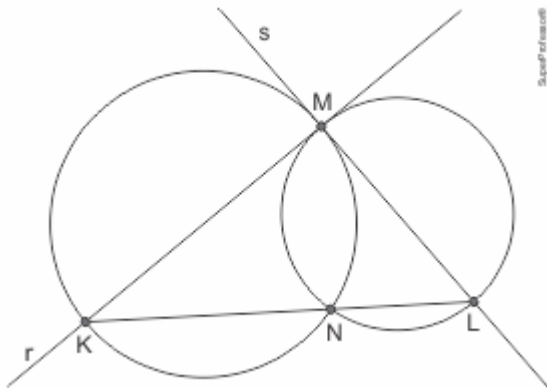


CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

1. (Epcar (Afa)) Observe a figura abaixo.



Na figura fora de escala tem-se duas circunferências secantes nos pontos M e N, as retas **r** e **s** tangentes às circunferências menor e maior, respectivamente,  $r \cap s = M$  com e os pontos K, N e L alinhados.

Os segmentos  $KN$ ,  $LN$  e  $MN$  medem, em cm, respectivamente,  $x + 5$ ,  $x$  e  $2x$ .

Analise as afirmativas a seguir, para as medidas dos segmentos em cm.

$$\text{I. } \frac{KM}{LM} = 2$$

$$\text{II. } \frac{KN}{NL} = 4$$

### III. $\Delta KML \sim \Delta MNL$

É correto afirmar que

- a) nenhuma afirmativa é verdadeira.  
b) apenas uma afirmativa é verdadeira.  
c) apenas duas afirmativas são verdadeiras.  
d) todas as afirmativas são verdadeiras.

2. (Efomm) Seja  $T$  o triângulo  $ABC$  com lados de tamanho 10, 5 e  $5\sqrt{3}$ , com a relação entre seus ângulos  $\hat{B}\hat{A}\hat{C} > \hat{B}\hat{C}\hat{A} > \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ . Dada a circunferência  $C$  inscrita no triângulo  $ABC$ , interceptando-o nos pontos  $P \in \overline{BC}$ ,  $Q \in AC$  e  $R \in \overline{AB}$ .

Qual é o perímetro do quadrilátero convexo PBRQ?

- a)  $\frac{5}{2}(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$   
b)  $\frac{5}{3}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})$   
c)  $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})$   
d)  $\frac{5}{2}(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

e)  $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$

3. (Epcar (Afa)) Considere um triângulo retângulo cujo perímetro mede 15 unidades de comprimento e que seus lados estão em uma progressão aritmética crescente. A partir desse triângulo, podemos inscrever uma circunferência de raio  $r$ , bem como circunscrever outra circunferência de raio  $R$ . Então, a razão entre o raio da circunferência circunscrita e o raio da circunferência inscrita, nessa ordem, pertence ao intervalo:

- a)  $[1, 2[$
- b)  $[2, 3[$
- c)  $[3, 4[$
- d)  $[4, 5]$

4. (Ime) São dados os pontos A e B sobre uma circunferência de raio  $r$ , de forma que a corda  $AB$  mede  $r$ . Escolhe-se ao acaso um ponto C sobre o maior arco  $\widehat{AB}$ .

A probabilidade da área do triângulo ABC ser maior que  $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$  é

- a)  $\frac{1}{5}$
- b)  $\frac{2}{5}$
- c)  $\frac{1}{2}$
- d)  $\frac{3}{5}$
- e)  $\frac{4}{5}$

5. (Ime) Seja I o incentro do triângulo ABC e L a interseção da semirreta AI

com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, com A e L distintos.

Dado que  $AB + AC = 2\widehat{BC}$ , o valor de  $\frac{BL}{AL}$  é

- a)  $\frac{1}{2}$
- b) 1
- c)  $\frac{3}{2}$
- d) 2

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

e)  $\frac{5}{2}$

6. (Ime) Considere uma barra AB de comprimento L fixada na posição vertical sobre um muro de altura L/2, que está assentado sobre um plano horizontal. Desprezando a altura do observador O, o ângulo máximo AOB enquanto o observador O caminha sobre o plano horizontal é:

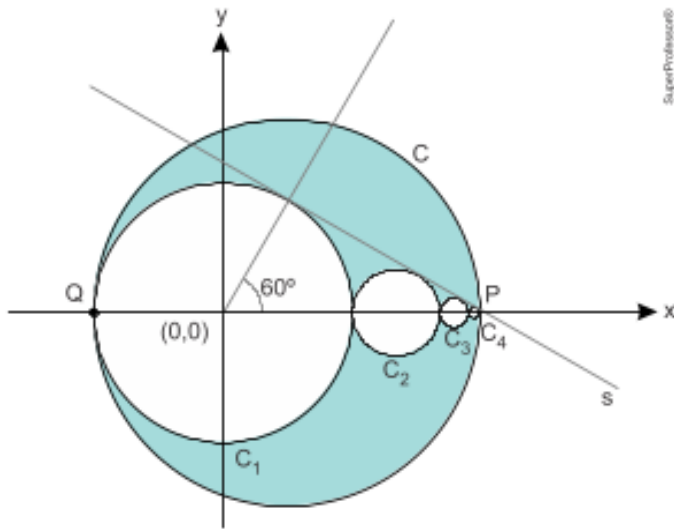
- a) 30°
- b) 60°
- c) 75°
- d) 15°
- e) 45°

7. (Esc. Naval) Um triângulo ABC, reto em  $\hat{B}$ , é tal que a bissetriz de  $\hat{A}$  encontra a altura relativa à hipotenusa  $\overline{BH}$ , no ponto E. Sabe-se que  $\overline{BC}$  e  $BE$  medem 7 cm e 3 cm, respectivamente. Determine a medida do raio do círculo inscrito no triângulo ABC e assinale a opção correta.

- a)  $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$
- b)  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
- c)  $\frac{7-\sqrt{7}}{2}$
- d)  $\frac{11-\sqrt{11}}{2}$
- e)  $\frac{13-\sqrt{13}}{2}$

8. (Fuvest) Considere as circunferências  $C, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  e a reta  $s$  satisfazendo as seguintes propriedades:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



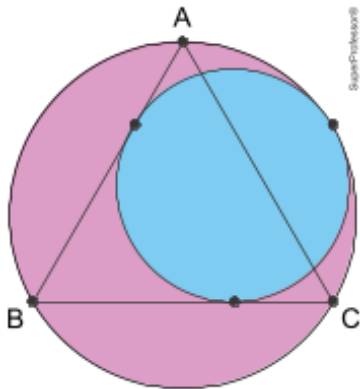
- A circunferência  $C_1$  tem centro  $(0, 0)$  e raio  $r = 4$ . Os centros das demais circunferências pertencem ao eixo  $O_x$ .
- A circunferência  $C_2$  é tangente a  $C_1$  e a  $C_3$ , a circunferência  $C_3$  é tangente a  $C_2$  e a  $C_4$ , e assim por diante.
- A reta  $s$  é tangente a cada circunferência  $C_n$  para  $n \geq 1$ .
- O segmento que liga o centro de  $C_1$  ao ponto em que  $s$  tangencia  $C_1$  forma um ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $O_x$ .
- A circunferência  $C$  é tangente a  $C_1$  no ponto  $Q = (-4, 0)$  e passa pelo ponto  $P = (X_0, 0)$ .

Com base nessas informações,

- determine o raio da circunferência  $C$ .
- dado  $n \geq 1$ , determine a razão entre os raios das circunferências consecutivas  $C_{n+1}$  e  $C_n$ .
- determine a área da região sombreada na figura.

9. (Obmep) Na figura,  $ABC$  é um triângulo equilátero e a circunferência menor é tangente a dois lados do triângulo e ao círculo maior, como indicado. A região rosa é a que está dentro do círculo maior e fora do círculo menor. Qual é a razão entre as áreas destacadas em azul e rosa?

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



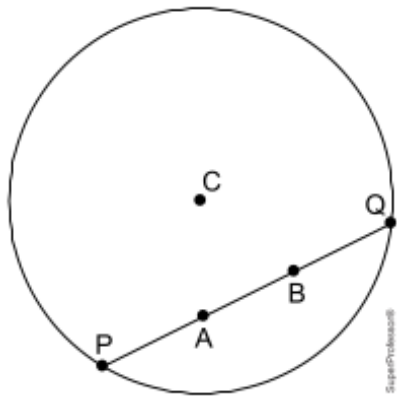
- a)  $4/3$
- b)  $4/5$
- c)  $4/7$
- d)  $2/7$
- e)  $2/9$

10. (Ita) Seja  $T$  um triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com  $m(\widehat{AB}) = 2\sqrt{5}$  e  $m(\widehat{BC}) = 6$ . Sabendo que  $\widehat{ABC}$  é agudo e  $T$  é inscritível em uma circunferência de raio  $R = 5$ , podemos afirmar que:

- a)  $m(\widehat{AC}) = \sqrt{5}/5$
- b)  $m(\widehat{AC}) = 2\sqrt{5}/5$
- c)  $m(\widehat{AC}) = 4\sqrt{5}/5$
- d)  $m(\widehat{AC}) = 8\sqrt{5}/5$
- e)  $m(\widehat{AC}) = 14\sqrt{5}/5$

11. (Fgv) Em um sistema cartesiano ortogonal, considere uma circunferência de centro  $C(1, 3)$  com uma corda  $PQ$  e os pontos  $A(1, -2)$  e  $B(5, 0)$  que dividem essa corda em três segmentos congruentes, conforme mostra a figura.

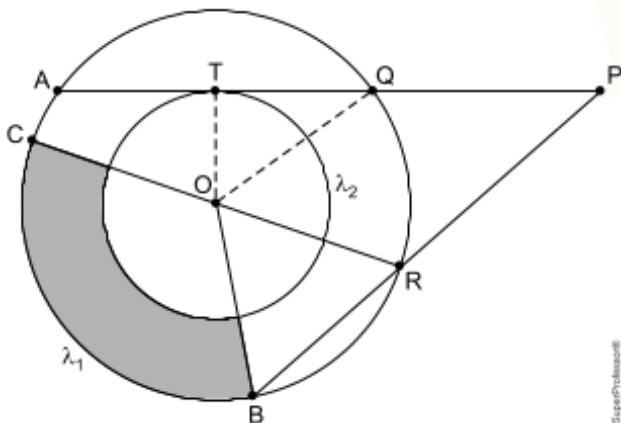
CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



O raio dessa circunferência é

- a)  $\sqrt{119}$
- b)  $\sqrt{65}$
- c)  $\sqrt{30}$
- d)  $\sqrt{42}$
- e)  $\sqrt{105}$

12. (Fgv) No plano, as circunferências  $\lambda_1$ , de raio 5cm, e  $\lambda_2$  têm o mesmo centro O. A e B são pontos de  $\lambda_1$  tais que  $\overline{PA} \cap \lambda_1 = Q$ ,  $\overline{PB} \cap \lambda_1 = R$  e  $\overline{PA}$  tangente a  $\lambda_2$  no ponto T, conforme mostra a figura.



As medidas de  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  são, respectivamente, 14 cm e 12 cm e  $\overline{PR}$  é 1 cm maior que  $\overline{PQ}$ . Sendo  $\overline{CR}$  um diâmetro de  $\lambda_1$  e usando a aproximação  $\pi = 3$ , a área destacada na figura vale

- a)  $16 \text{ cm}^2$ .
- b)  $15 \text{ cm}^2$ .

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

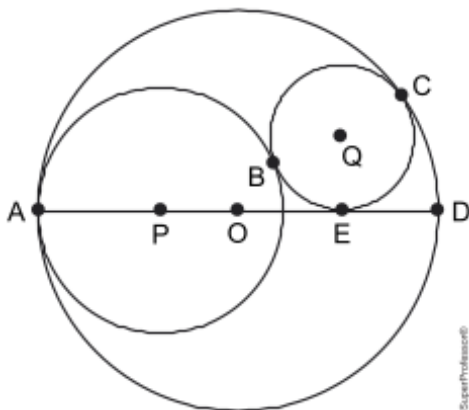
- c)  $14 \text{ cm}^2$  .  
d)  $12 \text{ cm}^2$  .  
e)  $9 \text{ cm}^2$  .

13. (Esc. Naval) Um ângulo agudo de um triângulo retângulo ABC, reto em C, é igual a  $\alpha$ . Sabe-se que a hipotenusa desse triângulo e os prolongamentos de CA e CB são tangentes a uma circunferência de raio R. Desse modo, o comprimento da hipotenusa é igual a:

- a)  $\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$   
b)  $\frac{R\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$   
c)  $\frac{R\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$   
d)  $\frac{R\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$   
e)  $\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$

14. (Obmep) A figura mostra três circunferências de centros O, P e Q, cada uma tangente às outras nos pontos A, B e C, como indicado. O diâmetro AD da circunferência de centro O tangencia a circunferência de centro Q em E. Os raios das circunferências de centro O e de centro P medem, respectivamente, 1 e  $2/3$ .

Qual é o raio da circunferência de centro Q?



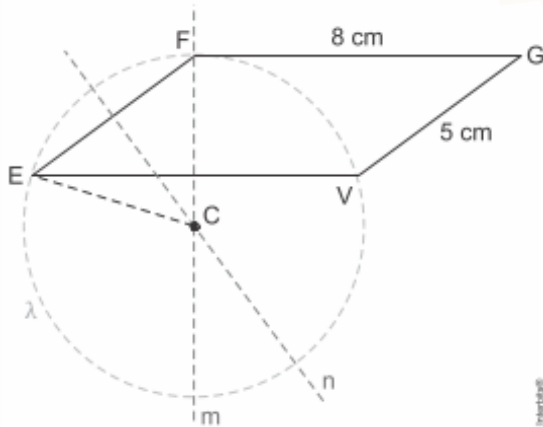
- a)  $1/5$   
b)  $6/25$   
c)  $7/25$   
d)  $8/25$   
e)  $9/25$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

15. (Espcex (Aman)) Para fabricar uma mesa redonda que comporte 8 pessoas em sua volta, um projetista concluiu que essa mesa, para ser confortável, deverá considerar, para cada um dos ocupantes, um arco de circunferência com  $62,8\text{cm}$  de comprimento. O tampo redondo da mesa será obtido a partir de uma placa quadrada de madeira compensada. Adotando  $\pi = 3,14$ , a menor medida do lado dessa placa quadrada que permite obter esse tampo de mesa é

- a)  $72\text{cm}$ .
- b)  $80\text{cm}$ .
- c)  $144\text{cm}$ .
- d)  $160\text{cm}$ .
- e)  $180\text{cm}$ .

16. (Fgv) Os lados do paralelogramo FGVE medem 5 e 8 centímetros. As mediatrizes de  $\overline{VE}$  e  $\overline{EF}$ , indicadas por  $m$  e  $n$ , intersectam-se no ponto C, que é centro da circunferência  $\lambda$  de raio  $CE = CF$ , como mostra a figura.



Sabendo que a mediatriz  $m$  passa pelo vértice F, a área do triângulo FEC é igual a

- a)  $\frac{25}{6}\text{cm}^2$
- b)  $\frac{9}{2}\text{cm}^2$
- c)  $\frac{20}{3}\text{cm}^2$
- d)  $\frac{15}{2}\text{cm}^2$
- e)  $\frac{25}{3}\text{cm}^2$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

17. (Efomm) Sejam a circunferência  $C_1$ , com centro em  $A$  e raio 1, e a circunferência  $C_2$ , que passa por  $A$ , com centro em  $B$  e raio 2. Sabendo-se que  $D$  é o ponto médio do segmento  $AB$ ,  $E$  é um dos pontos de interseção entre  $C_1$  e  $C_2$ , e  $F$  é a interseção da reta  $ED$  com a circunferência  $C_2$ , o valor da área do triângulo  $AEF$ , em unidades de área é

- a)  $2 + \frac{\sqrt{15}}{8}$
- b)  $1 + \frac{\sqrt{15}}{4}$
- c)  $\frac{3\sqrt{15}}{8}$
- d)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- e)  $\frac{5\sqrt{15}}{8}$

18. (Efomm) Seja  $ABC$  um triângulo inscrito em uma circunferência de centro  $O$ . Sejam  $O'$  e  $E$  o incentro do triângulo  $ABC$  e o ponto médio do arco  $BC$  que não contém o ponto  $A$ , respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos  $EB$ ,  $EO'$  e  $EC$ .

- a)  $EB = EO' = EC$
- b)  $EB < EO' = EC$
- c)  $EB > EO' > EC$
- d)  $EB = EO' > EC$
- e)  $EB < EO' < EC$

19. (Ime) Em um setor circular de  $45^\circ$ , limitado pelos raios  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  iguais a  $R$ , inscreve-se um quadrado  $MNPQ$ , onde  $\overline{MN}$  está apoiado em  $\overline{OA}$  e o ponto  $Q$  sobre o raio  $\overline{OB}$ . Então, o perímetro do quadrado é:

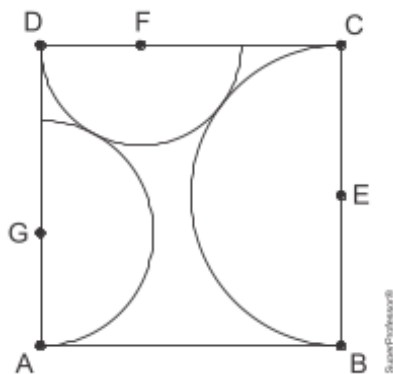
- a)  $4R$
- b)  $2R$
- c)  $2R\sqrt{2}$
- d)  $4R\sqrt{5}$
- e)  $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$

20. (Ita) Os lados de um triângulo de vértices  $A, B$  e  $C$  medem  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 7\text{cm}$  e  $CA = 8\text{cm}$ . A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado  $\overline{AB}$  no ponto  $N$  e o lado  $\overline{CA}$  no ponto  $K$ . Então, o comprimento do segmento  $\overline{NK}$ , em  $\text{cm}$ , é

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

- a) 2.
- b)  $2\sqrt{2}$ .
- c) 3.
- d)  $2\sqrt{3}$ .
- e)  $\frac{7}{2}$ .

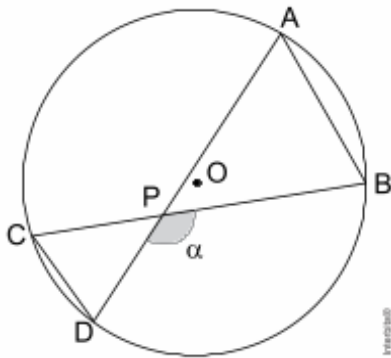
21. (Obmep) No interior do quadrado ABCD de lado 9 cm, foram traçadas as semicircunferências de centros E, F e G, tangentes como indicado na figura. Qual é a medida de AG?



- a)  $\frac{11}{5} \text{ cm}$
- b)  $\frac{18}{5} \text{ cm}$
- c)  $\frac{19}{5} \text{ cm}$
- d)  $\frac{11}{4} \text{ cm}$
- e)  $\frac{27}{8} \text{ cm}$

22. (Fgv) As cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



A medida do ângulo  $B\hat{P}D$ , indicado na figura por  $\alpha$ , é igual a

- a)  $120^\circ$ .
- b)  $124^\circ$
- c)  $128^\circ$
- d)  $130^\circ$ .
- e)  $132^\circ$ .

23. (Fgv) Um triângulo isósceles tem a base medindo 10 e um dos ângulos da base medindo  $45^\circ$ . A medida do raio da circunferência inscrita nesse triângulo é:

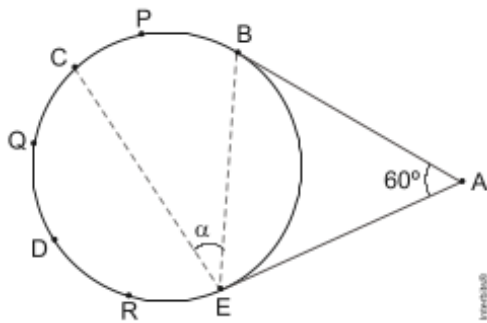
- a)  $5\sqrt{2} - 4$
- b)  $5\sqrt{2} - 6$
- c)  $5\sqrt{2} - 3$
- d)  $5\sqrt{2} - 5$
- e)  $5\sqrt{2} - 2$

24. (Esc. Naval) Rola-se, sem deslizar, uma roda de 1 metro de diâmetro, por um percurso reto de 30 centímetros, em uma superfície plana. O ângulo central de giro da roda, em radianos, é

- a) 0,1
- b) 0,2
- c) 0,3
- d) 0,6
- e) 0,8

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

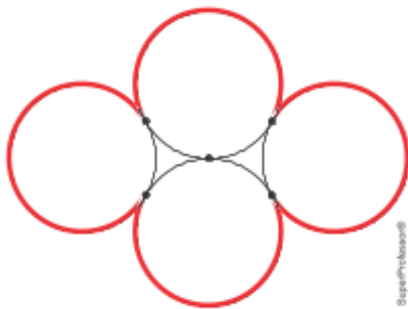
25. (Fgv) Na figura,  $AB$  e  $AE$  são tangentes à circunferência nos pontos  $B$  e  $E$ , respectivamente, e  $\widehat{BAE} = 60^\circ$ .



Se os arcos  $\widehat{BPC}$ ,  $\widehat{CQD}$  e  $\widehat{DRE}$  têm medidas iguais, a medida do ângulo  $\widehat{BEC}$ , indicada na figura por  $\alpha$  é igual a

- a)  $20^\circ$
- b)  $40^\circ$
- c)  $45^\circ$
- d)  $60^\circ$
- e)  $80^\circ$

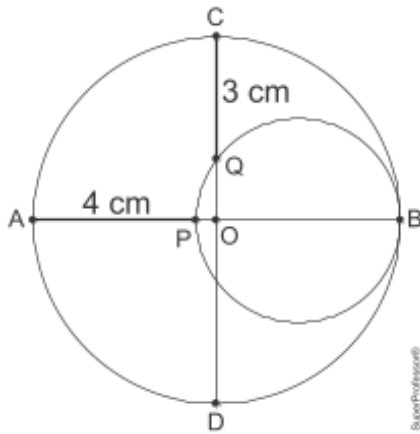
26. (Obmep) A figura mostra quatro circunferências, todas de comprimento 1 e tangentes nos pontos indicados. Qual é a soma dos comprimentos dos arcos destacados em vermelho?



- a)  $\frac{3}{2}$
- b) 2
- c)  $\frac{9}{4}$
- d)  $\frac{8}{3}$
- e) 3

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

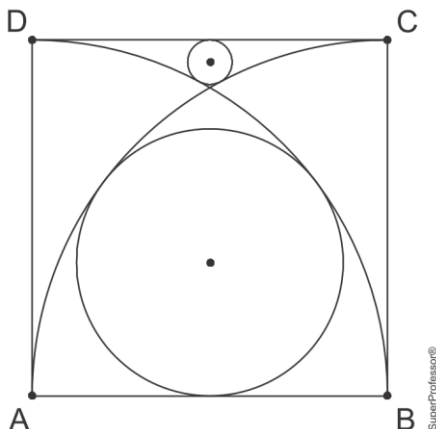
27. (Obmep) Duas circunferências são tangentes internamente, como na figura. Os segmentos AB e CD são perpendiculares e o ponto O é o centro da circunferência maior. Os segmentos AP e CQ medem, respectivamente, 4 e 3 centímetros. Qual é a medida do raio do círculo menor?



- a) 2,25 cm
- b) 2,5 cm
- c) 2,75 cm
- d) 3 cm
- e) 3,5 cm

28. (Obmep) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1 e os arcos  $\widehat{BD}$  e  $\widehat{AC}$

têm centros A e B, respectivamente. Os círculos tangenciam esses arcos e um lado do quadrado, como indicado. Qual é a razão entre os raios do círculo maior e do círculo menor?

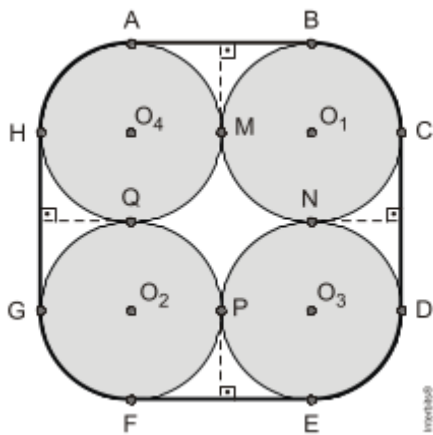


- a) 4,5

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

- b) 5
- c) 5,5
- d) 6
- e) 6,5

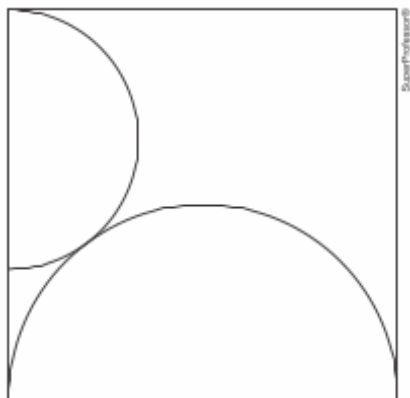
29. (Epcar (Afa)) Na figura abaixo, têm-se quatro círculos congruentes de centros  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  e  $O_4$  e de raio igual a 10 cm. Os pontos M, N, P, Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G, H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna.



Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a

- a)  $2(\pi + 40)$
- b)  $5(\pi + 16)$
- c)  $20(\pi + 4)$
- d)  $5(\pi + 8)$

30. (Obmep) Na figura, os dois semicírculos são tangentes e o lado do quadrado mede 36 cm. Qual é o raio do semicírculo menor?



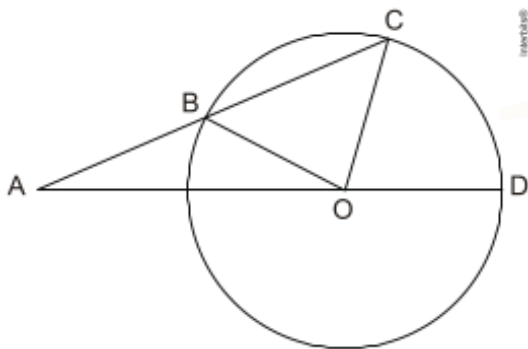
- a) 8 cm

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

b) 9 cm  
c) 10 cm  
d) 11 cm  
e) 12 cm

31. (Fuvest) Na figura, B, C e D são pontos distintos da circunferência de centro O, e o ponto A é exterior a ela. Além disso,

- (1) A, B, C, e A, O, D, são colineares;
- (2)  $AB = OB$ ;
- (3)  $\widehat{C\hat{O}D}$  mede  $\alpha$  radianos.

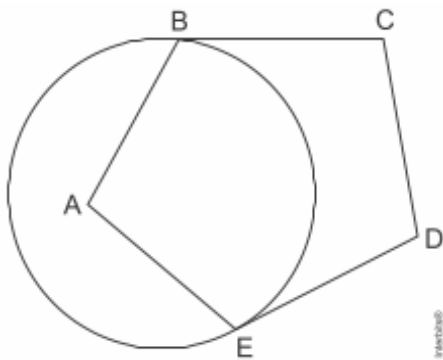


Nessas condições, a medida de  $\widehat{ABO}$ , em radianos, é igual a:

- $\pi - (\alpha/4)$
- $\pi - (\alpha/2)$
- $\pi - (2\alpha/3)$
- $\pi - (3\alpha/4)$
- $\pi - (3\alpha/2)$

32. (Fgv) Dado um pentágono regular ABCDE, constrói-se uma circunferência pelos vértices B e E de tal forma que  $BC$  e  $ED$  sejam tangentes a essa circunferência, em B e E, respectivamente.

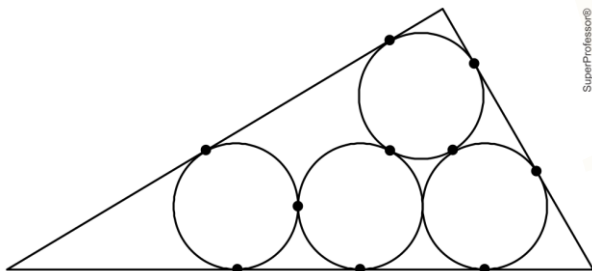
CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



A medida do menor arco BE na circunferência construída é

- a)  $72^\circ$ .
- b)  $108^\circ$ .
- c)  $120^\circ$ .
- d)  $135^\circ$ .
- e)  $144^\circ$ .

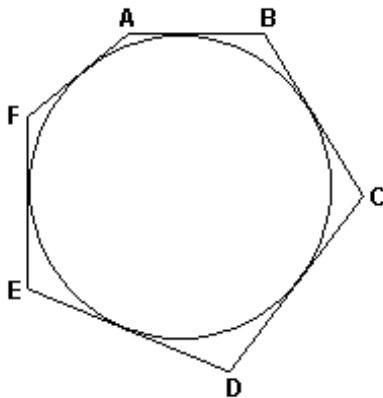
33. (Obmep) A figura mostra quatro círculos de raio 1 cm dentro de um triângulo. Os pontos marcados são pontos de tangência. Qual é o comprimento do menor lado desse triângulo?



- a) 4 cm
- b)  $3 + \sqrt{3}$  cm
- c) 5 cm
- d)  $3\sqrt{3}$  cm
- e)  $2 + 2\sqrt{3}$  cm

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

34. (Ufu) Um polígono circunscreve um círculo, conforme figura a seguir.



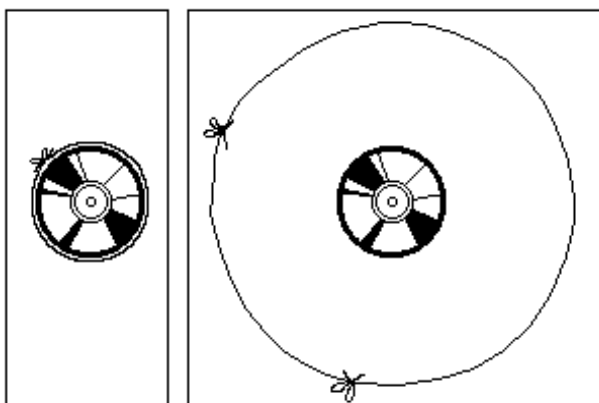
Sabendo-se que  $AB = 4$  cm,  $CD = 5$  cm,  $DE = 6$  cm e  $FA = 3$  cm, então,  $BC - EF$  é igual a

- a) 2 cm.
- b) 1 cm.
- c) 0 cm.
- d) 3 cm.

35. (Uerj) Um professor de matemática fez, com sua turma, a seguinte demonstração:

- colocou um CD sobre uma mesa e envolveu-o completamente com um pedaço de barbante, de modo que o comprimento do barbante coincidissem com o perímetro do CD;
- em seguida, emendando ao barbante um outro pedaço, de 1 metro de comprimento, formou uma circunferência maior que a primeira, concêntrica com o CD.

Veja as figuras adiante.



Calculou, então, a diferença entre as medidas do raio da circunferência maior e do raio do CD, chamando-a de  $x$ .

Logo após, imaginando um CD com medida do raio idêntica à do raio da Terra, repetiu, teoricamente, as etapas anteriores, chamando de  $y$  a diferença encontrada.

Assim, demonstrou a seguinte relação entre essas diferenças,  $x$  e  $y$ :

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

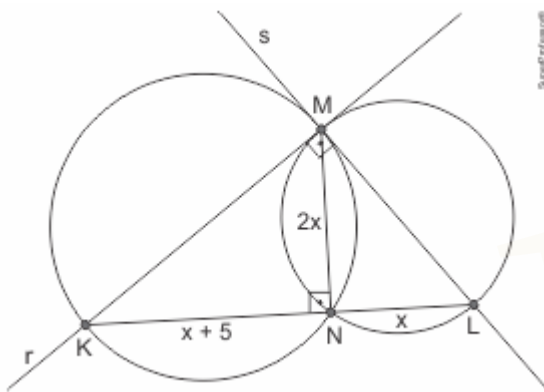
- a)  $x + y = \pi^{-1}$   
 b)  $x + y = \pi^{-2}$   
 c)  $y - x = \pi^{-2}$   
 d)  $y - x = \pi^{-1}$

**Gabarito**

**Resposta da questão 1:**

[D]

Como as retas são tangentes às circunferências no ponto M, o ângulo  $\widehat{KML}$  é reto. E, como o segmento  $\overline{KM}$  é perpendicular à reta s, a reta r passa pelo centro da circunferência da esquerda. Dessa forma, como  $\overline{KM}$  é diâmetro, o ângulo  $\widehat{KNM}$  também é reto.



Das relações métricas no triângulo retângulo, obtemos:

$$\begin{aligned}(2x)^2 &= (x+5) \cdot x \\ 4x^2 &= x^2 + 5x \\ x &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

[I] Verdadeira. Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{KM}^2 &= (x+5)^2 + (2x)^2 = \left(\frac{5}{3} + 5\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \overline{KM} = \frac{10\sqrt{5}}{3} \\ \overline{LM}^2 &= (2x)^2 + x^2 = \left(2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \overline{LM} = \frac{5\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{LM}} = \frac{\frac{10\sqrt{5}}{3}}{\frac{5\sqrt{5}}{3}} = 2$$

[II] Verdadeira. Comprimento do segmento  $\overline{KN}$ :

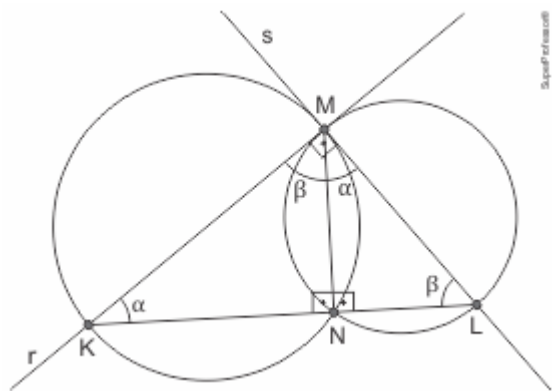
CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\overline{KN} = \frac{5}{3} + 5 = \frac{20}{3}$$

Logo:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{NL}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{3}} = 4$$

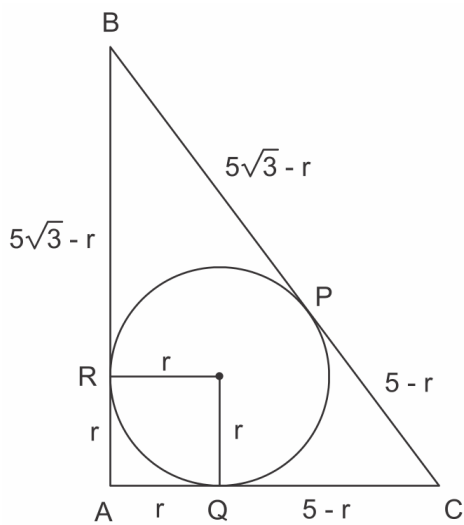
[III] Verdadeira. Os triângulos retângulos KML e MNL são semelhantes.



Resposta da questão 2:

[A]

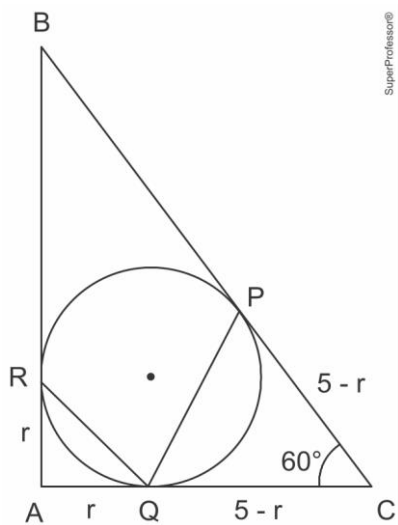
Como  $10^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$  e  $\widehat{BAC}$  é o maior ângulo, o triângulo é retângulo em A. O raio da circunferência inscrita vale:



CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$5\sqrt{3} - r + 5 - r = 10 \Rightarrow r = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 5)$$

Como  $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ,  $\widehat{BCA} = 60^\circ$ . Sendo assim, o triângulo PCQ é equilátero, e:



$$PQ = 5 - r = 5 - \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 5) = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2}$$

E, no triângulo RAQ, temos que:

$$\overline{RQ} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 5) \cdot \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{2}$$

Logo, o perímetro do quadrilátero PBRQ vale:

$$\begin{aligned} RB + BP + PQ + RQ &= 2 \left[ 5\sqrt{3} - \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 5) \right] + \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{2} \\ RB + BP + PQ + RQ &= \frac{5}{2}(4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2) + \frac{5}{2}(3 - \sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ \therefore RB + BP + PQ + RQ &= \frac{5}{2}(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) \end{aligned}$$

**Resposta da questão 3:**

[B]

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

Sabemos que os lados em PA de um triângulo retângulo podem ser escritos da seguinte forma:

$3k$ ,  $4k$  e  $5k$ , onde  $k$  é a razão da P.A.

Logo:

$$3k + 4k + 5k = 15 \Rightarrow 12k = 15 \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo são:

$$\frac{15}{4}, 5 \text{ e } \frac{25}{4}$$

Determinando o raio da circunferência inscrita, cuja medida chamaremos de  $r$ , temos:

$$\frac{15 \cdot r}{2} = \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} \Rightarrow r = \frac{5}{4}$$

A medida  $R$  do raio da circunferência circunscrita é a metade da medida da hipotenusa, logo:

$$R = \frac{\frac{25}{4}}{2} \Rightarrow R = \frac{25}{8}$$

Concluindo:

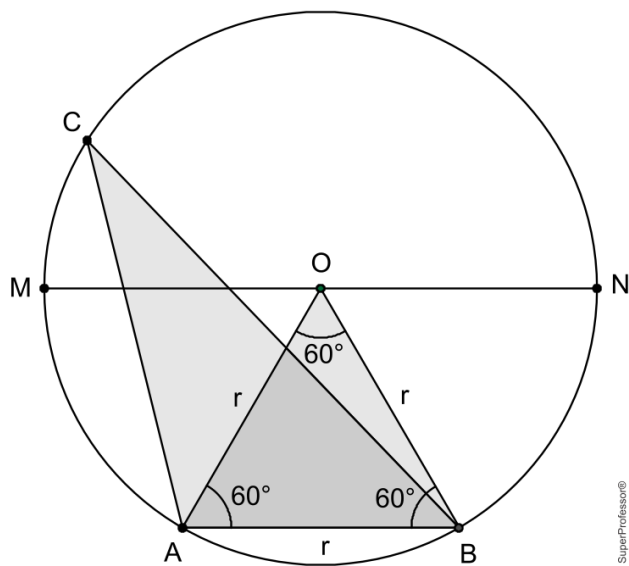
$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{25}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{25}{8}}{\frac{10}{8}} = \frac{25}{10} = 2,5$$

**Resposta da questão 4:**

[D]

O triângulo  $OAB$  é equilátero. Logo,  $A_{OAB} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



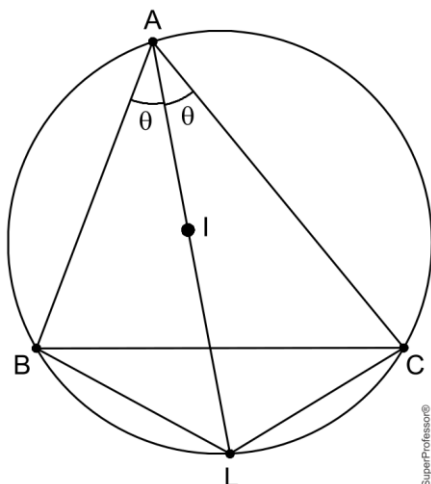
Para que a área do triângulo ABC seja maior que a área do triângulo OAB, basta que o ponto C esteja na parte superior do arco MN. Sendo assim, a probabilidade procurada vale:

$$P = \frac{180^\circ}{360^\circ - 60^\circ} = \frac{3}{5}$$

**Resposta da questão 5:**

[A]

Como I é incentro,  $\overline{AL}$  é bissetriz e  $\overline{BL} = \overline{CL}$



CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

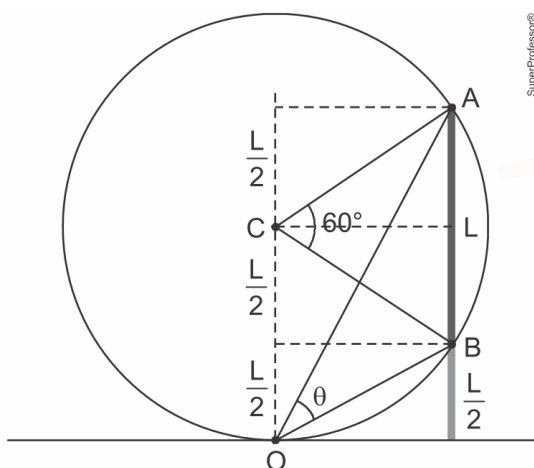
Aplicando o teorema de Ptolomeu:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{CL} + \overline{AC} \cdot \overline{BL} &= \overline{AL} \cdot \overline{BC} \\ \overline{AB} \cdot \overline{BL} + \overline{AC} \cdot \overline{BL} &= \overline{AL} \cdot \overline{BC} \\ \overline{BL} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC}) &= \overline{AL} \cdot \overline{BC} \\ \overline{BL} \cdot 2\overline{BC} &= \overline{AL} \cdot \overline{BC} \\ \therefore \frac{\overline{BL}}{\overline{AL}} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Resposta da questão 6:**

[A]

O ângulo  $\widehat{AOB}$  é máximo quando a circunferência de centro C é tangente ao solo.



Como o raio da circunferência é  $2 \cdot \frac{L}{2} = L$ , o triângulo ACB é equilátero. E, como o ângulo  $\widehat{AOB}$  é ângulo inscrito, devemos ter que:

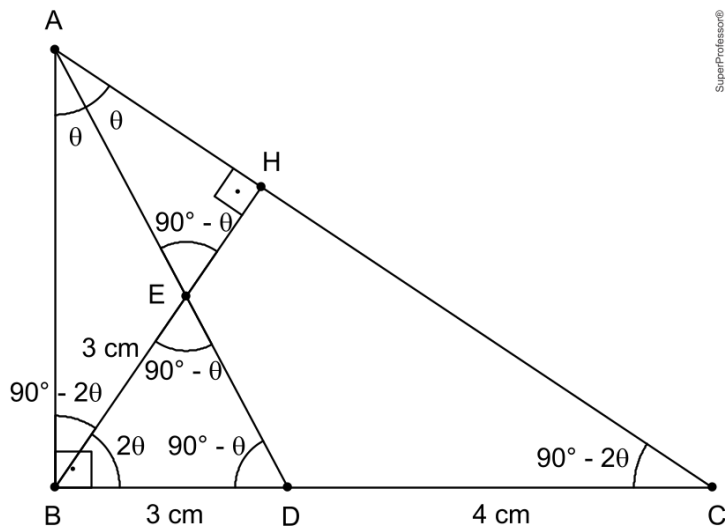
$$\theta = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

**Resposta da questão 7:**

[C]

Sendo  $\widehat{BAC} = 2\theta$ , no triângulo ABH temos que  $\widehat{ABH} = 90^\circ - 2\theta$ , o que faz com que  $\widehat{HBC} = 2\theta$ . No triângulo AEH,  $\widehat{AEH} = 90^\circ - \theta$ , o que faz com que  $\widehat{BED} = 90^\circ - \theta$ . No triângulo BED,  $\widehat{BDE} = 90^\circ - \theta$ , ou seja, como  $\widehat{BED} = \widehat{BDE}$ , esse triângulo é isósceles, logo,  $BD = 3\text{cm}$  e  $DC = 4\text{cm}$ . Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



$$\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$AB = \frac{3AC}{4}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$$AC^2 = \left(\frac{3AC}{4}\right)^2 + 7^2$$

$$AC^2 = \frac{9AC^2}{16} + 49$$

$$\frac{7AC^2}{16} = 49$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{16 \cdot 49}{7}} = \frac{4 \cdot 7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\overline{AC} = 4\sqrt{7}cm$$

e

$$\overline{AB} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{7}cm}{4} = 3\sqrt{7}cm$$

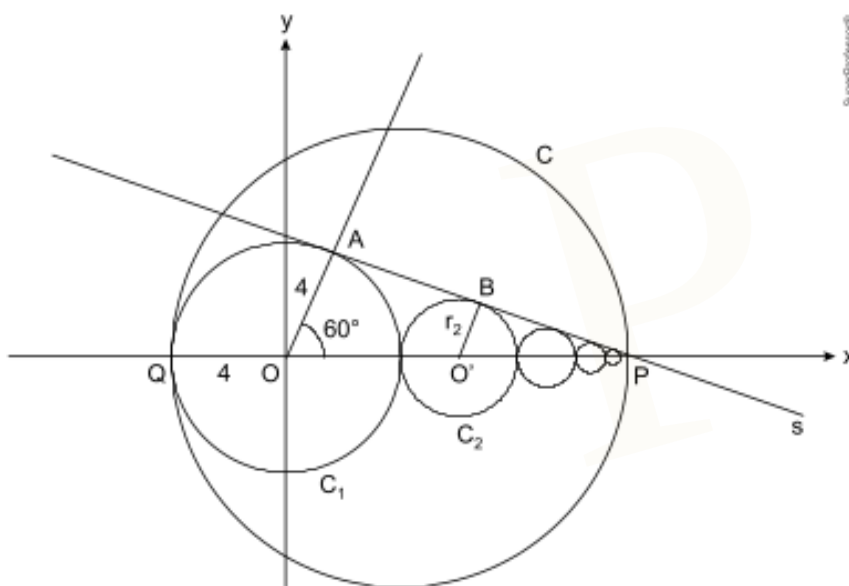
O raio r do círculo inscrito na circunferência é dado por:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= p \cdot r \\
 \frac{7 \cdot 3\sqrt{7}}{2} &= \frac{(7 + 3\sqrt{7} + 4\sqrt{7})}{2} \cdot r \\
 7 \cdot 3\sqrt{7} &= (7 + 7\sqrt{7}) \cdot r \\
 r &= \frac{3\sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}} \cdot \frac{1 - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}} \\
 r &= \frac{3\sqrt{7} - 3 \cdot 7}{1 - 7} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} - 7)}{-6} \\
 \therefore r &= \frac{7 - \sqrt{7}}{2} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

**Resposta da questão 8:**

a) No triângulo OPA, temos:



$$\begin{aligned}
 \cos 60^\circ &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \\
 \frac{1}{2} &= \frac{4}{\overline{OP}} \\
 \overline{OP} &= 8
 \end{aligned}$$

Logo, o raio de C vale:

$$R = \frac{\overline{QO} + \overline{OP}}{2} = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

b) Temos que:

$$\overline{O'P} = 8 - (4 + r_2) = 4 - r_2$$

Por semelhança entre os triângulos OAP e O'BP, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OA}}{\overline{O'B}} &= \frac{\overline{OP}}{\overline{O'P}} \\ \frac{4}{r_2} &= \frac{8}{4 - r_2} \\ 8r_2 &= 16 - 4r_2 \\ r_2 &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Portanto, a razão de semelhança entre os raios vale:

$$R = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

c) Como os raios estão em progressão geométrica de razão  $1/3$ , a soma das áreas dos infinitos círculos  $C_n$  vale:

$$A_{C_n} = \pi \left[ 4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots \right] = \pi \left( \frac{16}{1 - \frac{1}{9}} \right) = 18\pi$$

Logo, a área da região sombreada vale:

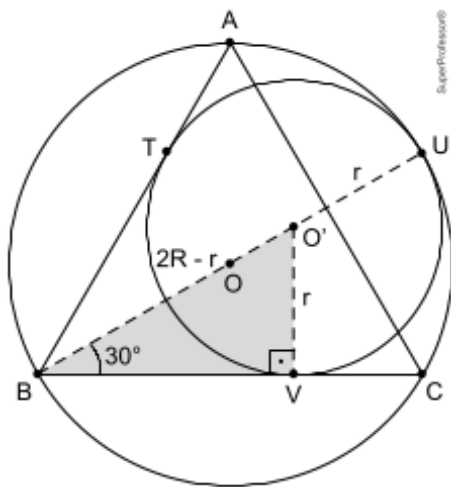
$$A = \pi \cdot 6^2 - 18\pi = 18\pi$$

**Resposta da questão 9:**

[B]

Sendo O e O', respectivamente, os centros das circunferências maior e menor, T, U e V os pontos de tangência da circunferência menor e R e r os raios das circunferência maior e menor, sabemos que  $O'\hat{B}V = 30^\circ$ ,  $\overline{O'V} = r$  e  $\overline{BO'} = 2R - r$ . Logo, no triângulo retângulo BO'V, temos:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{O'V}}{\overline{BO'}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{2R - r} \Rightarrow 2R - r = 2r \Rightarrow R = \frac{3r}{2}$$

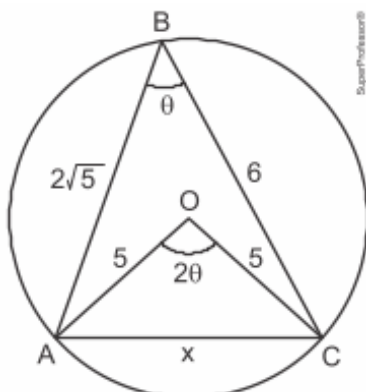
Portanto, a razão entre as áreas destacadas vale:

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{r^2}{\left(\frac{3r}{2}\right)^2 - r^2} = \frac{r^2}{\frac{5r^2}{4}} = \frac{4}{5}$$

**Resposta da questão 10:**

[C]

Sendo O o centro do círculo, aplicando a lei dos cossenos nos triângulos AOC e ABC, temos:



CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\begin{cases} x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 2\theta \\ x^2 = (2\sqrt{5})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 6 \cdot \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 50 - 50(2\cos^2 \theta - 1) \\ x^2 = 56 - 24\sqrt{5}\cos \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 100 - 100\cos^2 \theta (I) \\ \cos \theta = \frac{56 - x^2}{24\sqrt{5}} (II) \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), chegamos a:

$$\begin{aligned} x^2 &= 100 - 100 \left( \frac{56 - x^2}{24\sqrt{5}} \right)^2 \\ x^2 &= 100 - 100 \frac{(3136 - 112x^2 + x^4)}{2880} \\ 288x^2 &= 28800 - 31360 + 1120x^2 - 10x^4 \\ 5x^4 - 416x^2 + 1280 &= 0 \\ x^2 &= \frac{416 \pm \sqrt{147456}}{10} = \frac{416 \pm 384}{10} \\ x^2 &= 80 \text{ ou } x^2 = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Porém, devemos ter que:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta > 0 \Rightarrow x^2 < 56$$

Logo:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ \therefore m(AC) &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

**Resposta da questão 11:**

[B]

Comprimento do segmento  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

Logo:

$$\overline{PQ} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Sendo M o ponto médio de  $\overline{AB}$ , temos:

$$\overline{PM} = 3\sqrt{5}$$

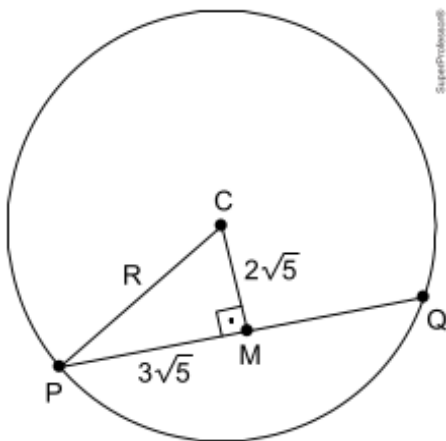
A equação da reta r que passa pelos pontos A e B é dada por:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{0 + 2}{5 - 1} = \frac{1}{2} \\ y - 0 &= \frac{1}{2}(x - 5) \\ x - 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Distância do ponto C à reta r:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Portanto, o raio R da circunferência é igual a:



$$\begin{aligned} R^2 &= (3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 \\ R^2 &= 45 + 20 \\ \therefore R &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

**Resposta da questão 12:**

[A]

Por potência de ponto em relação ao ponto P, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{PQ} \cdot \overline{PA} &= \overline{PR} \cdot \overline{PB} \\ \overline{PQ} \cdot 14 &= (\overline{PQ} + 1) \cdot 12 \\ 14\overline{PQ} &= 12\overline{PQ} + 12 \\ \overline{PQ} &= 6cm \\ \overline{PR} &= 6cm + 1cm = 7cm \\ \overline{RB} &= 12cm - 7cm = 5cm \\ \overline{QA} &= 14cm - 6cm = 8cm \\ \overline{TQ} &= \frac{8cm}{2} = 4cm\end{aligned}$$

Como  $\overline{RB} = \overline{OB} = \overline{OR} = 5cm$ :

$$\begin{aligned}\widehat{BOR} &= 60^\circ \\ \widehat{COB} &= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

No triângulo OTQ, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{OQ}^2 &= \overline{TQ}^2 + \overline{OT}^2 \\ 5^2 &= 4^2 + \overline{OT}^2 \\ \overline{OT} &= 3cm\end{aligned}$$

Logo, a área procurada vale:

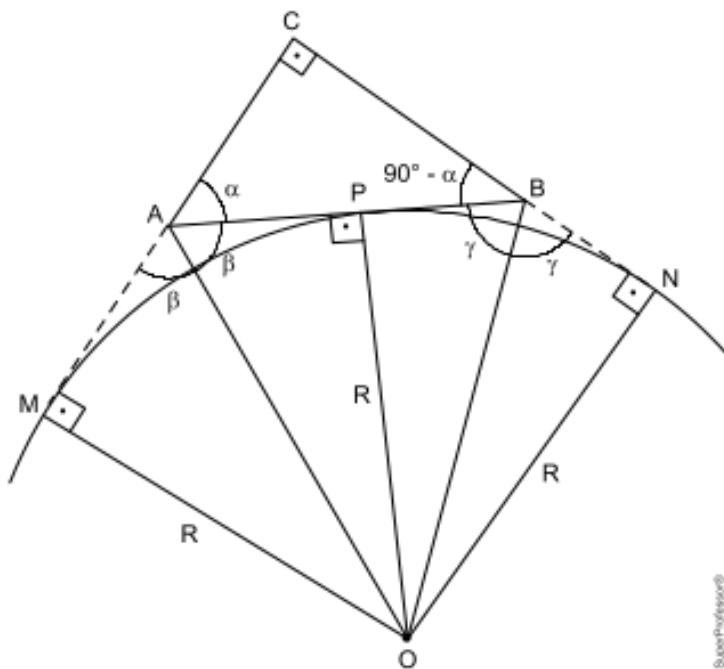
$$\begin{aligned}A &= \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi(5^2 - 3^2) \\ A &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 16 \\ \therefore A &= 16cm^2\end{aligned}$$

**Resposta da questão 13:**

[A]

Da figura abaixo, sabemos que:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



Como os triângulos AMO e APO são congruentes, assim como os triângulos BNO e BPO (pelo caso LLL),  $\overline{AO}$  e  $\overline{BO}$  são bissetrizes externas do triângulo ABC. Também temos que:

$$\begin{cases} 2\beta + \alpha = 180^\circ \\ 2\gamma + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \\ \gamma = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Sendo assim, nos triângulos APO e BPO, podemos escrever:

$$\begin{cases} tg\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{\overline{AP}} \\ tg\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{\overline{PB}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AP} = \frac{R}{tg\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \\ \overline{PB} = \frac{R}{tg\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \end{cases}$$

Logo:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

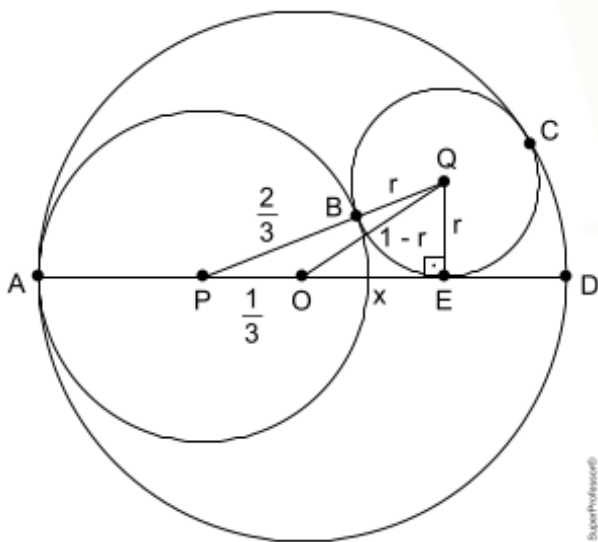
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{R}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{R}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{R\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \\ \overline{AB} &= \frac{R\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{R\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \\ \overline{AB} &= \frac{R\left[\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left[90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\right]} = \frac{R\cos(45^\circ)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \\ \therefore \overline{AB} &= \frac{R\sqrt{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}\end{aligned}$$

**Resposta da questão 14:**

[D]

Observe a figura abaixo, com:

$$\overline{PO} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos PQE e OQE, obtemos:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3} + r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{3} + x\right)^2 \\ (1 - r)^2 = r^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{9} + \frac{4r}{3} + r^2 = r^2 + \frac{1}{9} + \frac{2x}{3} + x^2 \\ 1 - 2r + r^2 = r^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4r = 2x + 3x^2 (I) \\ 1 - 2r = x^2 (II) \end{cases}$$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

De (II), sabemos que  $x^2 = 1 - 2r$  e  $x = \sqrt{1 - 2r}$ . Substituindo estes valores em (I), chegamos a:

$$\begin{aligned} 1 + 4r &= 2\sqrt{1 - 2r} + 3(1 - 2r) \\ 1 + 4r &= 2\sqrt{1 - 2r} + 3 - 6r \\ 10r - 2 &= 2\sqrt{1 - 2r} \\ (5r - 1)^2 &= (\sqrt{1 - 2r})^2 \\ 25r^2 - 10r + 1 &= 1 - 2r \\ 25r^2 - 8r &= 0 \\ r(25r - 8) &= 0 \\ r &= \frac{8}{25} \text{ ou } r = 0 (\text{não convém}) \end{aligned}$$

Portanto, o raio da circunferência de centro Q é igual a  $8/25$ .

**Resposta da questão 15:**

[D]

Ângulo central de cada arco de circunferência (em rad):

$$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Raio da circunferência:

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \frac{\pi}{4} &= \frac{62,8}{R} \Rightarrow R = \frac{4 \cdot 62,8}{3,14} \\ R &= 80cm \end{aligned}$$

Sendo assim, a menor medida  $L$  do lado da placa quadrada deve ser igual ao dobro do raio da circunferência. Ou seja:

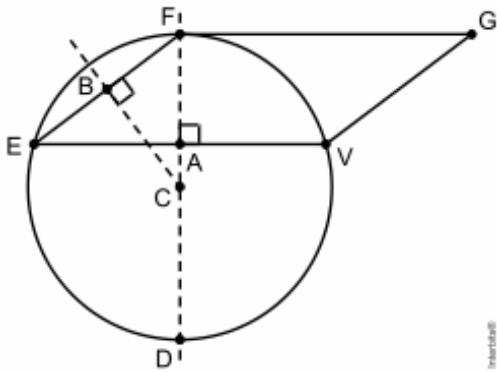
$$L = 160cm$$

**Resposta da questão 16:**

[E]

Considere a figura.

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



Se  $CB$  e  $DF$  são mediatrizes, então  $\overline{BE} = \overline{BF} = \frac{5}{2}cm$  e  $\overline{AE} = \overline{AV} = 4cm$ . Logo, como o triângulo  $AEF$  é retângulo em  $A$ , segue de imediato que  $\overline{AF} = 3cm$ .

Pela potência do ponto  $A$ , vem

$$\begin{aligned}\overline{AE} \cdot \overline{AV} &= \overline{AF} \cdot \overline{AD} \Leftrightarrow 4 \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot \overline{AC} + 3) \\ \Leftrightarrow \overline{AC} &= \frac{7}{6}cm.\end{aligned}$$

Em consequência, temos

$$\begin{aligned}\overline{CF} &= \overline{AC} + \overline{AF} \Leftrightarrow \overline{CF} = \frac{7}{6} + 3 \\ \Leftrightarrow \overline{CF} &= \frac{25}{6}cm.\end{aligned}$$

Como o triângulo  $BCF$  é retângulo,  $\overline{CF} = \frac{25}{6} = 5 \cdot \frac{5}{6}cm$  e  $\overline{BF} = \frac{15}{6} = 3 \cdot \frac{5}{6}cm$ , pode-se afirmar que, pela semelhança com o triângulo retângulo pitagórico de lados 3,4 e 5, o lado  $BC$  mede  $\overline{BC} = 4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{3}cm$ .

A resposta é

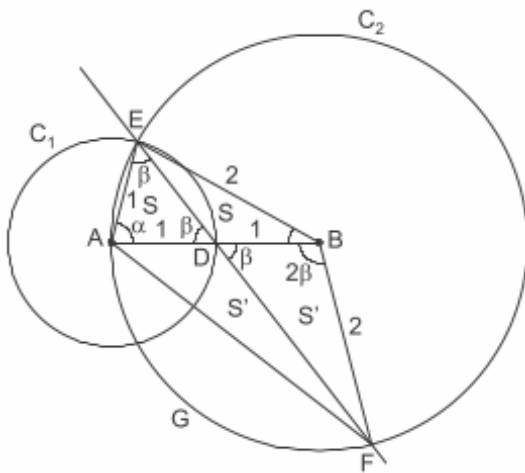
$$\begin{aligned}(FEC) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10}{3} \\ &= \frac{25}{3}cm^2.\end{aligned}$$

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

**Resposta da questão 17:**

[C]

Do enunciado, segue a seguinte figura:



Como D é ponto médio de AB, os triângulos AED e BED são equivalentes. O mesmo vale para os triângulos ADF e BDF.

Logo, os triângulos AEF é equivalente ao triângulo BEF.

Daí,

$$\begin{aligned} S_{EBD} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \text{sen}(\pi - 2\alpha) \\ S_{EBD} &= \text{sen}(2\alpha) \\ S_{EBD} &= 2\text{sen}\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Note que AEEF é um ângulo inscrito de medida igual a  $\beta$ , logo, a medida do arco AGF é  $2\beta$ . Assim,  $\widehat{ABF} = 2\beta$ .

Daí,

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$S_{DBF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \text{sen}(2\beta)$$

$$S_{DBF} = \text{sen}(2\beta)$$

$$S_{DBF} = \text{sen}(\pi - \alpha)$$

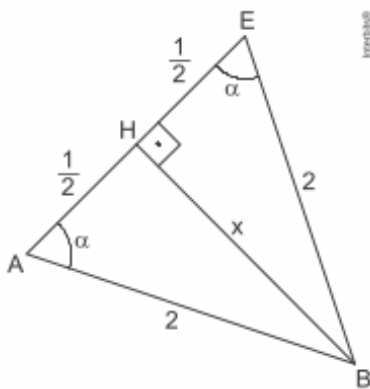
$$S_{DBF} = \text{sen}\alpha$$

Então,

$$S_{BEF} = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha$$

$$S_{BEF} = \text{sen}\alpha \cdot (2\cos\alpha + 1)$$

Note que:



No triângulo  $AHB$ ,

$$2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{15}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Dai,

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}S_{BEF} &= \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right) \\ S_{BEF} &= \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ S_{BEF} &= \frac{3\sqrt{15}}{8}\end{aligned}$$

Como os triângulos AEB e BEF são equivalentes,

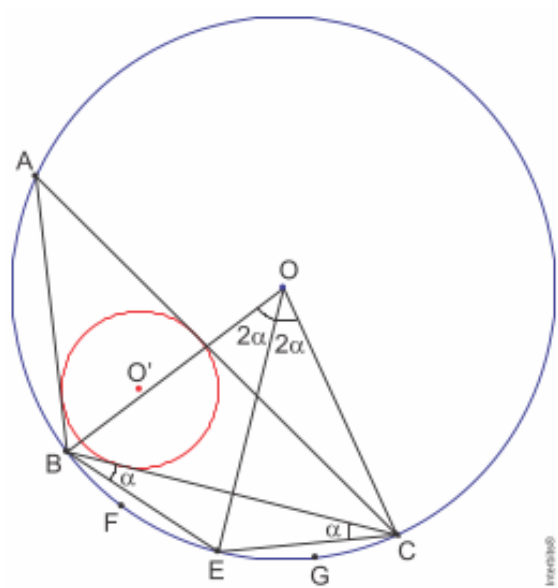
$$S_{AEF} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

**Resposta da questão 18:**

[A]

Do enunciado, temos a seguinte figura:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



$$\widehat{BFE} = \widehat{EGC} = 2\alpha$$

$\widehat{CBE}$  é ângulo inscrito em relação ao arco  $\widehat{EGC}$ ,  $\widehat{EGC}$ ,  $\widehat{EGC}$ , logo,  $\widehat{CBE} = \alpha$

$\widehat{BCE}$  é ângulo inscrito em relação ao arco  $\widehat{BFE}$ ,  $\widehat{BFE}$ ,  $\widehat{BFE}$ , logo,  $\widehat{BCE} = \alpha$

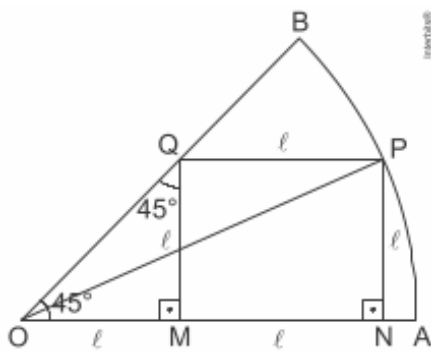
Como  $\widehat{CBE} = \widehat{BCE} = \alpha$  o triângulo BCE é isósceles, com  $EB = EC$ .

**Resposta da questão 19:**

[E]

Do enunciado, segue a figura:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



No triângulo OPN,

$$R^2 = \ell^2 + (2\ell)^2$$

$$R^2 = 5\ell^2$$

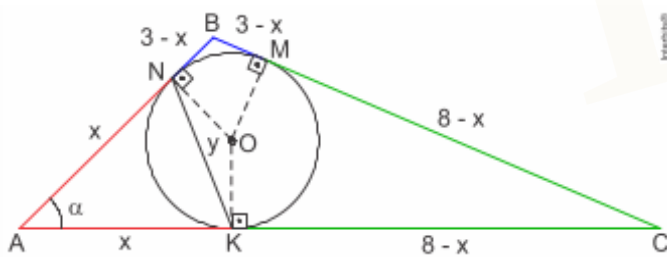
$$\ell = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$

Logo, o perímetro do quadrado MNPQ é  $4R \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Resposta da questão 20:**

[A]

Do enunciado, temos:



M é ponto de tangência entre a circunferência e o lado BC.

Sendo  $AK = x$ ,

$$\begin{cases} AK = AN = x \\ BN = BM = 3 - x \\ CK = CM = 8 - x \end{cases}$$

Como  $BC = 7$  e  $BC = BM + MC$ ,

$$\begin{aligned} 7 &= 3 - x + 8 - x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sendo  $\hat{BAC} = \alpha$ , temos:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Sendo  $NK = y$ , temos:

$$y^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$

$$y^2 = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

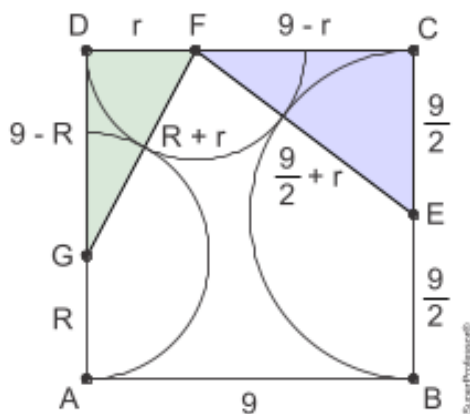
$$y = 2\text{cm}$$

$$NK = 2\text{cm}$$

**Resposta da questão 21:**

[E]

Sendo  $R$  e  $r$ , respectivamente, os raios das circunferências de centro  $G$  e  $F$ , temos:



No triângulo azul:

$$\left(\frac{9}{2} + r\right)^2 = (9 - r)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\frac{81}{4} + 9r + r^2 = 81 - 18r + r^2 + \frac{81}{4}$$

$$27r = 81$$

$$r = 3\text{cm}$$

No triângulo verde:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\begin{aligned}(R + 3)^2 &= (9 - R)^2 + 3^2 \\ R^2 + 6R + 9 &= 81 - 18R + R^2 + 9 \\ 24R &= 81 \\ \therefore R &= \frac{27}{8}cm\end{aligned}$$

**Resposta da questão 22:**

[E]

Se o lado  $AB$  refere-se a um polígono regular de 6 lados, então o arco  $AB$  mede  $60^\circ$ .

Se o lado  $CD$  refere-se a um polígono regular de 10 lados, então o arco  $CD$  mede  $36^\circ$

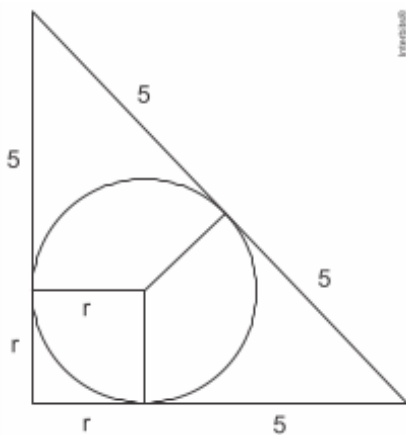
A circunferência tem um total de  $360^\circ$ , logo o ângulo pedido será:

$$\alpha = \frac{360 - 60 - 36}{2} \Rightarrow \alpha = 132^\circ$$

**Resposta da questão 23:**

[D]

Calculando:



$$10^2 = (5 + r)^2 + (5 + r)^2 \Rightarrow 10^2 = 2 \cdot (5 + r)^2 \Rightarrow 10 = \sqrt{2} \cdot (5 + r) \Rightarrow r = 5\sqrt{2} - 5$$

**Resposta da questão 24:**

[D]

Se o comprimento do arco de giro é  $L = 30cm$  e o raio da roda é  $50cm$ , pode-se escrever:

$$L = R \cdot \alpha \rightarrow 30 = 50 \cdot \alpha \rightarrow \alpha = 0,6rad$$

**Resposta da questão 25:**

[B]

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

Seja S um ponto do menor arco  $\widehat{BE}$ .

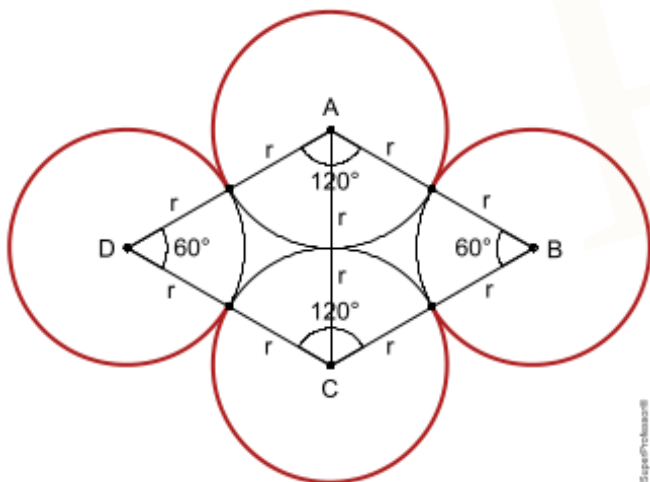
Como  $\widehat{BPC} = \widehat{CQD} = \widehat{DRE} = 2\alpha$ , segue-se que  $BSE = 360^\circ - 6\alpha$ . Portanto, como  $\widehat{EAB}$  é excêntrico exterior, temos

$$\begin{aligned} EAB = \frac{BQE - BSE}{2} &\Leftrightarrow 60^\circ = \frac{6\alpha - (360^\circ - 6\alpha)}{2} \\ &\Leftrightarrow 60^\circ = 6\alpha - 180^\circ \\ &\Leftrightarrow \alpha = 40^\circ. \end{aligned}$$

**Resposta da questão 26:**

[E]

Sendo  $r$  o raio das circunferências, como  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AC} = 2r$ , os triângulos ABC e ADC são equiláteros. Sendo assim, o comprimento dos arcos destacados em vermelho vale:



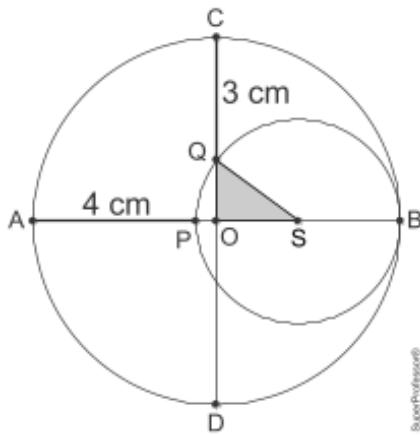
$$4 - 2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 1 = 4 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 3$$

**Resposta da questão 27:**

[B]

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

Sendo  $R$  o raio da circunferência maior,  $S$  o centro da circunferência menor e  $r$  o seu raio, temos:



$$2R = 4 + 2r \Rightarrow R = 2 + r$$

$$OQ = R - 3 = r - 1$$

$$OS = R - r = 2$$

Sendo assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OSQ, obtemos:

$$r^2 = (r - 1)^2 + 2^2$$

$$r^2 = r^2 - 2r + 1 + 4$$

$$2r = 5$$

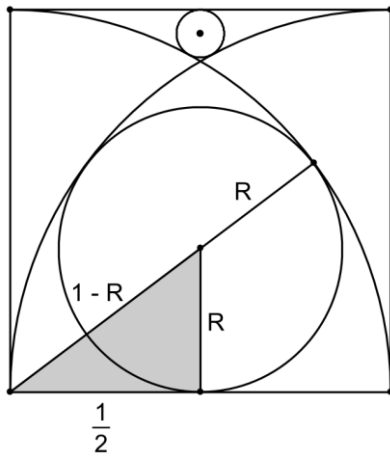
$$\therefore r = 2,5\text{cm}$$

**Resposta da questão 28:**

[D]

Raio do círculo maior:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

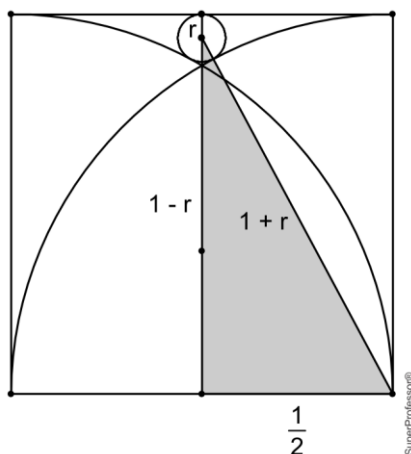


$$(1 - R)^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 - 2R + R^2 = R^2 + \frac{1}{4}$$

$$R = \frac{3}{8}$$

Raio do círculo menor:



$$(1 + r)^2 = (1 - r)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 + 2r + r^2 = 1 - 2r + r^2 + \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{1}{16}$$

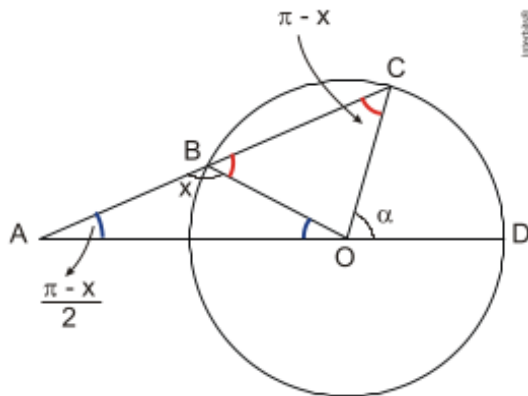


CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\begin{aligned}(18 + r)^2 &= (36 - r)^2 + 18^2 \\ 18^2 + 36r + r^2 &= 36^2 - 72r + r^2 + 18^2 \\ 108r &= 36^2 \\ \therefore r &= 12cm\end{aligned}$$

**Resposta da questão 31:**

[C]



$$\begin{aligned}A\hat{B}D &= x \\ \Delta COB &\text{ é isósceles de base } \overline{BC} \quad \pi - x \\ \Delta ABO &\text{ é isósceles de base } \overline{AO} \quad \frac{\pi - x}{2} \\ \text{No triângulo } AOB: \\ \alpha &= \pi - x + \frac{\pi - x}{2} \quad (\text{ângulo externo}) \\ 2\alpha &= 2\pi - 2x + \pi - x \\ 3x &= 3\pi - 2\alpha \\ x &= \frac{3\pi - 2\alpha}{3} \\ x &= \pi - \frac{2\alpha}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } A\hat{B}O = \pi - (2\alpha/3)$$

**Resposta da questão 32:**

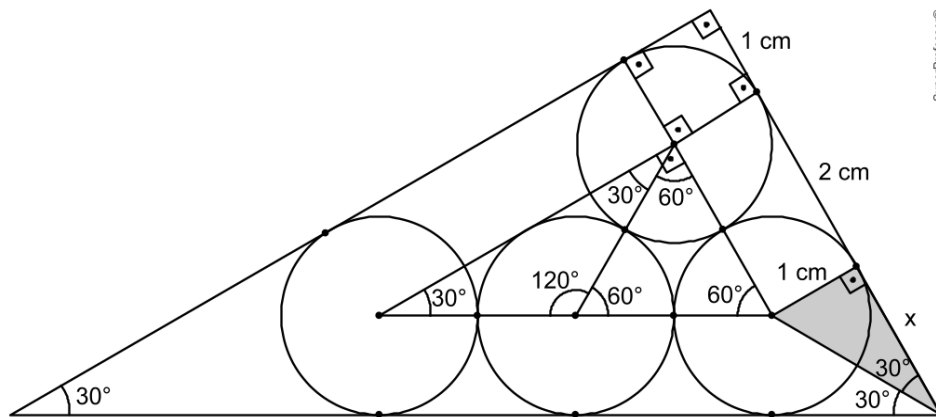
[E]

**Resposta da questão 33:**

[B]

No triângulo destacado na figura abaixo, obtemos:

CIRCUNFERÊNCIA  
PROFESSOR YURI POLITANO



$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Portanto, o comprimento do menor lado do triângulo vale  $3 + \sqrt{3} \text{ cm}$ .

**Resposta da questão 34:**

[C]

**Resposta da questão 35:**

[A]