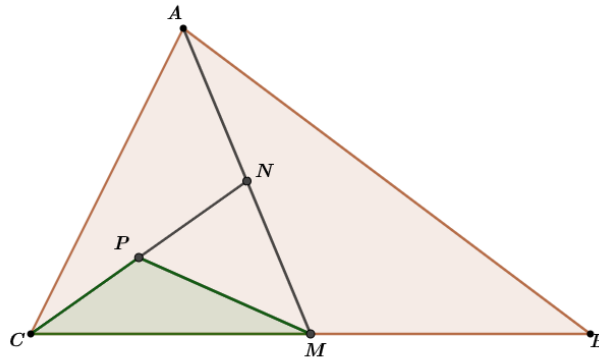


ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

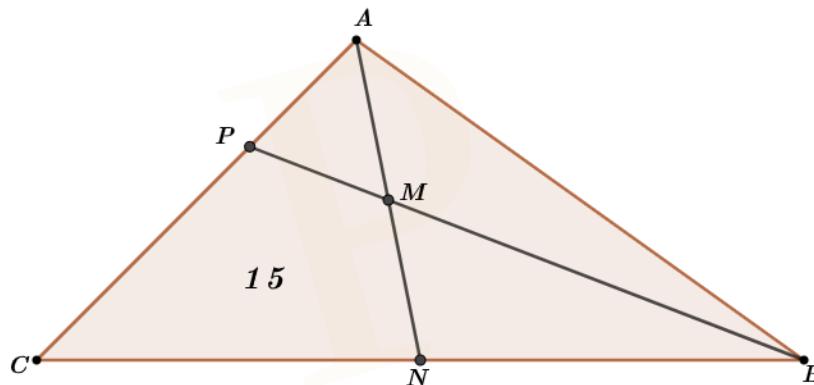
PROFESSOR YURI POLITANO

Problema 01.

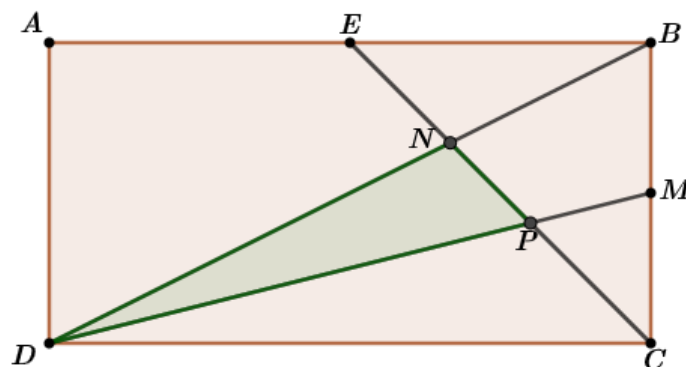
A área do triângulo ABC abaixo é 20. Os pontos M, N e P são médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ e $\overline{CN}$. Calcule a área do triângulo COM.



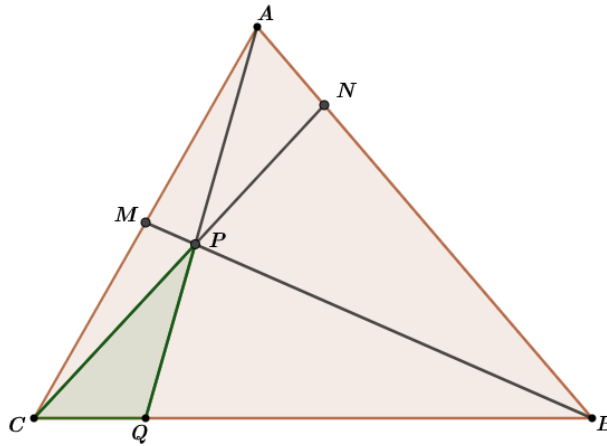
Problema 02. Na figura abaixo, M e N são pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BC}$. O número 15 indica a área do quadrilátero MNCP. Dessa forma, calcule a área do triângulo ABC.



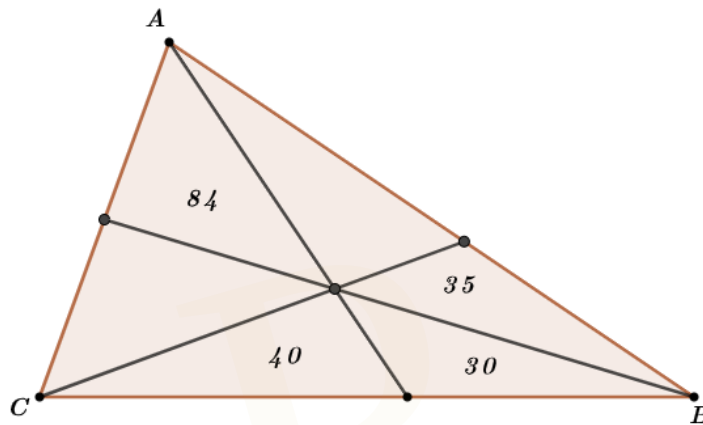
Problema 03. O retângulo ABCD abaixo possui base igual a 4 e altura 2. Os pontos E e M são pontos médios, respectivamente, da base e da altura. Dessa forma, quer-se a área do triângulo DPN.



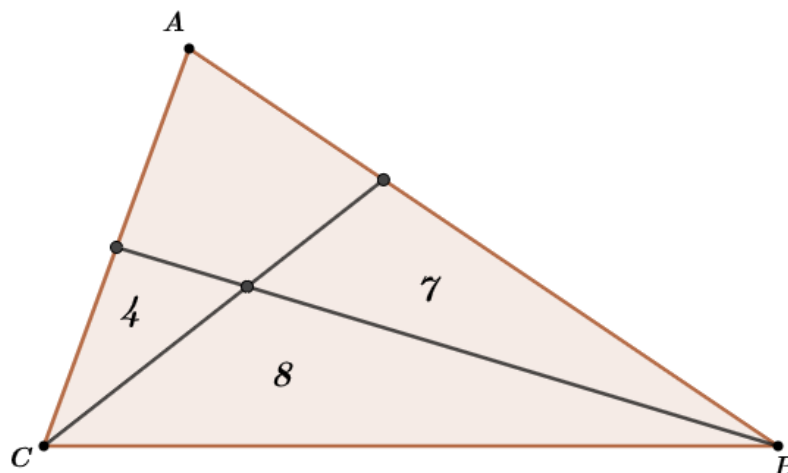
Problema 04. No triângulo ABC abaixo, M é ponto médio de $\overline{AC}$ e a área do triângulo CMP é igual a 10. Além disso, os pés das cevianas AQ e CN dividem os lados, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ numa razão de 1:4. Calcule a área do triângulo CPQ.



Problema 05. No triângulo abaixo, os números indicados em cada região correspondem às suas respectivas áreas. Dessa forma, calcule a área do triângulo ABC.

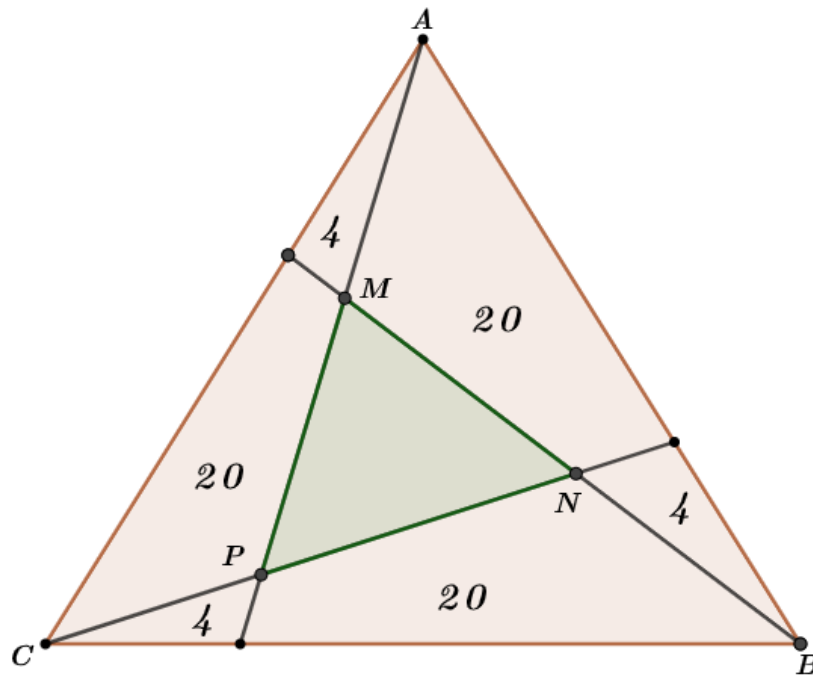


Problema 06. Calcule a área do triângulo ABC, sabendo que os números indicados nas regiões representam suas respectivas áreas.

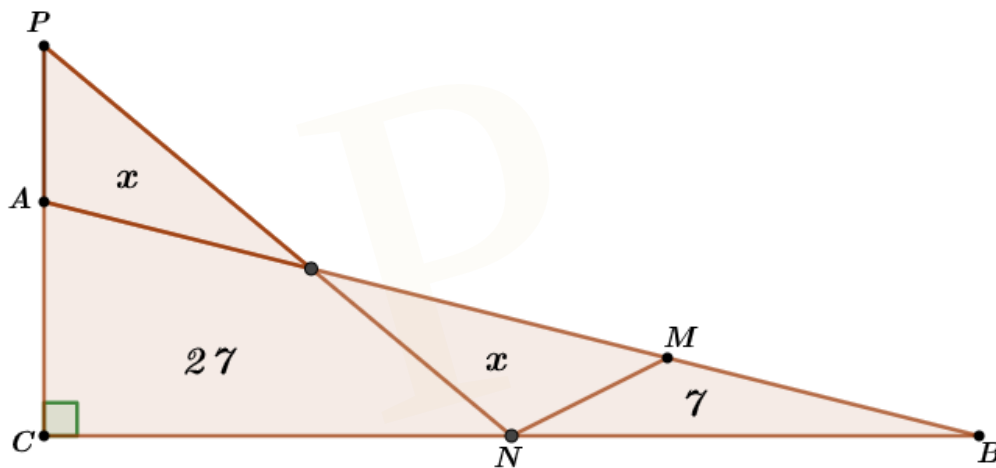


Problema 07. O triângulo ABC abaixo é equilátero e os números indicados em cada região representam suas respectivas áreas.

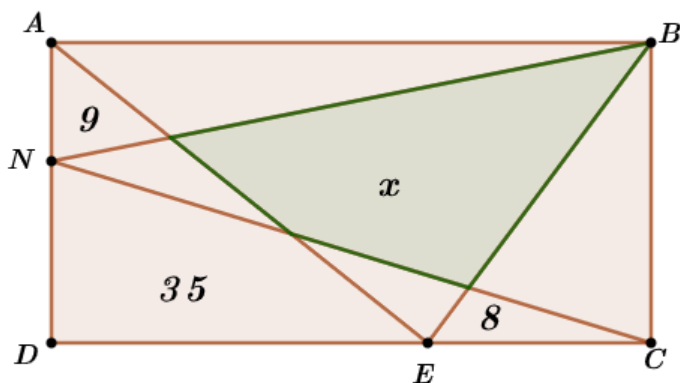
Dessa forma, calcule a área do triângulo MNP.



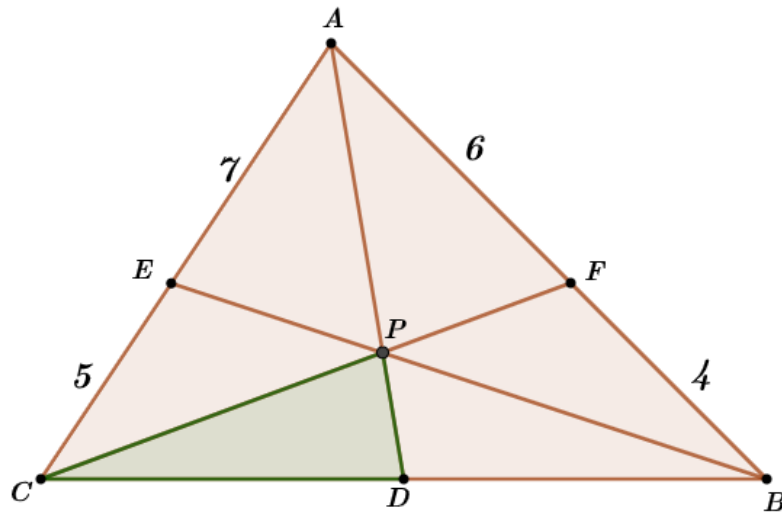
Problema 08. Determine x , sabendo que os números indicados nas regiões representam, respectivamente, suas áreas.



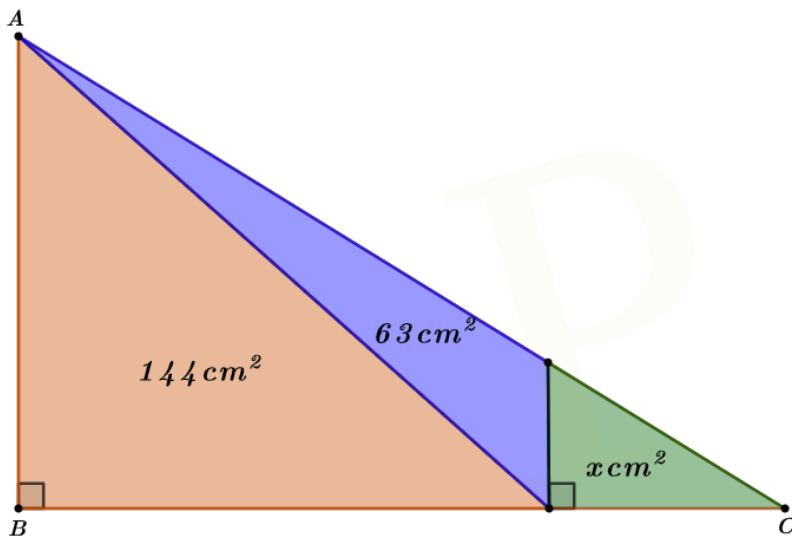
Problema 09. No retângulo ABCD abaixo, os números indicados representam as áreas das regiões. Quer-se x .



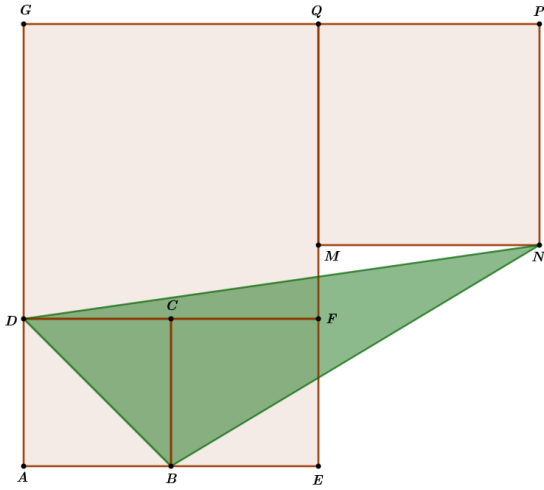
Problema 10. No triângulo abaixo, as cevianas concorrem internamente em P. Se $AD = 11,7$. Calcule a fração da área de ABC ocupada por CPD.



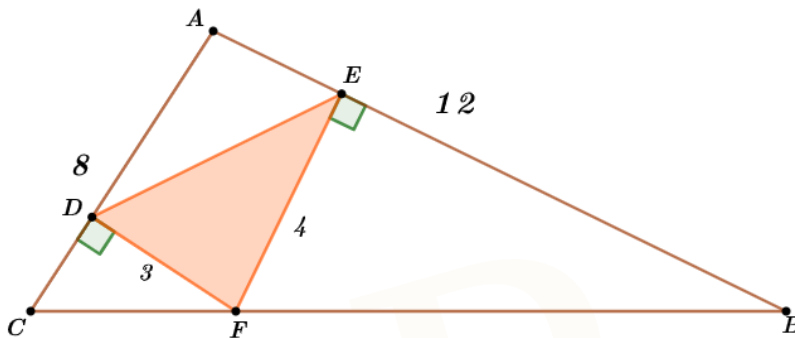
Problema 11. Determine o valor de x no triângulo abaixo.



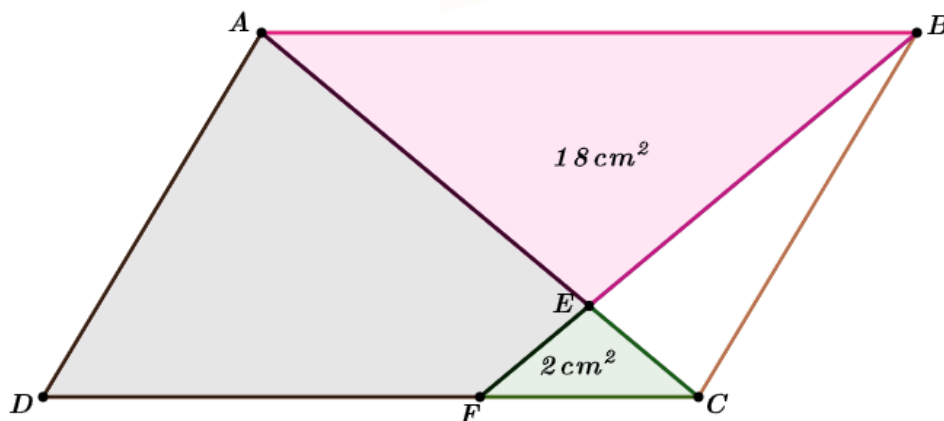
Problema 12. Na figura a seguir, temos os quadrados ABCD, CBEF, DFQG, MNPQ. O ponto M pertence ao segmento QF e a área do quadrado ABCD é 10cm^2 . Calcule a área do triângulo BDN, em cm^2 .



Problema 13. No triângulo ABC da figura abaixo, tem-se $\overline{AC} = 8\text{ cm}$ e $\overline{AB} = 12\text{ cm}$. Tomando $\overline{DF} = 3$ perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{EF} = 4$ perpendicular a $\overline{AB}$, determina-se o triângulo DEF. Calcule a área deste triângulo.

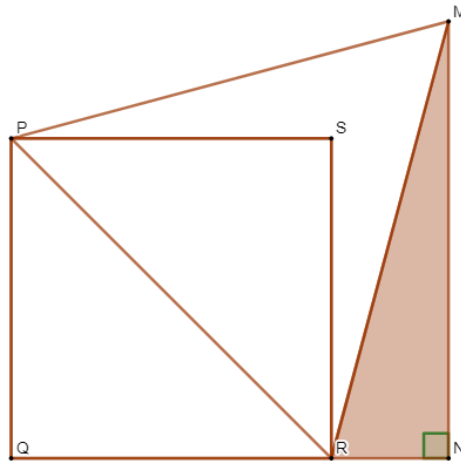


Problema 14. No paralelogramo ABCD abaixo estão indicadas as áreas dos triângulos ABE e CEF, cujas medidas são 18 cm^2 e 2 cm^2 respectivamente. A partir destas informações, calcule a área do quadrilátero AEFD.



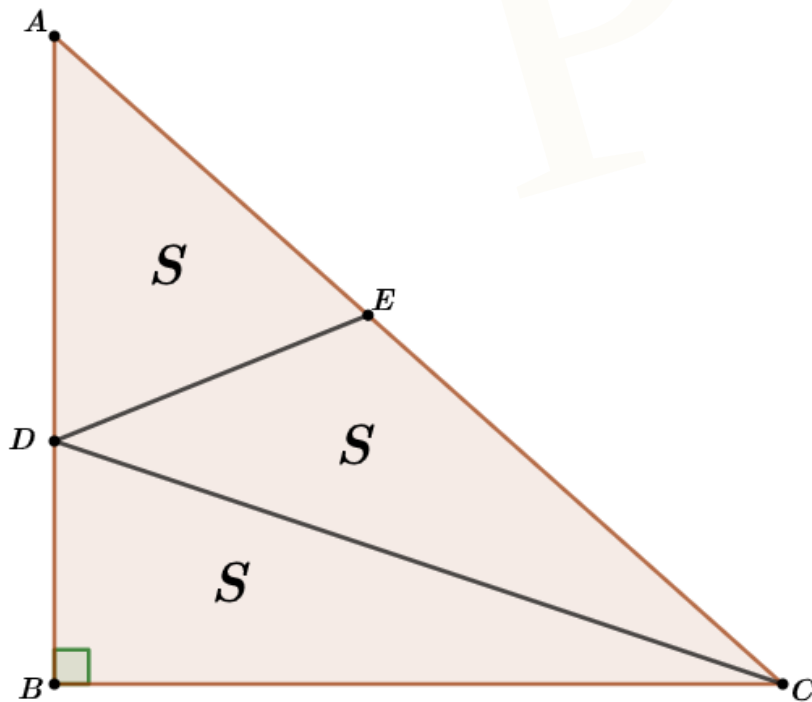
Problema 15. Calcule a área de um triângulo cujas alturas são $h_a = \frac{1}{4}$; $h_b = \frac{1}{7}$ e $h_c = \frac{1}{9}$.

Problema 16. Na figura abaixo, o triângulo PMR é equilátero e o quadrilátero PQRS é um quadrado, cujo lado mede 2 cm. A área do triângulo MNR, em cm^2 , vale:



- a) 1
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{6}$
- e) $\sqrt{12}$

Problema 17. No triângulo retângulo ABC abaixo, $[BCD] = [CDE] = [DEA] = S$. Se $\overline{DE} = 13$, calcule $\overline{DC}$.



QUESTÕES EXTRAS DE CONCURSOS

1. (Efomm) Um terreno triangular equilátero possui, em seu interior, uma árvore plantada. As distâncias perpendiculares dessa árvore até cada um dos três lados do terreno medem 3m, 4m e 5m. Qual a área do terreno em metros quadrados?

- a) $48\sqrt{3}m^2$
- b) $36\sqrt{3}m^2$
- c) $24\sqrt{3}m^2$
- d) $24\sqrt{2}m^2$
- e) $12\sqrt{2}m^2$

2. (Espcex (Aman)) Considere ABC um triângulo retângulo em B e uma circunferência λ a ele inscrita, sendo $D \in \overline{AB}$, e $F \in \overline{AC}$ os pontos de tangência entre os lados do triângulo e a circunferência. Sabendo-se que os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 16 cm e 12 cm, calcule, em cm^2 , a área do quadrilátero DBEF.

- a) $\frac{136}{5}$.
- b) $\frac{216}{5}$.
- c) $\frac{480}{5}$.
- d) $\frac{128}{5}$.
- e) $\frac{96}{5}$.

3. (Espcex (Aman)) Um quadrilátero ABCD tem as diagonais perpendiculares entre si medindo 5 cm e 7 cm. A área do quadrilátero, em cm^2 , é igual a:

- a) 6
- b) 7
- c) 12
- d) 17,5
- e) 35

4. (Epcar (Afa)) Considere um triângulo retângulo cujo perímetro mede 15 unidades de comprimento e que seus lados estão em uma progressão aritmética crescente. A partir desse triângulo, podemos inscrever uma circunferência de raio r , bem como circunscrever outra circunferência de raio R . Então, a razão entre o raio da circunferência circunscrita e o raio da circunferência inscrita, nessa ordem, pertence ao intervalo:

- a) $[1, 2[$

- b) $[2, 3[$
- c) $[3, 4[$
- d) $[4, 5]$

5. (Espcex (Aman)) Um depósito de munições no formato retangular será construído em um campo de instrução do Exército Brasileiro. A planta da construção prevê que esse retângulo esteja inscrito em uma área cujo formato é de um triângulo isósceles de base 24m e altura 16m. A área máxima do depósito que atende a essas condições é igual a:

- a) 32 m^2
- b) 48 m^2
- c) 64 m^2
- d) 72 m^2
- e) 96 m^2

6. (Ita) Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Tome o ponto $R \neq A$ na reta AB tal que $m(\overline{AB}) = m(\overline{BR})$ e o ponto Q na reta AC tal que $m(\overline{AC}) = 2m(\overline{CQ})$ e Q não esteja no segmento $\overline{AC}$. A reta RM corta o lado $\overline{AC}$ no ponto S e a reta QM corta o lado $\overline{AB}$ no ponto P. Sendo 24 a área do triângulo ABC, o valor da área do quadrilátero APMS vale:

- a) 15.
- b) 16.
- c) 17.
- d) 18.
- e) 19.

7. (Esc. Naval) Considere um semicírculo de diâmetro ML e sua reta tangente em L. Suponha que F é um ponto desta reta tal que $FL = \frac{FM}{2}$. Calcule a área da porção do triângulo FML situado no exterior do semicírculo e assinale a opção correta.

- a) $\left(\frac{5\sqrt{3}-2}{12}\right) \cdot r^2$
- b) $\left(\frac{5\sqrt{3}-\pi}{12}\right) \cdot r^2$
- c) $\left(\frac{\sqrt{3}-2\pi}{12}\right) \cdot r^2$
- d) $\left(\frac{5\sqrt{2}-2\pi}{12}\right) \cdot r^2$
- e) $\left(\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{12}\right) \cdot r^2$

8. (Ita) Considere um triângulo ABC tal que $m(\overline{AB}) = 4$, $m(\overline{AC}) = 5$ e $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Seja D um ponto no lado $\overline{AB}$ tal que $m(\overline{AD}) = 1$. Encontre o raio do círculo inscrito no triângulo BCD.

9. (G1 - col. naval) Seja ABC um triângulo cujos lados AB, AC e BC possuem medidas iguais a 14, 12 e 10, respectivamente. Sejam "H" o ortocentro de ABC e "w" a circunferência circunscrita ao triângulo dado. Prolonga-se cada um dos segmentos AH, BH e CH, até encontrar "w" nos pontos "P", "Q" e "R", respectivamente. Assim, de acordo com os dados, a área do hexágono AQCPRB, em unidades de área, é igual a:

- a) $24\sqrt{6}$
- b) $36\sqrt{6}$
- c) $40\sqrt{3}$
- d) $24\sqrt{3}$
- e) $48\sqrt{6}$

10. (Esc. Naval) O escudo do atual campeão de futebol na série de acesso, o Botafogo, possui como principal símbolo uma estrela (figura 1).



Figura 1

Considere que a estrela foi formada a partir de uma circunferência unitária dividida em cinco partes iguais, determinando os pontos A, C, E, G e I (figura 2). As cordas AE, AG, CG, CI e EI determinam um pentagrama, isto é, formam a estrela. Assinale a alternativa que representa a área da estrela, em unidades de área, ou seja, do polígono ABCDEFGHIJ.

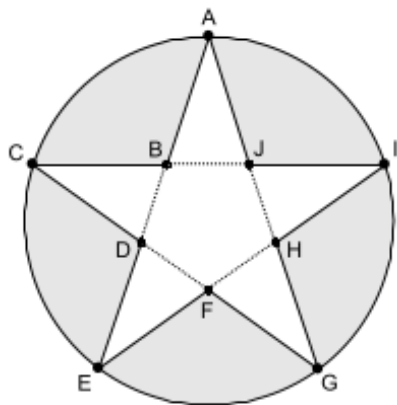
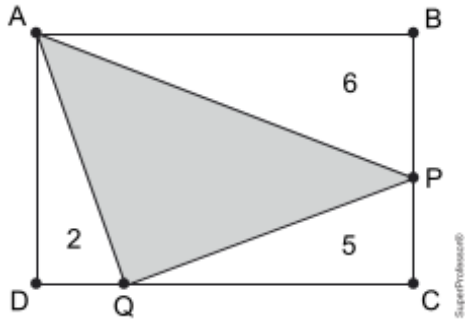


Figura 2

- a) $5 \cdot \operatorname{tg}(36^\circ) \cdot \cos(72^\circ)$
- b) $\operatorname{tg}(72^\circ) \cdot \cos(36^\circ)$
- c) $5 \cdot \operatorname{tg}(36^\circ) \cdot \operatorname{sen}(72^\circ)$
- d) $5 \cdot \operatorname{sen}(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ)$
- e) $\operatorname{tg}(72^\circ) \cdot \operatorname{sen}(72^\circ)$

11. (Obmep) O retângulo ABCD é formado pelos triângulos ABP, CQP, AQD e APQ. As

áreas dos triângulos ABP, CQP e AQD são, respectivamente, 6, 5 e 2 cm². Qual é, em cm², a área do triângulo APQ?

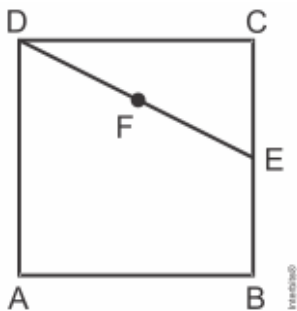


- a) 7
- b) 8
- c) 9
- d) 10
- e) 11

12. (Ime) Sejam os pontos D, E e F pertencentes, respectivamente, aos lados AB, BC e AC do triângulo ABC , tais que $BD = 3AD$, $AF = 3CF$ e $CE = 3BE$. Sendo $P = AE \cap CD$, $Q = AE \cap BF$ e $R = BF \cap CD$, calcule $\frac{[PQR]}{[ABC]}$.

Observação: $[XYZ]$ é a área do triângulo XYZ .

13. (Espcex (Aman)) Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado, E é o ponto médio de BC e F é o ponto médio de DE .



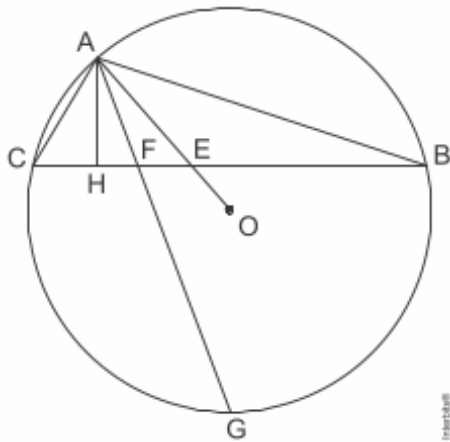
A razão entre as áreas do quadrado $ABCD$ e do triângulo AEF ,

nessa ordem, é

- a)
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

14. (Esc. Naval) Considere um círculo de centro O circunscrito a um triângulo ABC com

ângulo obtuso em A. O raio AO forma um ângulo de 30° com a altura AH e intercepta BC em um ponto E. O prolongamento da bissetriz do ângulo A intercepta BC em um ponto F e a circunferência em um ponto G, conforme figura abaixo.



Assinale a opção que apresenta a área do quadrilátero FEOG sabendo que $AG = 4\sqrt{2}cm$ e $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}cm$.

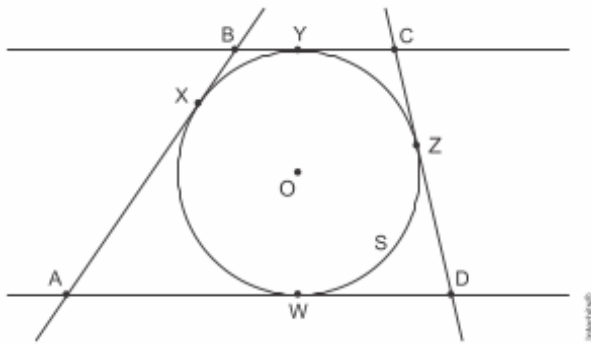
- a) $6(3 + \sqrt{2})cm^2$
- b) $3(6 - \sqrt{3})cm^2$
- c) $2(3 + \sqrt{6})cm^2$
- d) $3(6 + \sqrt{3})cm^2$
- e) $6(2 - \sqrt{3})cm^2$

15. (Espcex (Aman)) Um trapézio $ABCD$, retângulo em A e D , possui suas diagonais perpendiculares. Sabendo-se que os lados AB e CD medem, respectivamente, $2cm$ e $18cm$ então a área, em cm^2 , desse trapézio mede

- a) 120.
- b) 60.
- c) 180.
- d) 30.
- e) 240.

16. (Fuvest) São dados:

- uma circunferência S de centro O e raio 5;
- quatro pontos X, Y, Z e W em S de tal forma que as retas tangentes a S nesses pontos formam um trapézio $ABCD$, como na figura;
- $\widehat{BAW} = \frac{3}{5}$ e $CD = 15$.



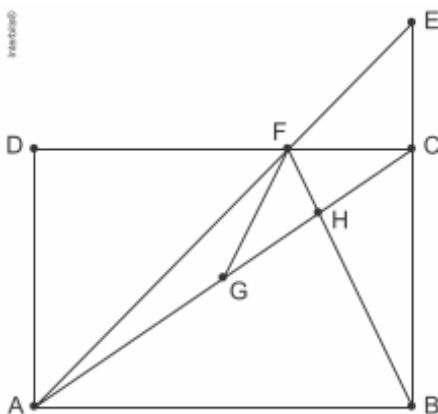
Determine

- a) a medida de $\overline{AB}$;
- b) a medida de $\overline{AW}$ e $\overline{AX}$;
- c) a área da região delimitada pelo trapézio $ABCD$.

17. (Efomm) Sejam a circunferência C_1 , com centro em A e raio 1, e a circunferência C_2 , que passa por A , com centro em B e raio 2. Sabendo-se que D é o ponto médio do segmento AB , E é um dos pontos de interseção entre C_1 e C_2 , e F é a interseção da reta ED com a circunferência C_2 , o valor da área do triângulo AEF , em unidades de área é

- a) $2 + \frac{\sqrt{15}}{8}$
- b) $1 + \frac{\sqrt{15}}{4}$
- c) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$
- d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- e) $\frac{5\sqrt{15}}{8}$

18. (G1 - col. naval) Observe a figura a seguir:



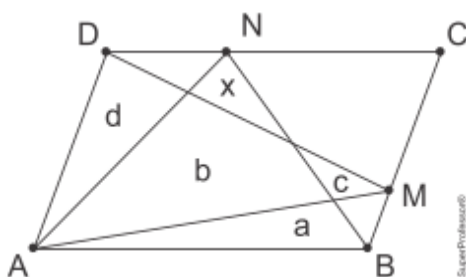
Ela apresenta um quadrado ABCD com lado medindo 2 unidades de comprimento (u.c.). Sabe-se que G é o centro desse quadrado e que $\overline{CE} = 1u.c.$ é o prolongamento do lado $\overline{BC}$. Se s_1 é a área do triângulo FHC e s_2 é a área do triângulo FHG, é correto afirmar que a razão $\frac{s_1}{s_2}$ é igual

- a) $7/8$
- b) $8/9$
- c) $9/10$
- d) 1
- e) $6/5$

19. (Espcex (Aman)) Considere uma circunferência de centro O e raio $1cm$ tangente a uma reta r no ponto Q . A medida do ângulo $M\hat{O}Q$ é 30° , onde M é um ponto da circunferência. Sendo P o ponto da reta r tal que PM é paralelo a OQ , a área (em cm^2) do trapézio $OMPQ$ é

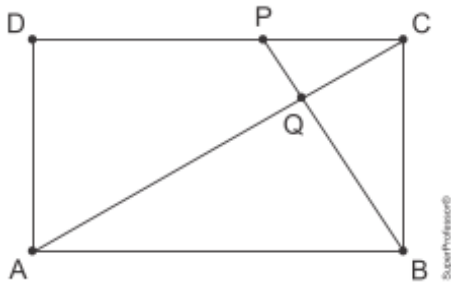
- a) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
- b) $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) $2 - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
- e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. (Obmep) No paralelogramo ABCD da figura, os pontos M e N são pontos dos lados BC e CD, respectivamente. As áreas a, b, c e d são conhecidas. Qual é o valor da área x?



- a) $c + d - a$
- b) $a + c + d - b$
- c) $a + c + d - 2b$
- d) $a + d - b$
- e) $a + c - d$

21. (Obmep) Sabendo que as áreas dos triângulos BCQ e QCP da figura são, respectivamente, 6 e 2, qual é a área do retângulo ABCD?

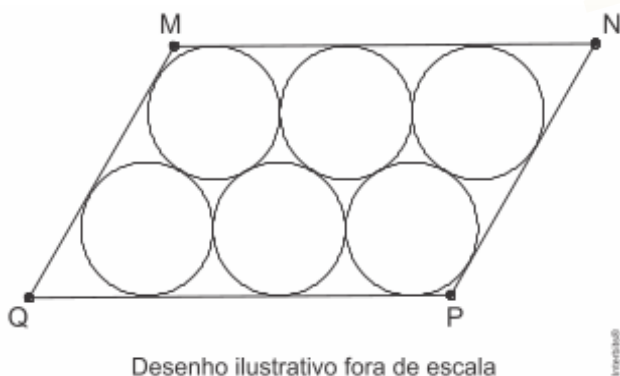


- a) 48
- b) 50
- c) 52
- d) 54
- e) 56

22. (Efomm) Qual é a área de uma circunferência inscrita em um triângulo equilátero, sabendo-se que esse triângulo está inscrito em uma circunferência de comprimento igual a $10\pi\text{cm}$?

- a) $\frac{75\pi}{4}$
- b) $\frac{25\pi}{4}$
- c) $\frac{5\pi}{2}$
- d) $\frac{25\pi}{16}$
- e) $\frac{5\pi}{4}$

23. (Espcex (Aman)) Seis círculos de raio 1cm são inseridos no paralelogramo MNPQ, de área $X\text{cm}^2$, de acordo com a figura abaixo.



Sabendo-se que os seis círculos são tangentes entre si e com os lados do paralelogramo, a área X , em cm^2 , é

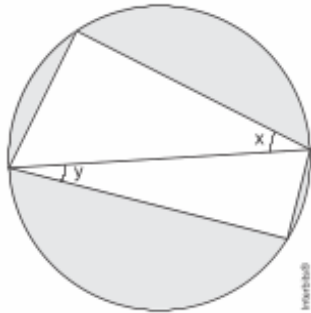
- a) $11 + 6\sqrt{3}$.
- b) $\frac{30+14\sqrt{3}}{3}$.

c) $10 + 5\sqrt{3}$.

d) $11 - 6\sqrt{3}$.

e) $\frac{36+20\sqrt{3}}{3}$.

24. (Fuvest) O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.



Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e y , é:

a) $\pi + \sin(2x) + \sin(2y)$

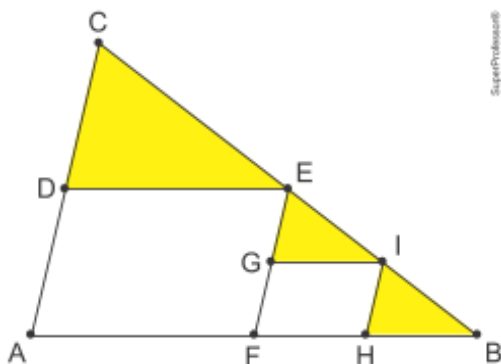
b) $\pi - \sin(2x) - \sin(2y)$

c) $\pi - \cos(2x) - \cos(2y)$

d) $\pi - \frac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$

e) $\pi - \frac{\sin(2x) + \sin(2y)}{2}$

25. (Obmep) Na figura abaixo, D , E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC , e G , H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE . A área do triângulo ABC é 48 cm^2 . Qual é a área da região destacada em amarelo?



a) 16 cm^2

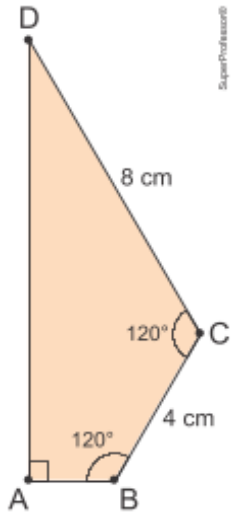
b) 18 cm^2

c) 20 cm^2

d) 22 cm^2

e) 24 cm^2

26. (Obmep) Na figura, os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCD}$ medem 120° , o ângulo $\widehat{BAD}$ é reto, e os segmentos BC e CD medem 4 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$ em cm^2 ?



- a) $14\sqrt{3}$
- b) $28\sqrt{3}$
- c) $32\sqrt{3}$
- d) $36\sqrt{3}$
- e) $40\sqrt{3}$

27. (G1 - col. naval) Seja o quadrado $ABCD$ de lado 2. Traça-se, com centro no ponto M , médio do lado AB , uma semicircunferência de raio 2 que intersecta os lados BC e AD , respectivamente, em E e F . A área da superfície externa à semicircunferência e que também é interna ao quadrado, é igual a

Dado: $\pi = 3$

- a) $3 - \sqrt{3}$
- b) $2 - \sqrt{3}$
- c) $3 + \sqrt{3}$
- d) $2 + \sqrt{3}$
- e) $3 - \sqrt{2}$

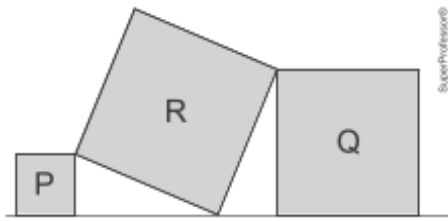
28. (Esc. Naval) Um triângulo inscrito em um círculo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de 15° . O produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse círculo é igual a:

- a) $3(\sqrt{3} + 2)$
- b) $4(2\sqrt{3} + 3)$
- c) $\sqrt{8\sqrt{3} + 12}$

d) $\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3)$

e) $6(\sqrt{2} + 1)$

29. (Obmep) Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24 cm^2 e 168 cm^2 , respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?



a) 96 cm^2

b) 100 cm^2

c) 121 cm^2

d) 144 cm^2

e) 156 cm^2

30. (Espcex (Aman)) Em um treinamento da arma de Artilharia, existem 3 canhões A, B e C. Cada canhão, de acordo com o seu modelo, tem um raio de alcance diferente e os três têm capacidade de giro horizontal de 360° . Sabendo que as distâncias entre A e B é de 9 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km^2 , a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

a) $\frac{23}{2}\pi$

b) $\frac{23}{4}\pi$

c) $\frac{385}{8}\pi$

d) $\frac{195}{4}\pi$

e) $\frac{529}{4}\pi$

31. (EN) Considere um triângulo T_1 de área w . Os comprimentos das medianas de T_1 são os comprimentos dos lados de um novo triângulo T_2 , os comprimentos das medianas de T_2 são os comprimentos dos lados de um novo triângulo T_3 e assim sucessivamente, ou seja, a construção dos lados triângulo T_{n+1} é realizada a partir dos comprimentos das medianas do triângulo T_n . Sendo assim, se $w = 3$, é correto afirmar que a soma de todas

as áreas dos T_n , com $n \rightarrow \infty$, é um:

a) número racional não inteiro.

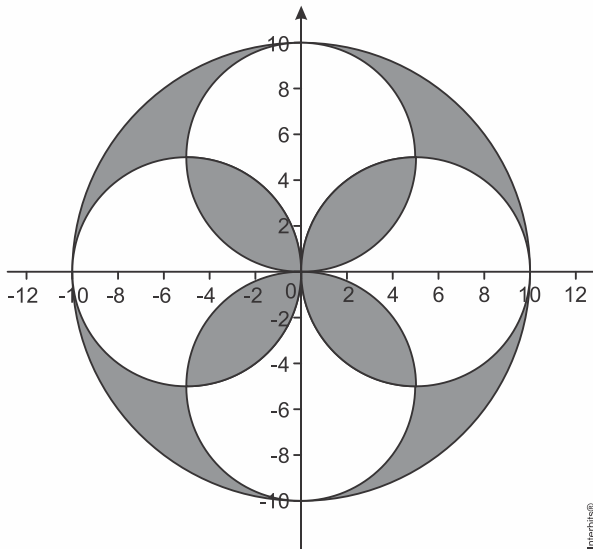
b) quadrado perfeito.

c) número primo.

d) número irracional.

e) número par.

32. (EFOMM) Seja o círculo maior com centro na origem e raio 10 cm . Os círculos menores têm raio 5 cm .



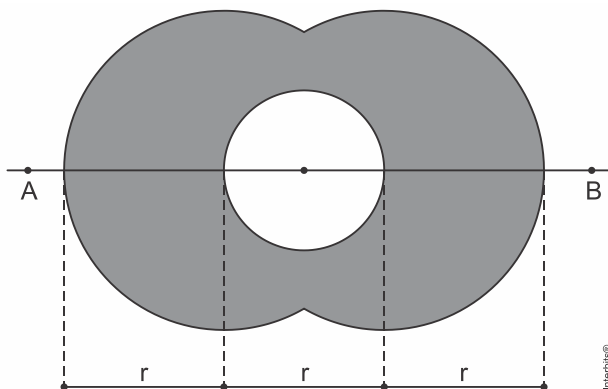
O valor da área hachurada, em cm^2 , é

- a) $\frac{250}{3}(1 - \pi)$
- b) $50(\pi - 1)$
- c) $100(\pi - 1)$
- d) $100(\pi - 2)$
- e) $\frac{100}{3}(1 - \pi)$

33. (EN) Seja $ABCD$ um quadrado de lado ℓ , em que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais. Seja O o ponto de encontro dessas diagonais e sejam P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, respectivamente. Pode-se dizer que a área do quadrilátero que tem vértices nos pontos A , B , Q e P vale

- a) $\frac{3\ell^2}{16}$
- b) $\frac{\ell^2}{16}$
- c) $\frac{3\ell^2}{8}$
- d) $\frac{\ell^2}{8}$
- e) $\frac{3\ell^2}{24}$

34. (AFA) Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.

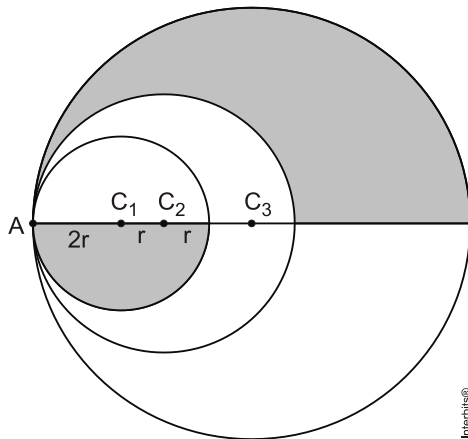


A expressão que fornece o valor da área sombreada é

- a) $\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}r^2$

- b) $\frac{11\pi+9\sqrt{3}}{12}r^2$
 c) $\frac{15\pi-4\sqrt{3}}{9}r^2$
 d) $\frac{13\pi+6\sqrt{3}}{12}r^2$

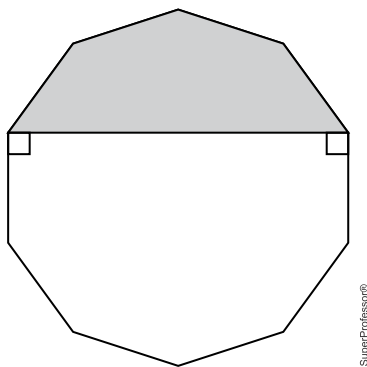
35. (AFA) Conforme a figura abaixo, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1 , C_2 e C_3 . Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.



Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

- a) $\frac{55}{8}\pi r^2$
 b) $\frac{29}{4}\pi r^2$
 c) $\frac{61}{8}\pi r^2$
 d) $8\pi r^2$

36. Em um decágono regular, uma de suas diagonais forma ângulos retos com seus lados, conforme mostra a figura.



Sendo 100 cm^2 a área desse decágono, a área do pentágono destacado vale

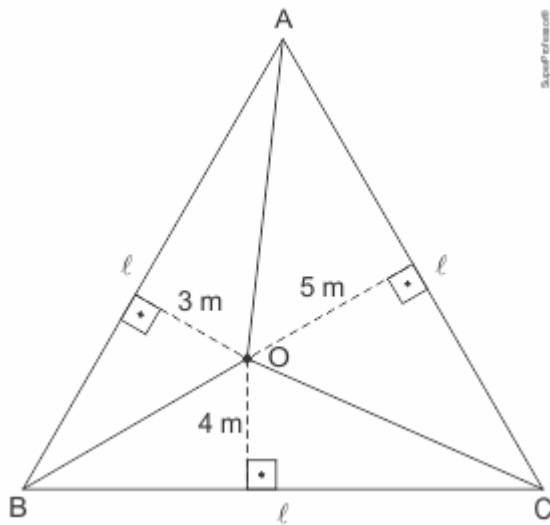
- a) 20 cm^2 .
 b) 25 cm^2 .
 c) 30 cm^2 .
 d) 35 cm^2 .
 e) 40 cm^2 .

Gabarito

Resposta da questão 1:

[A]

Seendo ℓ o lado do triângulo, podemos obter o seu valor comparando as áreas da seguinte forma:



$$\begin{aligned}
 A_{ABC} &= A_{ABO} + A_{ACO} + A_{BCO} \\
 \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} &= \frac{\ell \cdot 3}{2} + \frac{\ell \cdot 5}{2} + \frac{\ell \cdot 4}{2} \\
 \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} &= \frac{12\ell}{2} \\
 \ell &= 8\sqrt{3}m
 \end{aligned}$$

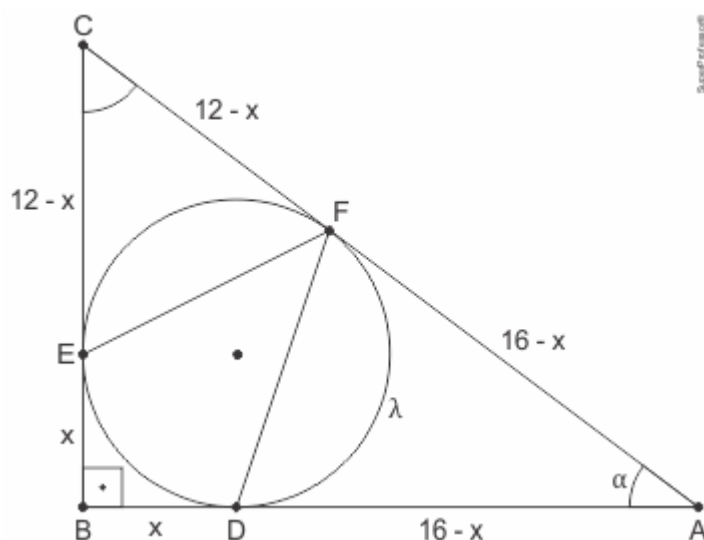
Logo:

$$\begin{aligned}
 A_{ABC} &= \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\
 \therefore A_{ABC} &= 48\sqrt{3}m^2
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 2:

[A]

Da figura abaixo, obtemos



$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 12^2 + 16^2 \Rightarrow \overline{AC} = 20\text{cm} \\ 12 - x + 16 - x &= 20 \Rightarrow x = 4\text{cm} \\ \text{sen}\alpha &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \\ \text{cos}\alpha &= \frac{16}{20} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

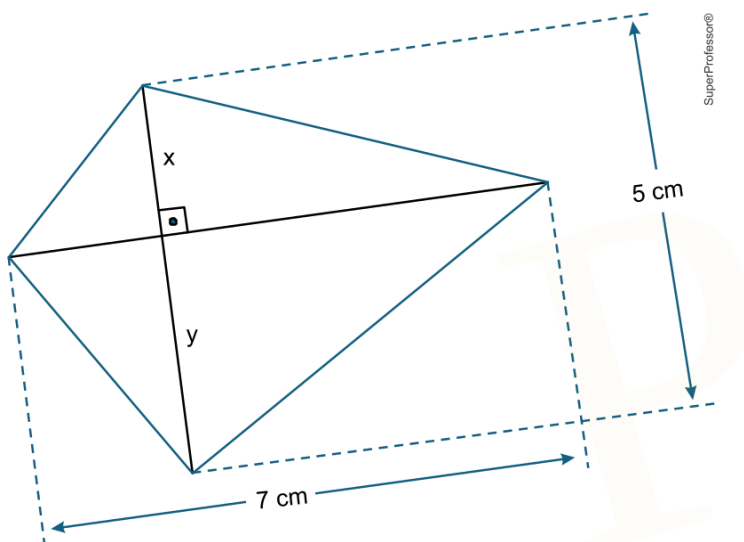
A área do quadrilátero DBEF pode ser obtida por:

$$\begin{aligned}A_{DBEF} &= A_{ABC} - A_{ADF} - A_{CEF} \\ A_{DBEF} &= \frac{16 \cdot 12}{2} - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \text{sen}\alpha - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \text{sen}\beta \\ A_{DBEF} &= 96 - 72 \cdot \frac{3}{5} - 32 \cdot \frac{4}{5} \\ \therefore A_{DBEF} &= \frac{136}{5} \text{cm}^2\end{aligned}$$

Resposta da questão 3:

[D]

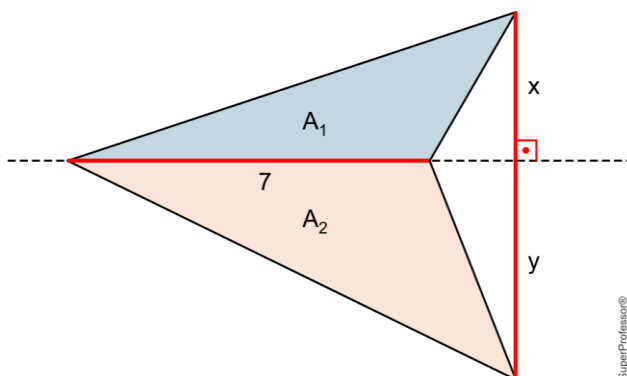
A área do quadrilátero ABCD será a soma das áreas de dois triângulos um de base 7 e altura x e outro de base 7 e altura y, como nos mostra a figura abaixo:



Calculando a área A deste quadrilátero, temos:

$$A = \frac{7 \cdot x}{2} + \frac{7 \cdot y}{2} \Rightarrow A = \frac{7 \cdot (x + y)}{2} \Rightarrow A = \frac{7 \cdot (5)}{2} \Rightarrow A = 17,5\text{cm}^2$$

Considerando um quadrilátero não convexo com diagonais contidas em retas perpendiculares.



$$A = A_1 + A_2 = \frac{7 \cdot x}{2} + \frac{7 \cdot y}{2} \Rightarrow A = \frac{7 \cdot (x + y)}{2} \Rightarrow A = \frac{7 \cdot (5)}{2} \Rightarrow A = 17,5 \text{ cm}^2$$

O resultado é o mesmo.

Resposta da questão 4:

[B]

Sabemos que os lados em PA de um triângulo retângulo podem ser escritos da seguinte forma:

3k, 4k e 5k, onde k é a razão da P.A.

Logo:

$$3k + 4k + 5k = 15 \Rightarrow 12k = 15 \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo são:

$$\frac{15}{4}, 5 \text{ e } \frac{25}{4}$$

Determinando o raio da circunferência inscrita, cuja medida chamaremos de r, temos:

$$\frac{15 \cdot r}{2} = \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} \Rightarrow r = \frac{5}{4}$$

A medida R do raio da circunferência circunscrita é a metade da medida da hipotenusa, logo:

$$R = \frac{\frac{25}{4}}{2} \Rightarrow R = \frac{25}{8}$$

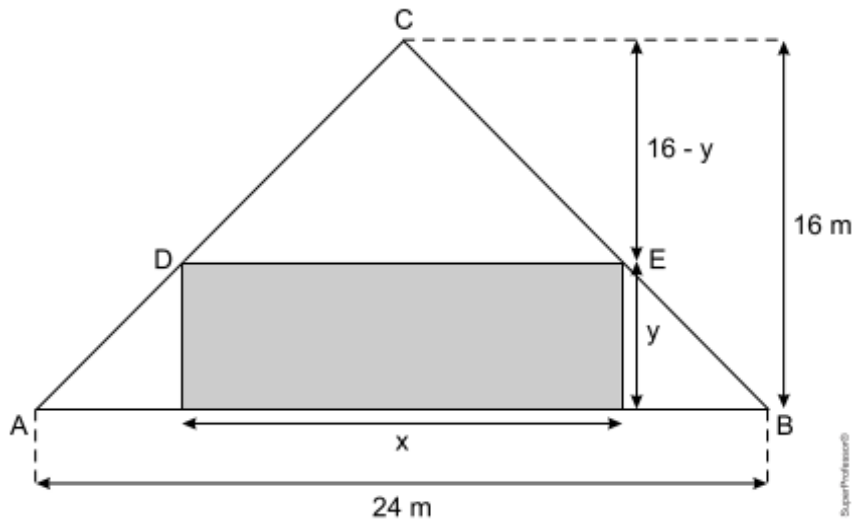
Concluindo:

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{25}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{25}{8}}{\frac{10}{8}} = \frac{25}{10} = 2,5$$

Resposta da questão 5:

[E]

Sendo x e y as dimensões do retângulo, por semelhança entre os triângulos ABC e DEC , temos:



$$\begin{aligned}\frac{x}{24} &= \frac{16-y}{16} \\ 2x &= 48 - 3y \\ y &= -\frac{2}{3}x + 16\end{aligned}$$

A área do depósito é dada por:

$$A = xy = -\frac{2}{3}x^2 + 16x$$

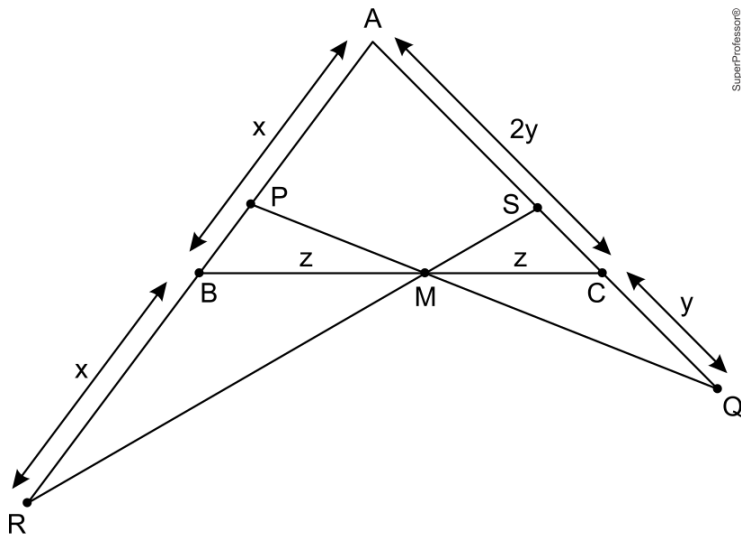
Logo, a sua área máxima vale:

$$\begin{aligned}A_{\text{máx}} &= y_v = -\frac{\Delta}{4a} \\ A_{\text{máx}} &= -\frac{16^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0}{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{256}{\frac{8}{3}} \\ \therefore A_{\text{máx}} &= 96m^2\end{aligned}$$

Resposta da questão 6:

[C]

Do enunciado, temos a figura:



Aplicando o teorema de Menelaus, obtemos:

$$\frac{RB}{AR} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{x} \cdot \frac{z}{z} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \Rightarrow \frac{SC}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow SA = 2SC$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{z}{z} \cdot \frac{y}{3y} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PB} = 3 \Rightarrow PA = 3PB$$

Das áreas, chegamos a:

$$A_{ABC} = 24 \Rightarrow A_{ABM} = A_{ACM} = 12$$

$$A_{APM} = \frac{3A_{ACM}}{4} = 9$$

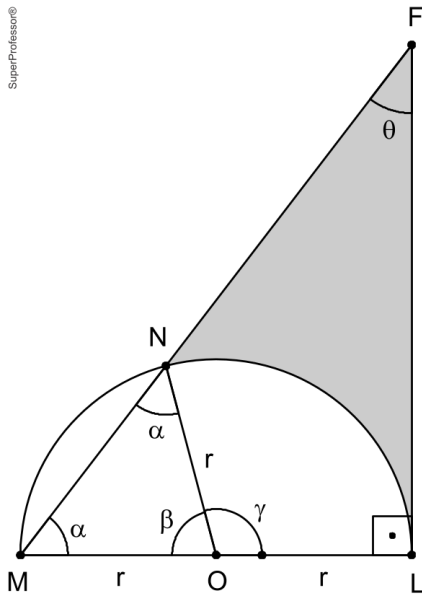
$$A_{ASM} = \frac{2A_{ACM}}{3} = 8$$

$$\therefore A_{APMS} = A_{APM} + A_{ASM} = 17$$

Resposta da questão 7:

[E]

Da figura abaixo, temos que:



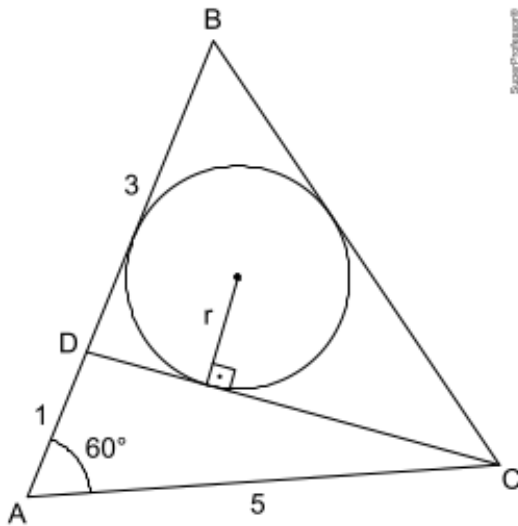
$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{FL}{FM} = \frac{FL}{2FL} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \\ \alpha + 60^\circ + 90^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \\ 2 \cdot 30^\circ + \beta &= 180^\circ \Rightarrow \beta = 120^\circ \\ \gamma + 120^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{2r}{FL} \Rightarrow FL = \frac{2\sqrt{3}r}{3}\end{aligned}$$

Logo, a área buscada é dada por:

$$\begin{aligned}A &= A_{FML} - A_{OMN} - A_{Setor} \\ A &= \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{2\sqrt{3}r}{3} - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \operatorname{sen} 120^\circ - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 \\ A &= \frac{2\sqrt{3}r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{6} \\ A &= \frac{8\sqrt{3}r^2}{12} - \frac{3\sqrt{3}r^2}{12} - \frac{2\pi r^2}{12} \\ \therefore A &= \left(\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{12} \right) \cdot r^2\end{aligned}$$

Resposta da questão 8:

Como os triângulos BCD e ACD possuem a mesma altura relativa ao vértice C, temos que:



$$\frac{A_{BCD}}{A_{ACD}} = \frac{\frac{\overline{BD} \cdot h}{2}}{\frac{\overline{AD} \cdot h}{2}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{A_{BCD}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \sin 60^\circ} = 3$$

$$\frac{A_{BCD}}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$$

$$A_{BCD} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABC e ADC, obtemos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\overline{BC}^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{21}$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\overline{DC}^2 = 1^2 + 5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{DC} = \sqrt{21}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
A_{BCD} &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD} + \overline{DC} + \overline{BC}) \cdot r \\
\frac{15\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{21} + \sqrt{21}) \cdot r \\
r &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{3 + 2\sqrt{21}} \right) \cdot \left(\frac{3 - 2\sqrt{21}}{3 - 2\sqrt{21}} \right) \\
r &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3 - 2\sqrt{21}}{9 - 84} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{21} - 3}{75} \right) \\
r &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{21} - 3}{5} \right) = \frac{2 \cdot 3\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10} \\
\therefore r &= \frac{6\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10}
\end{aligned}$$

Resposta da questão 9:

[E]

Dados do triângulo:

$AB = 14$, $AC = 12$, $BC = 10$.

O ortocentro H e a circunferência circunscrita w .

Como estamos lidando com alturas e prolongamentos até a circunferência circunscrita, sabemos que esses prolongamentos formam simetrias importantes no triângulo.

Usamos a fórmula de Heron para calcular a área:

Semiperímetro:

$$s = \frac{14 + 12 + 10}{2} = 18$$

Área:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
A &= \sqrt{18(18-14)(18-12)(18-10)} \\
A &= \sqrt{18 \times 4 \times 6 \times 8} \\
A &= \sqrt{3456} \\
A &= 24\sqrt{6}
\end{aligned}$$

A área do hexágono é o dobro da área do triângulo ABC , pois se trata de uma construção geométrica com simetria da circunferência circunscrita:

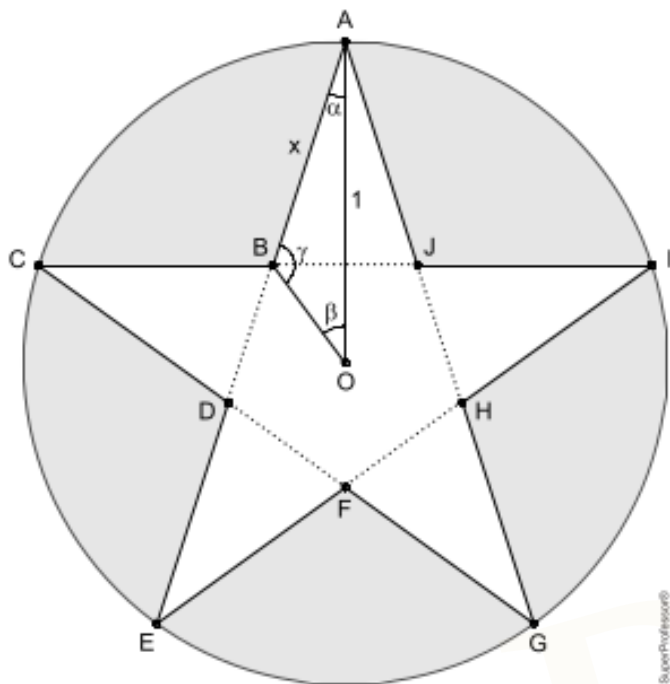
$$2 \times 24\sqrt{6} = 48\sqrt{6}$$

A alternativa correta: letra [E].

Resposta da questão 10:

[A]

Temos os seguintes ângulos na figura abaixo:



$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 18^\circ$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 18^\circ - 36^\circ = 126^\circ$$

Aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\operatorname{sen} \beta} &= \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma} \\ \frac{x}{\operatorname{sen} 36^\circ} &= \frac{1}{\operatorname{sen} 126^\circ} \\ x &= \frac{\operatorname{sen} 36^\circ}{\operatorname{sen} 126^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \operatorname{tg} 36^\circ \end{aligned}$$

Área do triângulo ABO:

$$A_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$A_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{sen} 18^\circ$$

$$A_{ABO} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$$

Logo, a área pedida vale:

$$A = 10A_{ABO}$$

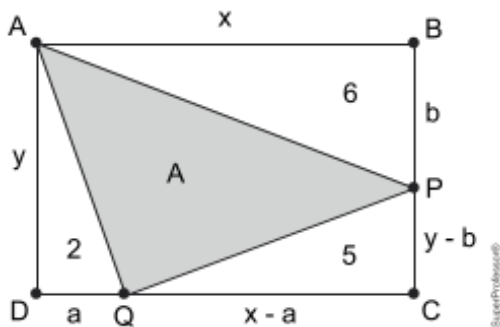
$$A = 10 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$$

$$\therefore A = 5 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$$

Resposta da questão 11:

[E]

Da figura abaixo, temos:



$$xy = 2 + 5 + 6 + A \Rightarrow xy = A + 13$$

$$\frac{ya}{2} = 2 \Rightarrow a = \frac{4}{y}$$

$$\frac{xb}{2} = 6 \Rightarrow b = \frac{12}{x}$$

$$\frac{(x-a)(y-b)}{2} = 5 \Rightarrow xy - xb - ay + ab = 10 \Rightarrow xy - x \cdot \frac{12}{x} - \frac{4}{y} \cdot y + \frac{4}{y} \cdot \frac{12}{x} = 10$$

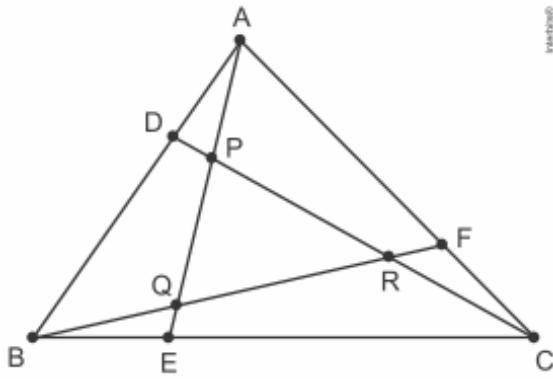
$$\Rightarrow xy - 12 - 4 + \frac{48}{xy} = 10 \Rightarrow A + 13 - 16 + \frac{48}{A + 13} = 10 \Rightarrow A + \frac{48}{A + 13} = 13$$

$$\Rightarrow A^2 + 13A + 48 = 13A + 169 \Rightarrow A^2 = 121$$

$$\therefore A = 11 \text{ cm}^2$$

Resposta da questão 12:

Do enunciado, temos:



Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo AEC:

$$AQ \cdot BE \cdot CF = AF \cdot BC \cdot QEAQ \cdot BE \cdot CF = 3CF \cdot 4BE \cdot QEAQ = 12QE$$

Logo:

$$\begin{aligned} BC &= 4BE \\ [ABE] &= 13[BQE] \\ [ABC] &= 4 \cdot 13[BQE] \\ [ABC] &= 52[BQE] \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo BFA :

$$AD \cdot BR \cdot CF = AC \cdot BD \cdot RFAD \cdot BR \cdot CF = 4CF \cdot 3AD \cdot RFBR = 12RF$$

Logo:

$$\begin{aligned} AC &= 4CF \\ [BFC] &= 13[BQE] \\ [RFC] &= [BQE] \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo CBD:

$$AD \cdot BE \cdot CP = AB \cdot CE \cdot DPAD \cdot BE \cdot CP = 4AD \cdot 3BE \cdot DPCP = 12DP$$

Logo:

$$\begin{aligned} AB &= 4AD \\ [CDA] &= 13[BQE] \\ [DPA] &= [BQE] \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
 [PQR] &= [ABC] - [ABE] - [BFC] - [CDA] + [DPA] + [RFC] + [BQE] \\
 [PQR] &= 52[BQE] - 13[BQE] - 13[BQE] - 13[BQE] + [BQE] + [BQE] + [BQE] \\
 [PQR] &= 16[BQE]
 \end{aligned}$$

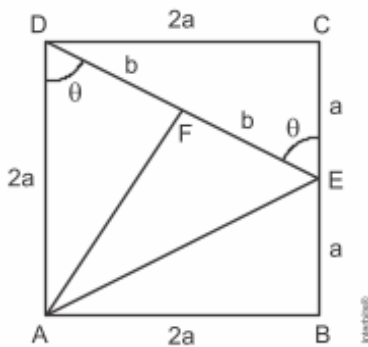
Portanto:

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{16[BQE]}{52[BQE]} = \frac{4}{13}$$

Resposta da questão 13:

[D]

Observe a figura:



Temos que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta &= \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} \\
 A_{AEF} &= A_{AED} - A_{AFD} \\
 A_{AEF} &= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \theta \\
 A_{AEF} &= 2a^2 - a \cdot b \cdot \frac{a}{b} \\
 A_{AEF} &= 2a^2 - a^2 \\
 A_{AEF} &= a^2
 \end{aligned}$$

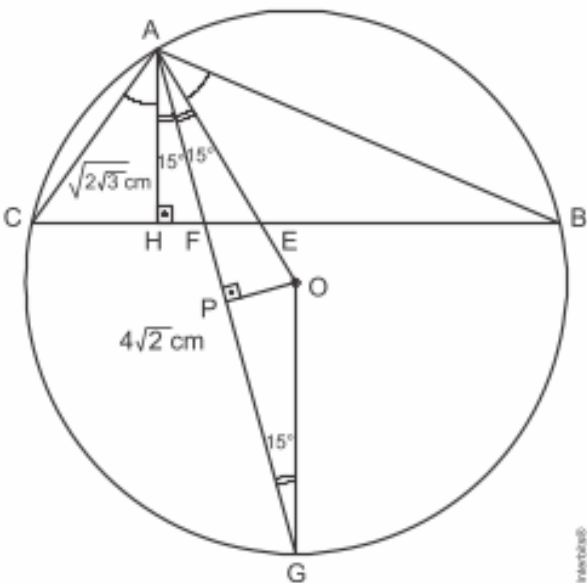
Logo:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_{ABCD}}{A_{AEF}} &= \frac{(2a)^2}{a^2} \\
 \therefore \frac{A_{ABCD}}{A_{AEF}} &= 4
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 14:

[E]

Da figura abaixo, temos:



Área do triângulo AFE:

$$\begin{aligned}
 A_{AFE} &= A_{AHE} - A_{AHF} \\
 A_{AFE} &= \frac{\overline{AH} \cdot \overline{HE}}{2} - \frac{\overline{AH} \cdot \overline{HF}}{2} \\
 A_{AFE} &= \frac{\sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2\sqrt{3}} \operatorname{tg} 30^\circ}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2\sqrt{3}} \operatorname{tg} 15^\circ}{2} \\
 A_{AFE} &= \frac{(\sqrt{2\sqrt{3}})^2}{2} (\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ) \\
 A_{AFE} &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - (2 - \sqrt{3}) \right] \\
 A_{AFE} &= 4 - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Valor da altura $\overline{OP}$:

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \frac{\overline{AG}}{2} \operatorname{tg} 15^\circ \\
 \overline{OP} &= \frac{4\sqrt{2}}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \\
 \overline{OP} &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

Área do triângulo AOG:

$$A_{AOG} = \frac{\overline{AG} \cdot \overline{OP}}{2}$$

$$A_{AOG} = \frac{4\sqrt{2} \cdot (4\sqrt{2} - 2\sqrt{6})}{2}$$

$$A_{AOG} = 16 - 8\sqrt{3}$$

Logo, a área procurada vale:

$$A_{FEOG} = A_{AOG} - A_{AFE}$$

$$A_{FEOG} = 16 - 8\sqrt{3} - (4 - 2\sqrt{3})$$

$$\therefore A_{FEOG} = 6(2 - \sqrt{3})\text{cm}^2$$

Resposta da questão 15:

[B]

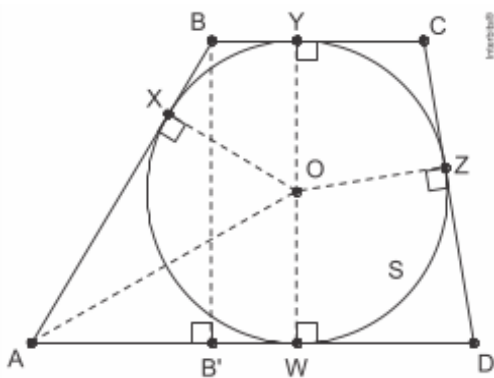
Sabendo que a altura de todo trapézio retângulo de diagonais perpendiculares é dada pela média geométrica das bases, temos $h = \sqrt{2 \cdot 18} = 6\text{cm}$

Portanto, segue que a resposta é igual a

$$(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (2 + 18) \cdot 6 = 60\text{cm}^2.$$

Resposta da questão 16:

Considere a figura.



a) Sendo $\overline{YW} = \overline{BB'} = 10$, do triângulo ABB' , vem

$$\text{sen}BAW = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{10}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{50}{3}.$$

b) Se $\text{sen}BAW = \frac{3}{5}$, então

$$\begin{aligned}\cos^2 BAW &= 1 - \text{sen}^2 BAW \Rightarrow \cos BAW = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \\ &\Rightarrow \cos BAW = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Logo, do triângulo ABB' , encontramos

$$\begin{aligned}\cos BAW &= \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\overline{AB'}}{\frac{50}{3}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AB'} = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos $\overline{BX} = \overline{BY} = m$ e $\overline{AW} = \overline{AX}$. Ademais, como $BYWB'$ é retângulo, vem $\overline{B'W} = m$. Em consequência, podemos escrever

$$\overline{AX} = \overline{AB} - \overline{BX} \Leftrightarrow \overline{AX} = \frac{50}{3} - m$$

e

$$\overline{AW} = \overline{AB'} + \overline{B'W} \Leftrightarrow \overline{AW} = \frac{40}{3} + m.$$

Donde obtemos

$$\frac{40}{3} + m = \frac{50}{3} - m \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}.$$

Por conseguinte, vem

$$\overline{AW} = \overline{AX} = \frac{40}{3} + \frac{5}{3} = 15.$$

c) Como $ABCD$ é circunscritível, pelo Teorema de Pitot, temos

$$\begin{aligned}\overline{BC} + \overline{AD} &= \overline{AB} + \overline{CD} \\ &= \frac{50}{3} + 15 \\ &= \frac{95}{3}.\end{aligned}$$

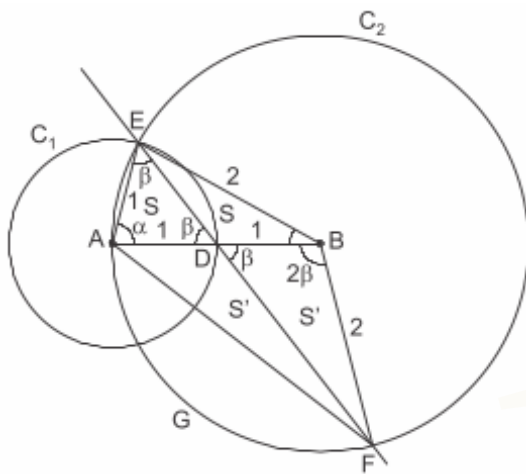
Portanto, segue que a resposta é

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{YW} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{3} \cdot 10 \\ &= \frac{475}{3}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 17:

[C]

Do enunciado, segue a seguinte figura:



Como D é ponto médio de AB, os triângulos AED e BED são equivalentes. O mesmo vale para os triângulos ADF e BDF.

Logo, os triângulos AEF é equivalente ao triângulo BEF .

Daí,

$$\begin{aligned} S_{EBD} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \text{sen}(\pi - 2\alpha) \\ S_{EBD} &= \text{sen}(2\alpha) \\ S_{EBD} &= 2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha \end{aligned}$$

Note que $\widehat{AEF}$ é um ângulo inscrito de medida igual a β , logo, a medida do arco AGF é 2β . Assim, $\widehat{ABF} = 2\beta$.

Daí,

$$S_{DBF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \text{sen}(2\beta)$$

$$S_{DBF} = \text{sen}(2\beta)$$

$$S_{DBF} = \text{sen}(\pi - \alpha)$$

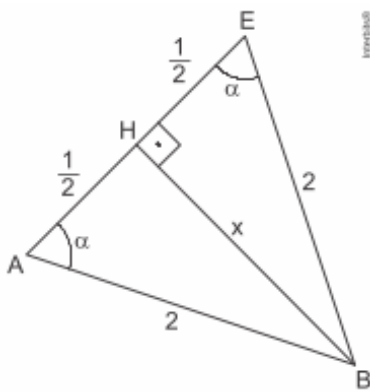
$$S_{DBF} = \text{sen}\alpha$$

Então,

$$S_{BEF} = 2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha + \text{sen}\alpha$$

$$S_{BEF} = \text{sen}\alpha \cdot (2\text{cos}\alpha + 1)$$

Note que:



No triângulo AHB ,

$$2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{15}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Daí,

$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{1}{4}$$

Portanto,

$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \right)$$

$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

$$S_{BEF} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

Como os triângulos AEB e BEF são equivalentes,

$$S_{AEF} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

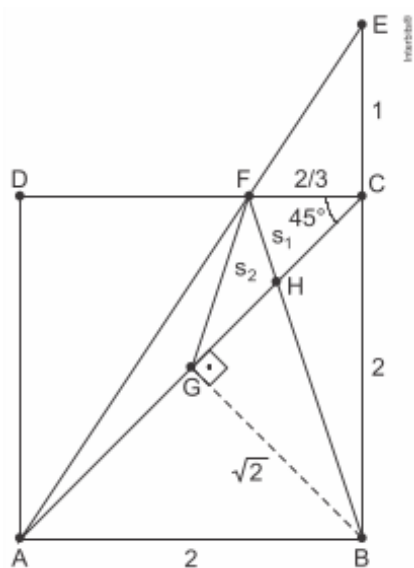
Resposta da questão 18:

[D]

Por semelhança entre os triângulos EFC e EAB, obtemos:

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EB}} \Rightarrow \frac{\overline{FC}}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{FC} = \frac{2}{3} u. c.$$

Pelas áreas, obtemos:



$$A_{BFC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{FC}}{2} = \frac{2 \cdot 2/3}{2} \Rightarrow A_{BFC} = \frac{2}{3} \text{ u.a.}$$

$$A_{BHC} = \frac{\overline{HC} \cdot \overline{BG}}{2} = \frac{\overline{HC} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_{BHC} = \frac{\overline{HC}\sqrt{2}}{2} \text{ u.a.}$$

$$A_{HFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FC} \cdot \overline{HC} \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overline{HC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{\overline{HC}\sqrt{2}}{6} \text{ u.a.}$$

$$A_{BHC} + s_1 = A_{BFC} \Rightarrow \frac{\overline{HC}\sqrt{2}}{2} + \frac{\overline{HC}\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{HC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u.c.}$$

Logo:

$$\overline{GH} = \overline{GC} - \overline{HC} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u.c.}$$

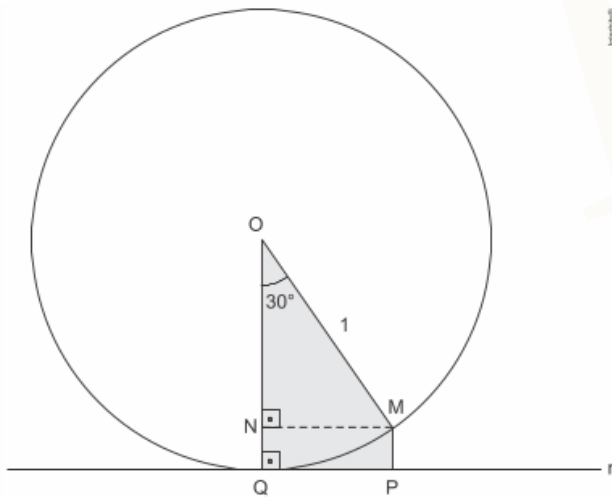
$$\therefore \overline{GH} = \overline{HC}$$

Como os triângulos GFH e HFC possuem a mesma base e mesma altura relativa a reta que passa por $\overline{AC}$, eles devem possuir a mesma área. Ou seja:

$$\frac{s_1}{s_2} = 1$$

Resposta da questão 19:

[A]



$$\sin 30^\circ = \frac{MN}{1} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} \Rightarrow NQ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{ON}{1} \Rightarrow ON = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MP = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área do trapézio OMPQ será dada por:

$$A = \frac{\left(1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Resposta da questão 20:

[A]

Sejam h_1 e h_2 as alturas do paralelogramo referentes aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Temos que:

$$\begin{cases} A_{ABN} = \frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} = \frac{A_{ABCD}}{2} \\ A_{ADM} = \frac{\overline{AD} \cdot h_2}{2} = \frac{A_{ABCD}}{2} \end{cases} \therefore A_{ABN} = A_{ADM}$$

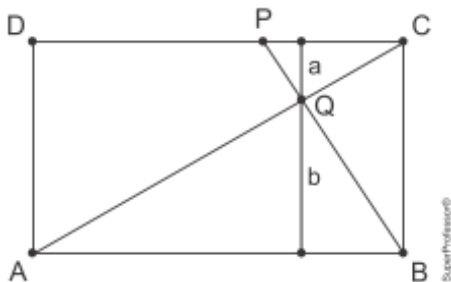
Logo:

$$\begin{aligned} a + b + x &= c + b + d \\ \therefore x &= c + d - a \end{aligned}$$

Resposta da questão 21:

[A]

Da figura abaixo, obtemos:



No ΔQCP :

$$\frac{\overline{PC} \cdot a}{2} = 2 \Rightarrow \overline{PC} = \frac{4}{a}$$

No ΔBCP :

$$\frac{\overline{PC} \cdot (a + b)}{2} = 8 \Rightarrow \overline{PC} = \frac{16}{a + b}$$

Logo:

$$\frac{4}{a} = \frac{16}{a+b} \Rightarrow 16a = 4a + 4b \Rightarrow b = 3a$$

Por semelhança entre ΔQCP e ΔQAB :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{AB} = 3\overline{PC}$$

Também temos que:

$$\overline{BC} = a + b = \frac{16}{\overline{PC}}$$

Sendo assim, a área do retângulo ABCD é igual a:

$$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 3\overline{PC} \cdot \frac{16}{\overline{PC}}$$

$$\therefore A_{ABCD} = 48 \text{ u.a.}$$

Resposta da questão 22:

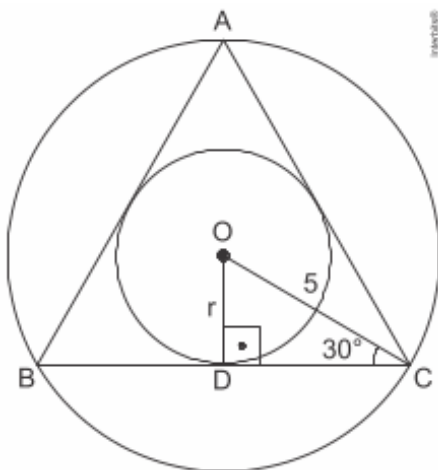
[B]

O raio da circunferência de comprimento igual a $10\pi \text{ cm}$ é R, então,

$$2\pi R = 10\pi$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

Assim, temos:



No triângulo ODC,

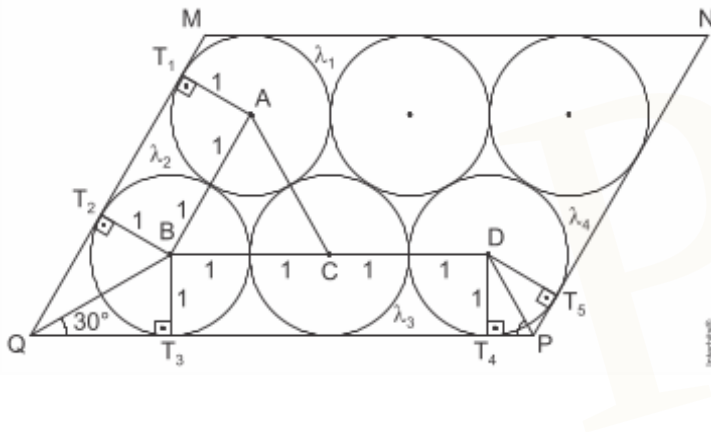
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{r}{5} \\ \frac{1}{2} &= \frac{r}{5} \\ r &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Portanto, a área pedida S é tal que:

$$\begin{aligned}S &= \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ S &= \frac{25\pi}{4}\end{aligned}$$

Resposta da questão 23:

[E]



Na figura, temos:

$$\begin{aligned}\lambda_1(A, 1) \\ \lambda_2(B, 1) \\ \lambda_3(C, 1) \\ \lambda_4(D, 1)\end{aligned}$$

ABC é um triângulo equilátero, pois $AB = AC = BC = 2$.

T_1 é ponto de tangência entre λ_1 e $\overline{MQ}$, logo, $\overline{AT_1} \perp \overline{MQ}$

T_2 é ponto de tangência entre λ_2 e $\overline{MQ}$, logo, $\overline{BT_2} \perp \overline{MQ}$

T_3 é ponto de tangência entre λ_2 e $\overline{QP}$, logo, $\overline{BT_3} \perp \overline{QP}$

T_4 é ponto de tangência entre λ_4 e $\overline{QP}$, logo, $\overline{DT_4} \perp \overline{QP}$

T_5 é ponto de tangência entre λ_4 e $\overline{NP}$, logo, $\overline{DT_5} \perp \overline{NP}$

Como $AT_1T_2 = BT_2T_1 = 90^\circ$, $\overline{AT_1} // \overline{BT_2}$.

Como $\overline{AT_1} // \overline{BT_2}$, $AT_1 = BT_2 = 1$ e $AT_1T_2 = BT_2T_1 = 90^\circ$, AT_1T_2B é um retângulo, logo, $\overline{AB} // \overline{MQ}$.

Analogamente, $\overline{BD} // \overline{QP}$, portanto, $\widehat{MQP} = 60^\circ$,

Os triângulos QBT_3 e QBT_2 são congruentes, pelo caso LAL, logo, $B\hat{Q}_3 = B\hat{Q}_2T_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

No triângulo BQT_3 ,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{QT_3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{QT_3}$$

$$QT_3 = \sqrt{3}$$

Os triângulos PDT_4 e PDT_5 são congruentes, pelo caso LAL, logo, $T_4\hat{P}D = T_5\hat{P}D = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

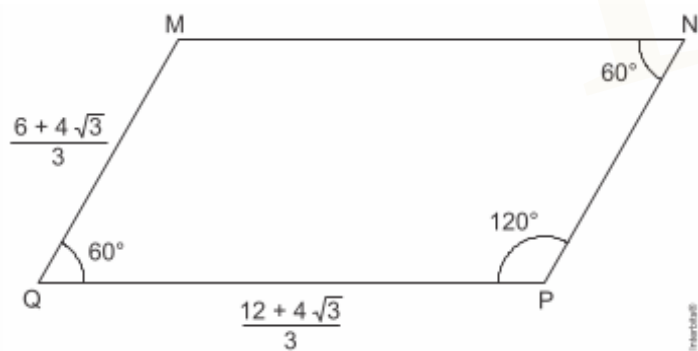
No triângulo PT_4D ,

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{PT_4}$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{PT_4}$$

$$PT_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, temos:



Portanto,

$$x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{36 + 20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

Resposta da questão 24:

[B]

A diagonal do quadrilátero o divide em dois triângulos retângulos. Sendo $2 \sin x$ e $2 \cos x$ os catetos do primeiro e $2 \cos x$ e $2 \cos y$ os catetos do segundo, podemos concluir que o resultado é

$$\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cdot 2 \cos x - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin y \cdot 2 \cos y = \pi - \sin 2x - \sin 2y.$$

Resposta da questão 25:

[B]

Por semelhança entre lados e áreas, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}\right)^2 &= \frac{A_{DEC}}{A_{ABC}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{A_{DEC}}{48} \Rightarrow A_{DEC} = 12 \text{ cm}^2 \\ \left(\frac{\overline{BH}}{\overline{BA}}\right)^2 &= \frac{A_{HBI}}{A_{ABC}} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{A_{HBI}}{48} \Rightarrow A_{HBI} = 3 \text{ cm}^2 \\ \left(\frac{\overline{EI}}{\overline{IB}}\right)^2 &= \frac{A_{GIE}}{A_{HBI}} \Rightarrow 1^2 = \frac{A_{GIE}}{3} \Rightarrow A_{GIE} = 3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

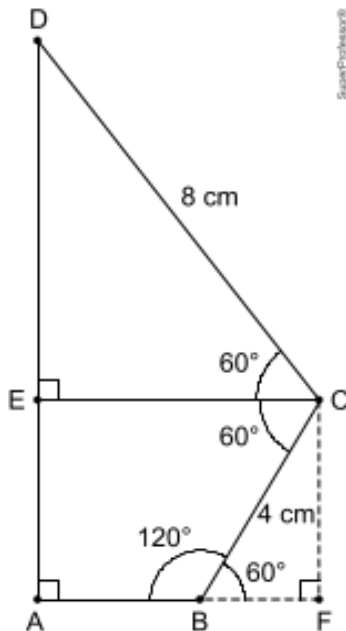
Logo, a área da região destacada vale:

$$\begin{aligned} A &= 12 + 3 + 3 \\ \therefore A &= 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Resposta da questão 26:

[A]

Traçando o segmento $\overline{EC}$ paralelo a $\overline{AB}$, ficamos com a figura abaixo:



No triângulo CDE:

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{DE}}{8} \Rightarrow \overline{DE} = 4\sqrt{3}cm \\ \cos 60^\circ &= \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{CE}}{8} \Rightarrow \overline{CE} = 4cm\end{aligned}$$

No triângulo BCF:

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{CF}}{4} \Rightarrow \overline{CF} = 2\sqrt{3}cm \\ \cos 60^\circ &= \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{BF}}{4} \Rightarrow \overline{BF} = 2cm\end{aligned}$$

No trapézio ABCE, sabemos que:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{CE} - \overline{BF} = 4 - 2 \Rightarrow \overline{AB} = 2cm \\ \overline{AE} &= \overline{CF} = 2\sqrt{3}cm\end{aligned}$$

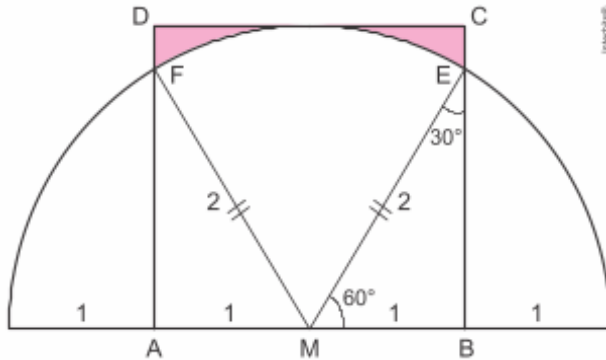
Logo, a área do quadrilátero ABCD é igual a:

$$\begin{aligned}A_{ABCD} &= A_{CDE} + A_{ABCE} \\ A_{ABCD} &= \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} + \frac{(2 + 4) \cdot 2\sqrt{3}}{2} \\ A_{ABCD} &= 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ \therefore A_{ABCD} &= 14\sqrt{3}cm^2\end{aligned}$$

Resposta da questão 27:

[B]

De acordo com as informações do enunciado, temos:



$$S_{rosa} = S_{ABCD} - (2S_{MBE} + S_{FEM})$$

$$S_{rosa} = 2^2 - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \right)$$

Sendo, $\pi \approx 3$

$$S_{rosa} = 4 - (\sqrt{3} + 2) \rightarrow S_{rosa} = 2 - \sqrt{3}$$

Resposta da questão 28:

[A]

$$\frac{a}{\text{sen} \alpha} = 2R \rightarrow \frac{2^4 \sqrt{3}}{\text{sen} 15^\circ} = 2R \rightarrow \frac{2^4 \sqrt{3}}{\text{sen}(45^\circ - 30^\circ)} = 2R$$

$$2^4 \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2R \rightarrow R = {}^4\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

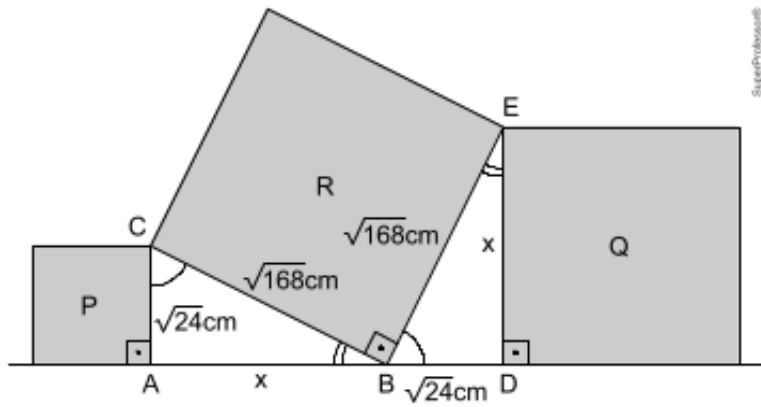
$$\left. \begin{array}{l} \text{Apótema triângulo equilátero inscrito} \rightarrow \frac{R}{2} \\ \text{Apótema hexágono regular inscrito} \rightarrow \frac{R\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \text{Produto} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{[{}^4\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})]^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} + 2)$$

Resposta da questão 29:

[D]

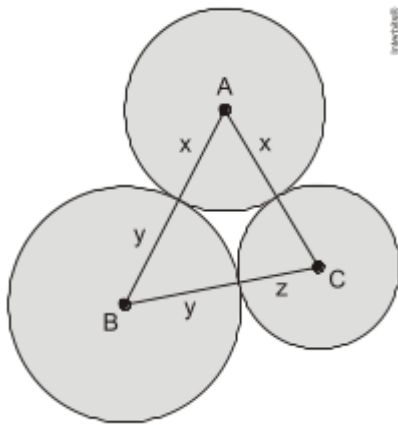
Os triângulos ABC e DEB são congruentes pelo caso ALA. Sendo assim, a área do quadrado Q vale:



$$\begin{aligned}\sqrt{168}^2 &= \sqrt{24}^2 + x^2 \\ x^2 &= 144 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Resposta da questão 30:

[D]



Admitindo x , y e z os raios das circunferências de centros A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$x = 3/2, y = 11/2 \text{ e } z = 5/2.$$

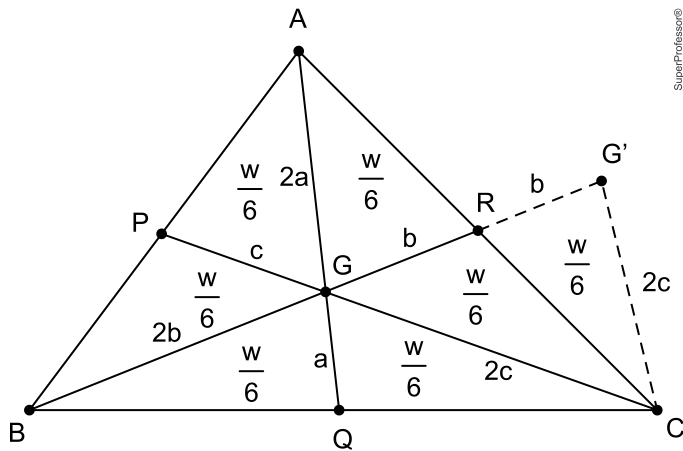
Calculando, agora, a soma das áreas de todos os círculos, temos:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{195\pi}{4} \text{ km}^2.$$

Resposta da questão 31:

[E]

No triângulo abaixo, sabemos que:



$$A_{GCG'} = 2 \cdot \frac{w}{6} = \frac{w}{3}$$

E a área do triângulo de lados $3a$, $3b$ e $3c$ vale:

$$\frac{A}{\frac{w}{3}} = \left(\frac{3\overline{b}}{2\overline{b}} \right)^2 \Rightarrow A = \frac{w}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3w}{4}$$

Portanto, a razão entre a área de um triângulo T_n e de um triângulo T_{n+1} é $q = \frac{3}{4}$. Sendo assim, a soma procurada vale:

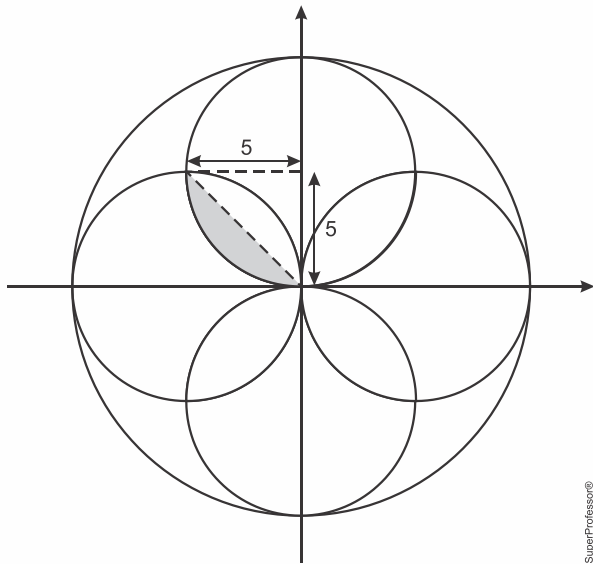
$$S = \frac{w}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{3}{4}} = 12$$

Ou seja, S é um número par.

Resposta da questão 32:

[D]

A área destacada da figura abaixo vale:



SuperProfessor®

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} - \frac{5 \cdot 5}{2}$$

$$A_1 = \frac{25}{4}(\pi - 2) \text{ cm}^2$$

Sendo assim, a área procurada vale:

$$A = \pi \cdot 10^2 - 4 \cdot \pi \cdot 5^2 + 16 \cdot \frac{25}{4}(\pi - 2)$$

$$A = 100\pi - 100\pi + 100\pi - 200$$

$$\therefore A = 100(\pi - 2) \text{ cm}^2$$

Resposta da questão 33:

[A]

É imediato que a área do triângulo ABO corresponde a $\frac{\ell^2}{4}$. Além disso, sendo PQ uma base média do triângulo ABO , temos $(PQO) = \frac{1}{4}(ABO) = \frac{\ell^2}{16}$. Portanto, segue que a área do trapézio isósceles $ABQP$ é igual a

$$(ABQP) = (ABO) - (PQO)$$

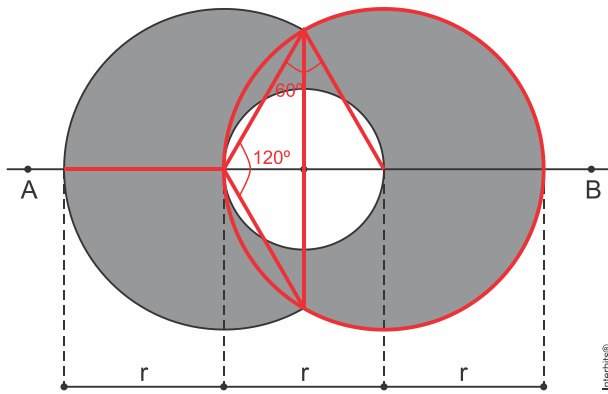
$$= \frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{16}$$

$$= \frac{3\ell^2}{16} \text{ u.a.}$$

Resposta da questão 34:

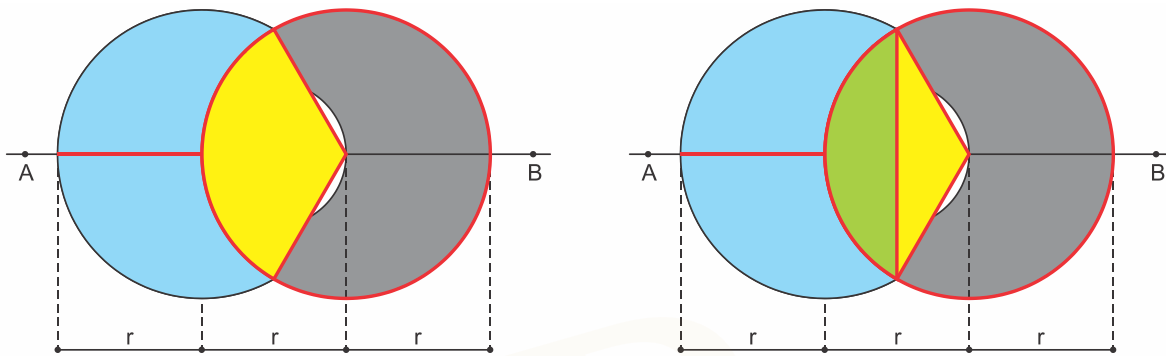
[D]

A área hachurada será igual a área de uma circunferência maior (raio r), somada à área da “lua” remanescente da outra circunferência maior (raio r), subtraindo-se a área da circunferência menor (raio $\frac{r}{2}$). Pode-se deduzir graficamente:



Deduz-se, portanto, que área de uma circunferência maior é igual a πr^2 .

Para calcular a área da “lua” remanescente da outra circunferência de raio r (área hachurada em azul nas figuras a seguir) é preciso subtrair o equivalente a duas áreas verdes (ver figuras a seguir). Para calcular a área verde, é preciso calcular a área do setor circular de 120° menos a área de um triângulo equilátero de lado r .



Assim, pode-se escrever que a área total hachurada em cinza é igual a:

$$\left\{ \pi r^2 + \left[\pi r^2 - 2 \cdot \left(\frac{\pi r^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right) \right] \right\} - \pi \frac{r^2}{4}$$

$$\pi r^2 - \pi \frac{r^2}{4} + \left[\pi r^2 - 2 \cdot \left(\frac{4\pi r^2 - 3r^2 \sqrt{3}}{12} \right) \right] = \frac{3\pi r^2}{4} + \left[\pi r^2 - \left(\frac{8\pi r^2 - 6r^2 \sqrt{3}}{12} \right) \right]$$

$$\frac{3\pi r^2}{4} + \left[\frac{12\pi r^2 - 8\pi r^2 + 6r^2 \sqrt{3}}{12} \right] = \frac{3\pi r^2}{4} + \frac{4\pi r^2 + 6r^2 \sqrt{3}}{12}$$

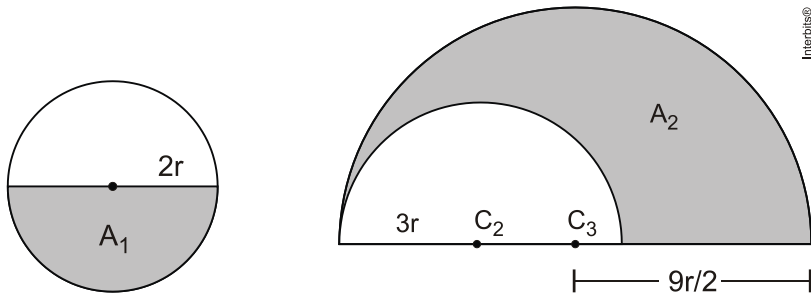
$$\frac{9\pi r^2 + 4\pi r^2 + 6r^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{13\pi r^2 + 6r^2 \sqrt{3}}{12} = \left(\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} \right) \cdot r^2$$

Resposta da questão 35:

[C]

A razão da P.G. formada pelos raios será dada por $\frac{3r}{2r} = \frac{3}{2}$, portanto o raio da terceira circunferência será $\frac{9r}{2}$.

Calculando agora as áreas assinaladas A_1 e A_2 : $A = A_1 + A_2$



$$A = \frac{\pi \cdot (2r)^2}{2} + \left(\frac{\pi \cdot \left(\frac{9r}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (3r)^2}{2} \right)$$

$$A = 2\pi \cdot r^2 + \frac{45\pi}{8} = \frac{61\pi}{8}$$

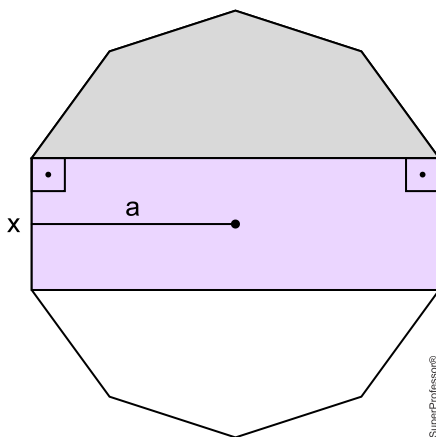
Resposta da questão 36:

[C]

Seja x o lado do decágono e a o seu apótema. Como o perímetro do decágono é igual a $10x$, utilizando a fórmula dada, obtemos:

$$100 = \frac{10x \cdot a}{2} \Rightarrow xa = 20$$

Mas, a área do decágono também é dada por:



$$A_{\text{decágono}} = 2A_{\text{pentágono}} + A_{\text{retângulo}}$$

$$100 = 2A_{\text{pentágono}} + x \cdot 2a$$

$$100 = 2A_{\text{pentágono}} + 2 \cdot 20$$

$$2A_{\text{pentágono}} = 60$$

$$\therefore A_{\text{pentágono}} = 30 \text{ cm}^2$$

