo $EF = a \cdot \cos\alpha$; analogamente, $FD = b \cdot \cos\beta$ e $DE = c \cdot \cos\gamma$, onde $a = BC$, $b = CA$ e $c = AB$.

O perímetro mínimo é, portanto, $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$. Escrevendo S para a área de ABC e R para seu circunraio, a lei dos senos ($a = 2R \cdot sen\,\alpha$) reescreve a soma:

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = R\left(sen\,2\alpha + sen\,2\beta + sen\,2\gamma\right)$$

$$= 4R\,sen\,\alpha\,sen\,\beta\,sen\,\gamma = \frac{2S}{R}$$

pois $sen\,2\alpha + sen\,2\beta = 2\,sen\,\gamma\cos(\alpha - \beta)$ e $sen\,2\gamma = -2\,sen\,\gamma\cos(\alpha + \beta)$. O semiperímetro do triângulo órtico é, portanto, $\dfrac{S}{R}$.

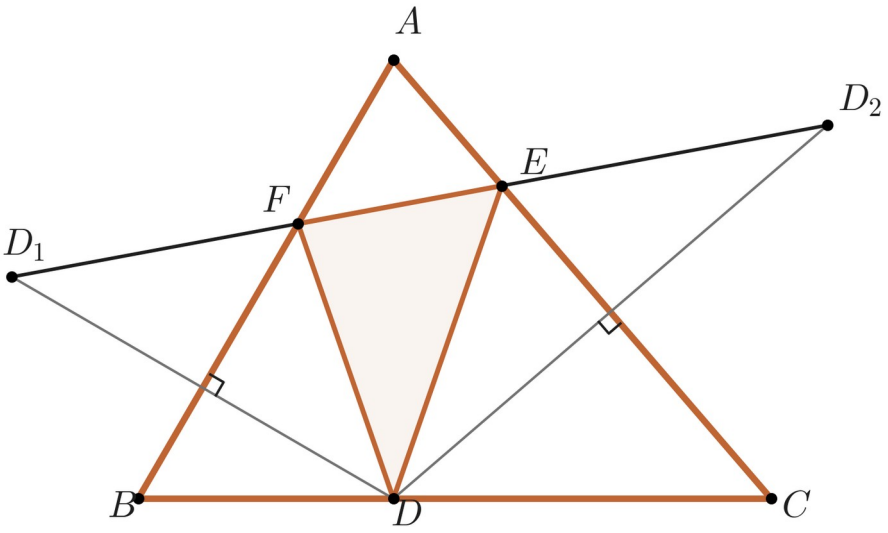


Figura 4. O desdobramento de Fejér: D_1, F, E e D_2 são colineares, e o perímetro do órtico é o comprimento D_1D_2.

5. Por que acutângulo?

A hipótese aparece em dois lugares. Ela garante que os pés das alturas pertencem aos lados, e portanto que o triângulo órtico está realmente inscrito; sustenta ainda, no Passo 3, pontos de igualdade sobre os lados, e não sobre seus prolongamentos.

Se ABC é retângulo, dois pés coincidem com o vértice do ângulo reto e o órtico degenera num segmento. Se é obtusângulo, dois pés caem fora dos lados. Em ambos os casos, há triângulos

inscritos com perímetro arbitrariamente próximo do dobro da menor altura, mas nenhum triângulo inscrito propriamente dito atinge esse valor: o mínimo só existe, e só é realizado, no caso acutângulo.

Há problemas em que o caminho mais curto só aparece quando deixamos de procurá-lo dentro da figura e a desdobramos.

Referências

[1] H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer, "Fagnano's Problem", §4.5 em Geometry Revisited, Mathematical Association of America, 1967.

[2] A. Bogomolny, "Fagnano's Problem: What Is It?", Cut-the-Knot. Disponível em: cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml.

[3] E. W. Weisstein, "Fagnano's Problem", Wolfram MathWorld. Disponível em: mathworld.wolfram.com/FagnanosProblem.html.