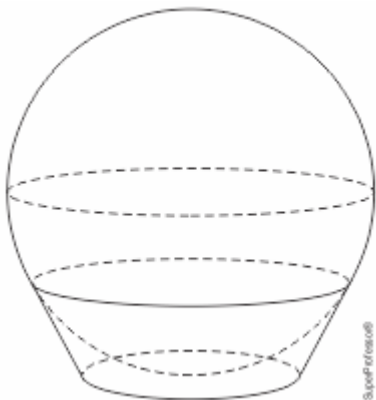


CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

1. (Efomm) Um balde em forma de tronco de cone, com altura de 1 m, raio do fundo de 0,3 m e raio do topo de 0,6 m, está sendo preenchido com água a uma taxa constante de $5 \text{ m}^3/\text{min}$. A água mantém a forma do tronco de cone enquanto enche o balde. A que taxa, aproximadamente, a altura da água está aumentando no instante em que ela atinge 0,5 m de altura?

- a) $50/\pi \text{ m/min}$
- b) $27,5/\pi \text{ m/min}$
- c) $25/\pi \text{ m/min}$
- d) $12,5/\pi \text{ m/min}$
- e) $10/\pi \text{ m/min}$

2. (Epcar (Afa)) Observe a figura abaixo na qual está representada uma esfera com uma parte inserida em um recipiente em formato de tronco de cone.



A esfera está tangente à base menor desse tronco e também à borda superior do recipiente.

Se os raios maior, menor e a altura do recipiente são, respectivamente, $2x \text{ cm}$, $(x + 2) \text{ cm}$ e $x \text{ cm}$, e se o volume do que sobra do recipiente, ao ser inserida a esfera, é igual a 420 cm^3 , considerando $\pi = 3$, então, é correto afirmar que a área da esfera, em cm^2 , é igual a

- a) 432.
- b) 972.
- c) 1728.
- d) 2700.

3. (Efomm) Seja S a soma de todos $t \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a igualdade

$$2\sec^2(x)\cot^2(t) - 2\cot^2(t) = A.B,$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$A = [\tan^2(x) + \cos(2x)\tan^2(x)]$$

$$\bullet B = [2\cos^2(x) + \tan^2(x) - \cos(2x)],$$

tal que $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Seja $V_E = \frac{S}{3}$ o volume da esfera E inscrita num cilindro C.

Seja K o sólido formado por dois cones inscritos em C, tal que cada uma das bases coincide com as bases inferior e superior de C e vértices comum no centro de E.

O sólido AC, chamado de Anticlépsidra, é a região interna de C e externa de K.

Seja V_{AC} o volume da Anticlépsidra e A_c a área total do cilindro C.

Qual é o valor de $\frac{4A_c}{V_{AC}}$?

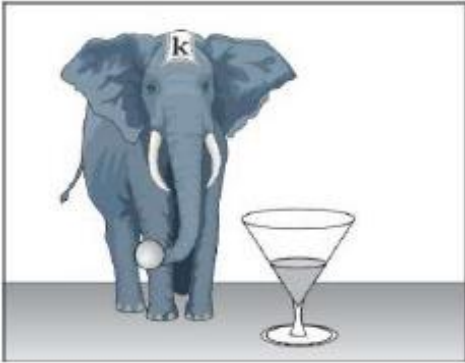
- a) 18
- b) $18\pi^2$
- c) 18π
- d) $9\pi^2$
- e) 9

4. (Efomm) Um reservatório cônico está sendo cheio a uma vazão de $2 \text{ m}^3/\text{s}$. O reservatório possui 9 metros de altura e sua base possui 6 metros de diâmetro. O quão rápido o nível da água está subindo quando a água estiver a 6 metros do topo?

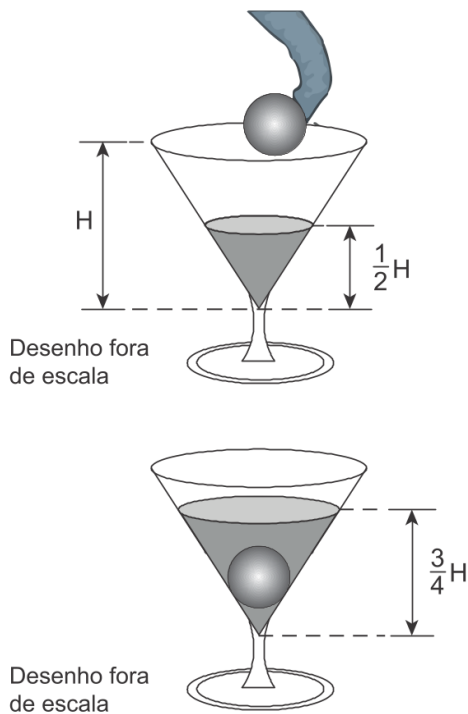
- a) $\frac{3}{8\pi} \text{ m/s}$
- b) $\frac{1}{2\pi} \text{ m/s}$
- c) $\frac{4}{\pi} \text{ m/s}$
- d) $\frac{9}{8\pi} \text{ m/s}$
- e) $\frac{2}{\pi} \text{ m/s}$

5. (Epcar (Afa)) Em um circo, para uma das atrações, o elefante Krewanjovi coloca uma esfera de raio 19 cm em um recipiente no formato cônico, conforme ilustrado abaixo.

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



Sabe-se que o recipiente se encontrava com água até a metade de sua altura. Krewanjovi, então, coloca a esfera dentro do recipiente sem derramar uma gota sequer. A esfera fica totalmente submersa e o nível da água sobe para $\frac{3}{4}$ da altura do cone.



Considerando $\pi = 3$, podemos afirmar que o volume do cone, em cm^3 , é um número divisível por

- a) 5^2
- b) 19^3
- c) 3^4
- d) 2^5

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

6. (Epcar (Afa)) Um cone de revolução possui volume igual a $128\pi \text{ cm}^3$. Em sua base inscreve-se um hexágono regular de lado 8 cm.

Considere um cilindro que tenha o mesmo volume e a mesma área da base do cone descrito anteriormente.

A razão entre a altura do cone e a altura do cilindro, nessa ordem, ambas na mesma unidade de medida, é igual a

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) 1
- d) 3

7. (Esc. Naval) Uma esfera de raio 54 cm é seccionada por planos perpendiculares a um diâmetro, dividindo-o em partes proporcionais a 2, 3 e 4 e determinando os sólidos S_2 , S_3 e S_4 , respectivamente. Suponha que S_3 , contenha o centro da esfera e que C_k é a razão entre o volume e a área total de S_k , para $k = 2, 3$ e 4. Calcule o valor de $C = C_2 + C_3 + C_4$ e assinale a opção correta.

- a) $10 < C < 15$
- b) $15 < C < 20$
- c) $20 < C < 25$
- d) $25 < C < 30$
- e) $30 < C < 35$

8. (Esc. Naval) Um copo na forma de um cilindro circular reto, com altura medindo 13 cm e diâmetro da base medindo 6 cm, está com água até $3/4$ de sua altura. Assim, qual o maior ângulo em que é possível inclinar o copo sem derramar água?

- a) $\arctg(4/13)$
- b) $\arctg(1/3)$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

- c) $\arctg(6/13)$
- d) $\arctg(1/2)$
- e) $\arctg(13/12)$

9. (Esc. Naval) Um cilindro circular reto de raio r e altura h possui volume igual a 300 cm^3 . Sabendo que o cilindro possui menor área total possível, a altura h , em cm, é aproximadamente igual a:

- a) 7,25
- b) 6,90
- c) 6,15
- d) 3,63
- e) 2,00

10. (Esc. Naval) Na partida de futebol entre Alemanha e Japão na Copa do Mundo de 2022, no lance que originou o segundo gol do Japão, por 1,88mm, a bola não passou totalmente pela linha de fundo (linha branca), como mostram as figuras 1, 2 e 3 apresentadas abaixo.



Figura 1

Fonte: www.mirror.co.uk/sport/football/news/fifa-statement-japan-goal-germany-28641190

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

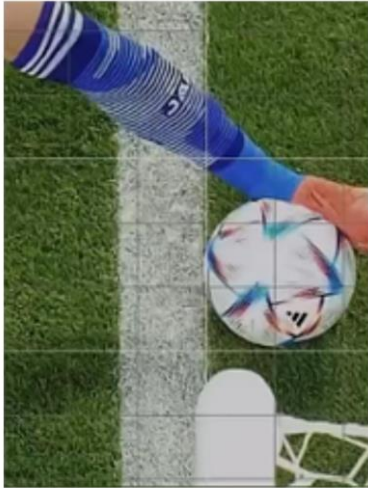


Figura 2

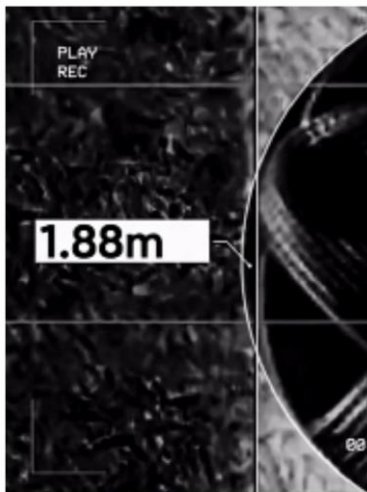


Figura 3

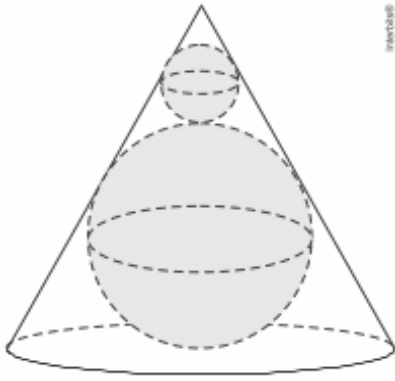
(Fonte: www.facebook.com/superLigInternationalOriginal/photos/a.1384593458432250/3447555148802727)

Sabe-se que a parte da bola sobre a linha branca equivale a uma calota esférica de altura 1,88mm e volume V_c . Considerando a bola de futebol uma esfera de raio 70cm e volume V , assinale a opção que apresenta corretamente a relação entre V e V_c .

- a) $0,1\% \text{ de } V < V_c < 1\% \text{ de } V$
- b) $0,01\% \text{ de } V < V_c < 0,1\% \text{ de } V$
- c) $0,001\% \text{ de } V < V_c < 0,01\% \text{ de } V$
- d) $0,0001\% \text{ de } V < V_c < 0,001\% \text{ de } V$
- e) $V_c < 0,0001\%$

11. (Epcar (Afa)) Um cone equilátero tem, em seu interior, duas esferas tangentes entre si e tangentes ao cone, conforme figura a seguir.

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

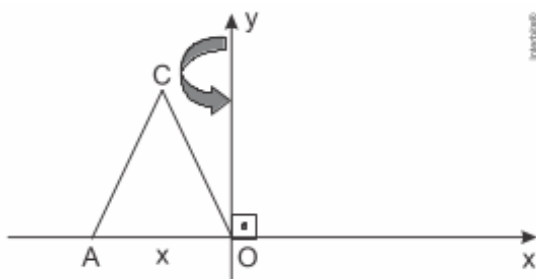


A distância do vértice do cone ao ponto de tangência entre o cone e a esfera de menor raio é igual a $m\sqrt{3} \text{ cm}$

O volume desse cone, em $c \text{ m}^3$, é igual a

- a) $81\pi^4$
- b) $81\pi^3$
- c) $243\pi^4$
- d) $243\pi^3$

12. (Efomm) Ao rotacionar o triângulo equilátero AOC em torno do eixo y , conforme ilustra a figura a seguir, obteremos um sólido. Assinale a alternativa que representa o volume desse sólido, em unidades de volume, sabendo que o vértice O do triângulo AOC sobrepõe-se à origem dos eixos.

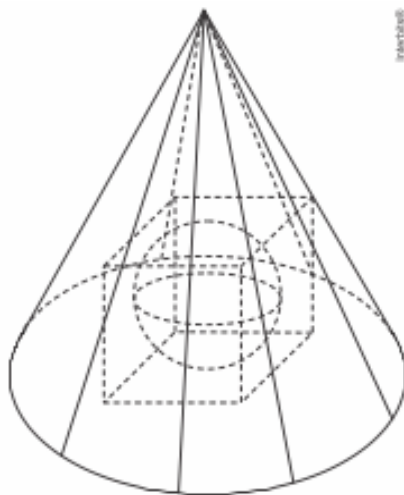


- a) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{6}$
- b) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{4}$
- c) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{2}$
- d) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{24}$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

e) $\frac{7\pi x^3\sqrt{3}}{24}$

13. (Epcar (Afa)) Considere a figura a seguir:



Desenho fora de escala

Nela está representada a inscrição de uma esfera num cubo que, por sua vez, está inscrito num cone equilátero, de tal forma que uma de suas faces está apoiada na base do cone e os vértices da face oposta estão na lateral do cone.

A projeção ortogonal do vértice do cone à sua base contém dois pontos de tangência da esfera com o cubo.

Se R e r são, respectivamente, as medidas do raio da base do cone e do raio da esfera, em cm , então

a) $\frac{R}{r} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{r}{R} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

14. (Esc. Naval) Um fabricante de bolas de tênis (bolas em formatos esféricos) deseja vender as bolas em embalagens cilíndricas (cilindros circulares retos) de raio R e altura H , cada uma. Em cada embalagem há n bolas de tênis de raio R , cada bola. O fabricante deseja que a área total das superfícies das bolas seja igual à área lateral da embalagem (cilindro). Dessa forma, é correto afirmar que:

a) $R = \frac{H}{n}$.

b) $R = \frac{H}{2n}$.

c) $R = \frac{H}{3n}$.

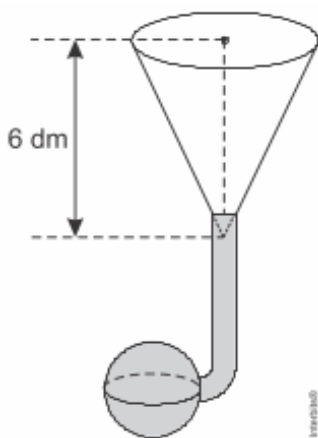
d) $R = \frac{2H}{3n}$.

e) $R = \frac{3H}{4n}$.

15. (Epcar (Afa)) Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.

O conteúdo da caixa d'água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}} dm$.



CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2 , é igual a

- a) 80
- b) 40
- c) 20
- d) 10

16. (Efomm) Seja a esfera de raio R inscrita na pirâmide quadrangular regular de aresta base 2 cm e aresta lateral $\sqrt{38}\text{ cm}$. Sabendo-se que a esfera tangencia todas as faces da pirâmide, o valor de R , em cm , é

- a) $\frac{\sqrt{37}+1}{6}$
- b) $\frac{\sqrt{39}-1}{38}$
- c) $\frac{6\sqrt{38}+12}{17}$
- d) $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$
- e) $\frac{6\sqrt{38}-12}{17}$

17. (Epcar (Afa)) Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi cm^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm^3 , é igual a

- a) $\frac{45}{7}$
- b) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$
- c) $\frac{30\sqrt{3}}{7}$
- d) $\frac{135}{7}$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

18. (Epcar (Afa)) Considere a região E do plano cartesiano dada por

$$E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \\ y + x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de 270° em torno do eixo Ox em unidades de volume, é igual a

- a) $\frac{26\pi}{3}$
- b) 26π
- c) $\frac{13\pi}{2}$
- d) $\frac{13\pi}{3}$

19. (Efomm) Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A , ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

- a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
- b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$
- c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$
- d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
- e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

20. (Esc. Naval) Um cilindro circular reto tem área total A , raio da base R e altura h . Se o volume máximo desse cilindro é expresso por um número real m e a função f da variável real x é definida por $f(x) = (2\pi x^2)^{\frac{1}{3}} + 1$, pode-se dizer que $f(m)$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

- a) $\frac{1}{3} A$
- b) $A + 3$
- c) $\frac{1}{3}(A + 3)$
- d) $\frac{1}{3}(A - 3)$
- e) $A \frac{\sqrt{2}}{3} + 1$

21. (Esc. Naval) Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de 60° com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{1/6}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

- a) $\frac{8}{81\pi}$
- b) $\frac{81\pi}{8}$
- c) $\frac{8\pi}{81}$
- d) $\frac{8\pi}{27}$
- e) $\frac{81}{8\pi}$

22. (Esc. Naval) Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a 20 cm . quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de 12 cm desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos é

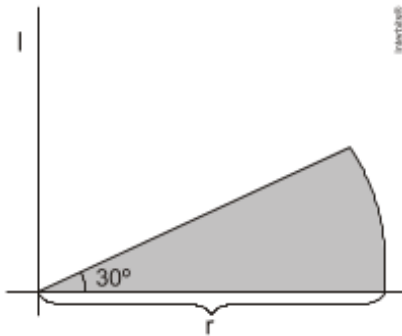
- a) $6.000\pi^2$
- b) $5.000\pi^2$
- c) $4.000\pi^2$
- d) $3.000\pi^2$
- e) $2.000\pi^2$

23. (Esc. Naval) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente $\frac{1}{10}$ da superfície da Terra. Que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a 6400 km

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

- a) 1200 km
- b) 1280 km
- c) 1600 km
- d) 3200 km
- e) 4200 km

24. (Esc. Naval) Considere dois cones circulares retos, de altura H e raio da base 1cm , de modo que o vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume comum aos dois cones coincide com o volume do sólido obtido pela rotação do setor circular, sombreado na figura abaixo, em torno do eixo l . O valor de H é, em cm ,



- a) $(2 + \sqrt{3})r^3$
- b) $2\sqrt{3}r^3$
- c) $\frac{4}{3}r^3$
- d) $2r^3$
- e) $4r^3$

25. (Esc. Naval) Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}}}}\dots\text{cm}$, então seu volume vale

- a) $45 \cdot 10^{-3}\pi\text{dm}^3$
- b) $0,45 \cdot 10^{-3}\pi\text{dm}^3$
- c) $60 \cdot 10^{-3}\pi\text{dm}^3$
- d) $0,15 \cdot 10^3\pi\text{dm}^3$
- e) $60 \cdot 10^3\pi\text{dm}^3$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

26. (Esc. Naval) Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R . Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas são tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a , vale

a) $\frac{(1+2\sqrt{3})a}{3}$

b) $\frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}$

c) $\frac{(3+\sqrt{3})a}{3}$

d) $(1 + 2\sqrt{3})a$

e) $(3 + 2\sqrt{3})a$

27. (Epcar (Afa)) Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade.

Sabe-se que cada mercado receberá 2 barris de vinho, com altura igual a $\frac{1}{5}$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade x de mercados que receberão os barris (com sua capacidade máxima ocupada) é tal que x pertence ao intervalo

a) $0 < x < 20$

b) $20 \leq x < 40$

c) $40 \leq x < 60$

d) $60 \leq x < 80$

28. (Ita) A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 10 cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno de um eixo que contém a hipotenusa $30\pi \text{ cm}^3$. O perímetro desse triângulo é, em cm, igual a

a) $10 + 4\sqrt{7}$

b) $10 + 5\sqrt{7}$

c) $10 + 2\sqrt{10}$

d) $10 + 3\sqrt{10}$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

e) $10 + 4\sqrt{10}$

29. (Ime) Seja o cone de revolução de raio de base R e altura $\frac{3R}{2}$ com a base apoiada em um solo horizontal. Um ponto luminoso está localizado a uma altura $3R$ do solo e distante, horizontalmente, $2R$ do centro da base do cone. A área S da região iluminada no cone é:

a) $\pi R^2 \sqrt{13}$

b) $2\pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{3}$

c) $\pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{2}$

d) $\pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{3}$

e) $\frac{13}{4} \pi R^2$

30. (Ita) A superfície lateral de um cone circular reto corresponde a um setor circular de 216° , quando planificada. Se a geratriz do cone mede 10 cm , então a medida de sua altura, em cm , é igual a

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

31. (Ita) Os volumes de um tronco de cone, de uma esfera de raio 5 cm e de um cilindro de altura 11 cm formam nessa ordem uma progressão aritmética. O tronco de cone é obtido por rotação de um trapézio retângulo, de altura 4 cm e bases medindo 5 cm e 9 cm , em torno de uma reta passando pelo lado de menor medida. Então, o raio da base do cilindro é, em cm , igual a

a) $2\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{3}$

c) 4.

d) $2\sqrt{5}$.

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

e) $2\sqrt{6}$.

32. (Ita) Uma esfera S_1 de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K . Outra esfera, S_2 , de raio r , com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K . O volume de K é igual a

a) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$.

b) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$.

c) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$.

d) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$.

e) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$.

33. (Ita) Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$.

b) $\sqrt[3]{2} - 1$.

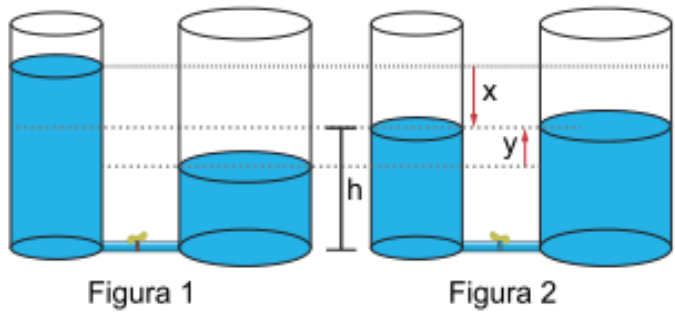
c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$.

d) h .

e) $\frac{h}{2}$.

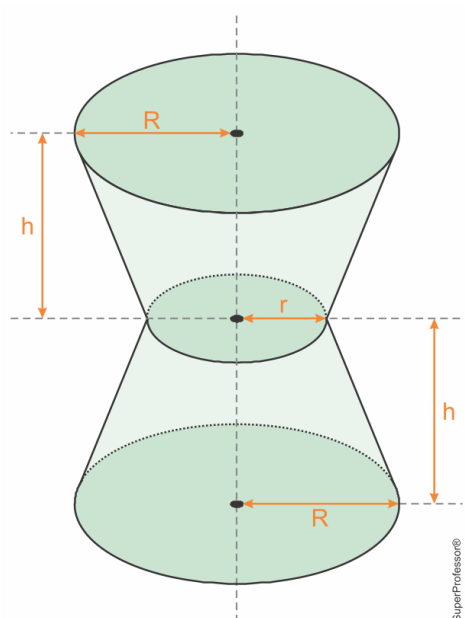
34. (Obmep) Dois reservatórios, ligados por um fino tubo em sua parte inferior, contêm o mesmo volume de água, com diferentes alturas, conforme mostrado na Figura 1. Abrindo-se a torneira do tubo, a água escoar, de modo que as alturas das colunas de água se tornem iguais. O nível de água do reservatório esquerdo baixa x cm e o nível de água do reservatório direito sobe y cm, conforme indicado na Figura 2. Qual é a altura h , em cm, da água em equilíbrio?

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



- a) $\frac{2xy}{x+y}$
- b) $\frac{x+y}{2}$
- c) $\sqrt{xy}$
- d) $\frac{x+y}{xy}$
- e) $\frac{2xy}{x-y}$

35. (Fuvest) Um designer de produtos deseja fabricar um vaso para flores conforme a figura a seguir.



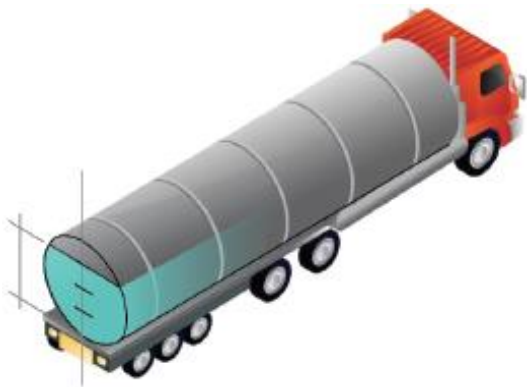
Sabe-se que a base e o topo do vaso são uma circunferência de raio R que mede 10 cm, a parte central é uma circunferência de raio r de 5 cm e a medida h mede 12 cm.

Qual é a capacidade volumétrica desse vaso em cm^3 ?

- a) 1400π
- b) 2100π
- c) 2400π
- d) 2600π

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ ENe) 2800π

36. (Fuvest) O reservatório de um caminhão-pipa tem a forma de um cilindro circular reto com eixo horizontal e dimensões internas de 6 metros de comprimento e 2 metros de diâmetro. Uma escola contratou o serviço do caminhão-pipa para abastecer sua caixa d'água. Após o abastecimento, o motorista percebeu que o reservatório do caminhão estava cheio até $3/4$ de sua altura, conforme ilustrado na figura.



Qual foi o volume, em metros cúbicos, de água utilizada para abastecer a caixa d'água da escola, sabendo que o reservatório do caminhão estava cheio antes do abastecimento?

a) $\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

b) $\left(2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

c) $\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

d) $\left(4\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

e) $\left(4\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

37. (Fuvest) Suponha, para simplificar, que a Terra é perfeitamente esférica e que a linha do Equador mede 40.000 km . O trajeto que sai do Polo Norte, segue até a linha do Equador pelo meridiano de Greenwich, depois se desloca ao longo da linha do Equador até o meridiano $45^\circ L$ e então retorna ao Polo Norte por esse meridiano tem comprimento total de

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

- a) 15.000 *km*.
- b) 20.000 *km*.
- c) 25.000 *km*.
- d) 30.000 *km*.
- e) 35.000 *km*.

38. (Fuvest) Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 *m*. Sua altura é igual a 12 *m*. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:

- π é aproximadamente 3,14.
 - O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- a) 4 horas e 50 minutos.
 - b) 5 horas e 20 minutos.
 - c) 5 horas e 50 minutos.
 - d) 6 horas e 20 minutos.
 - e) 6 horas e 50 minutos.

39. (Fuvest) A esfera ε , de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α . O plano β é paralelo a α e contém O . Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α , é igual a

- a) $\frac{\sqrt{3}r^3}{4}$
- b) $\frac{5\sqrt{3}r^3}{16}$
- c) $\frac{3\sqrt{3}r^3}{8}$
- d) $\frac{7\sqrt{3}r^3}{16}$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

e) $\frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

40. (Fuvest) Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semiesfera de raio r ; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio $2r$ e altura h ; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio x e altura h .

Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias, comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão x/h é igual a:

a) $\frac{(\sqrt{3})}{6}$

b) $\frac{(\sqrt{3})}{3}$

c) $\frac{(2\sqrt{3})}{3}$

d) $\sqrt{3}$

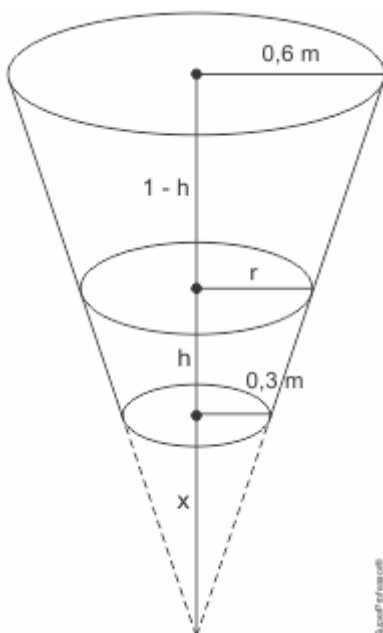
e) $\frac{(4\sqrt{3})}{3}$

Gabarito

Resposta da questão 1:

[C]

Por semelhança de triângulos, obtemos:



CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\frac{x}{x+1} = \frac{0,3}{0,6} \Rightarrow x = 1 \text{ m}$$

$$\frac{1+h}{2} = \frac{r}{0,6} \Rightarrow r = 0,3 + 0,3h$$

O volume de água é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h+1) - \frac{1}{3}\pi \cdot 0,3^2 \cdot 1$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(0,3 + 0,3h)^2(h+1) - 0,03\pi$$

$$V = \frac{1}{3}\pi 0,3^2(1+2h+h^2)(h+1) - 0,03\pi$$

$$V = 0,03\pi(3h+3h^2+h^3+1) - 0,03\pi$$

$$V = 0,03\pi(3h+3h^2+h^3)$$

$$V = 0,09\pi h + 0,09\pi h^2 + 0,03\pi h^3$$

Logo:

$$\frac{dV}{dt} = (0,09\pi + 0,18\pi h + 0,09\pi h^2) \frac{dh}{dt}$$

$$5 = (0,09\pi + 0,18\pi \cdot 0,5 + 0,09\pi \cdot 0,5^2) \frac{dh}{dt}$$

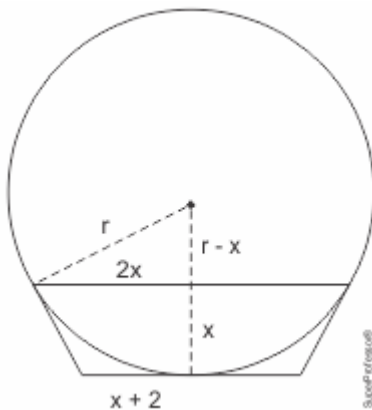
$$5 = 0,2025\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} \cong \frac{25}{\pi} \text{ m/min}$$

Resposta da questão 2:

[D]

Sendo r o raio da esfera, temos que:



$$r^2 = (2x)^2 + (r-x)^2$$

$$r^2 = 4x^2 + r^2 - 2rx + x^2$$

$$2rx = 5x^2$$

$$x = \frac{2r}{5}$$

Utilizando as fórmulas do tronco de cone e da calota esférica, obtemos:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\begin{aligned}
 V_{tronco} &= \frac{\pi h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{3} \cdot ((2x)^2 + 2x \cdot (x+2) + (x+2)^2) \\
 &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2r}{5} \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{2r}{5} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2r}{5} \cdot \left(\frac{2r}{5} + 2 \right) + \left(\frac{2r}{5} + 2 \right)^2 \right) = \frac{\pi(56r^3 + 160r^2 + 200r)}{125} \\
 V_{calota} &= \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h) = \frac{\pi x^2}{3} \cdot (3r - x) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2r}{5} \right)^2 \cdot \left(3r - \frac{2r}{5} \right) = \frac{52r^3}{125}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 V_{sobra} &= V_{tronco} - V_{calota} \\
 420 &= \frac{3(56r^3 + 160r^2 + 200r)}{125} - \frac{52r^3}{125} \\
 r^3 + 40r^2 + 50r - 2625 &= 0 \\
 (r - 15)(r^2 + 55r + 875) &= 0 \\
 r &= 15 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Sendo assim, a área da esfera é igual a:

$$\begin{aligned}
 A &= 4\pi r^2 = 4 \cdot 3 \cdot 15^2 \\
 \therefore A &= 2700 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 3:

[A]

Simplificando A e B, obtemos:

$$\begin{aligned}
 A &= \tan^2(x)[1 + \cos(2x)] = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} [1 + \cos^2(x) - \sin^2(x)] = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot 2\cos^2(x) = 2\sin^2(x) \\
 B &= 2\cos^2(x) + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - [\cos^2(x) - \sin^2(x)] = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

Logo:

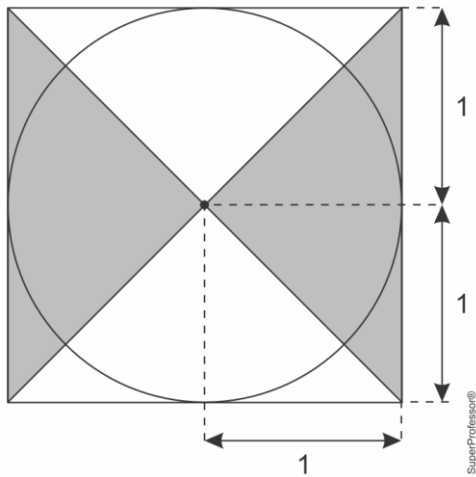
$$\begin{aligned}
 2\sec^2(x)\cot^2(t) - 2\cot^2(t) &= 2\sin^2(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow 2\cot^2(t) \left[\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right] = \frac{2\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
 \Rightarrow \cot^2(t) \cdot \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \Rightarrow \cot^2(t) \tan^2(x) = \tan^2(x) \Rightarrow \cot(t) = \pm 1 \Rightarrow \tan(t) = \pm 1 \\
 \Rightarrow S &= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi
 \end{aligned}$$

Raio da esfera:

$$V_E = \frac{S}{3} \Rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow R = 1$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

A área total do cilindro e o volume descrito são dados por:



$$A_C = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 + 2\pi \cdot 1 \cdot 2 = 6\pi$$

$$V_{AC} = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto:

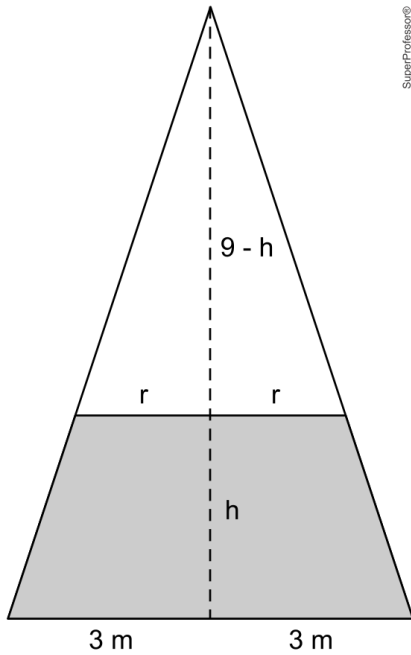
$$\frac{4A_C}{V_{AC}} = \frac{4 \cdot 6\pi}{\frac{4\pi}{3}} = 18$$

Resposta da questão 4:

[B]

Da descrição do problema, temos:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



Relação entre r e h :

$$\frac{9-h}{9} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{9-h}{3}$$

Volume de água:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 9}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (9-h)}{3} = 27\pi - \frac{\pi(9-h)}{3} \cdot \left(\frac{9-h}{3}\right)^2 = 27\pi - \frac{(9\pi - \pi h)}{3} \cdot \frac{(81 - 18h + h^2)}{9} \\ &= 27\pi - \frac{729\pi - 162\pi h + 9\pi h^2 - 81\pi h + 18\pi h^2 - \pi h^3}{27} = \frac{243\pi h - 27\pi h^2 + \pi h^3}{27} \\ &= 9\pi h - \pi h^2 + \frac{\pi h^3}{27} \end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{dV}{dt} = 9\pi \frac{dh}{dt} - 2\pi h \frac{dh}{dt} + \frac{\pi h^2}{9} \frac{dh}{dt}$$

Como $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ e $h = 3 \text{ m}$:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$2 = \pi \frac{dh}{dt} \left(9 - 2 \cdot 3 + \frac{3^2}{9} \right)$$

$$2 = 4\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi} m/s$$

Resposta da questão 5:

[D]

Vamos considerar:

V_L : volume do líquido

V_C : volume do cone

V_E : volume da esfera

$$\frac{V_L}{V_C} = \left(\frac{H}{2} \right)^3 \Rightarrow \frac{V_L}{V_C} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_L = \frac{V_C}{8} \quad (I)$$

$$\frac{V_L + V_E}{V_C} = \left(\frac{3H}{4} \right)^3 \Rightarrow \frac{V_L + V_E}{V_C} = \frac{27}{64} \Rightarrow V_L + V_E = \frac{27 \cdot V_C}{64} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{V_C}{8} + V_E &= \frac{27 \cdot V_C}{64} \Rightarrow 8V_C = 64V_E = 27V_C \Rightarrow 19V_C = 64V_E \Rightarrow \\ 19V_C &= 64 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 19^3 \end{aligned}$$

Admitindo $\pi = 3$, temos:

$$V_C = 2^8 \cdot 19^2$$

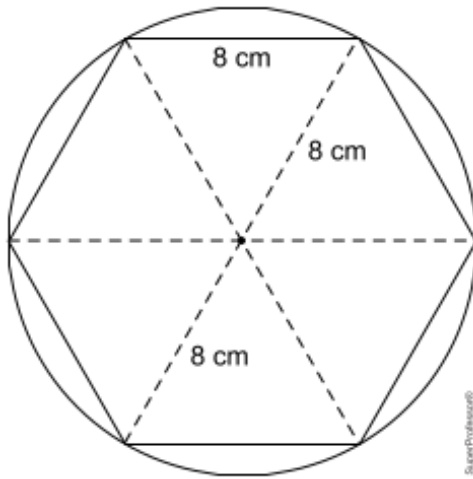
Portanto, o volume do cone é um número divisível por 2^5 .

Resposta da questão 6:

[D]

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

O raio da base do cone e do cilindro vale 8 cm conforme pode ser observado na figura abaixo (que ilustra o hexágono inscrito na base do cone):



Altura do cone:

$$128\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot h_{\text{cone}}$$

$$h_{\text{cone}} = 6 \text{ cm}$$

Altura do cilindro:

$$128\pi = \pi \cdot 8^2 \cdot h_{\text{cilindro}}$$

$$h_{\text{cilindro}} = 2 \text{ cm}$$

Logo:

$$\frac{h_{\text{cone}}}{h_{\text{cilindro}}} = \frac{6}{2} = 3$$

Resposta da questão 7:

[D]

Alturas das partes da esfera após a divisão proporcional:

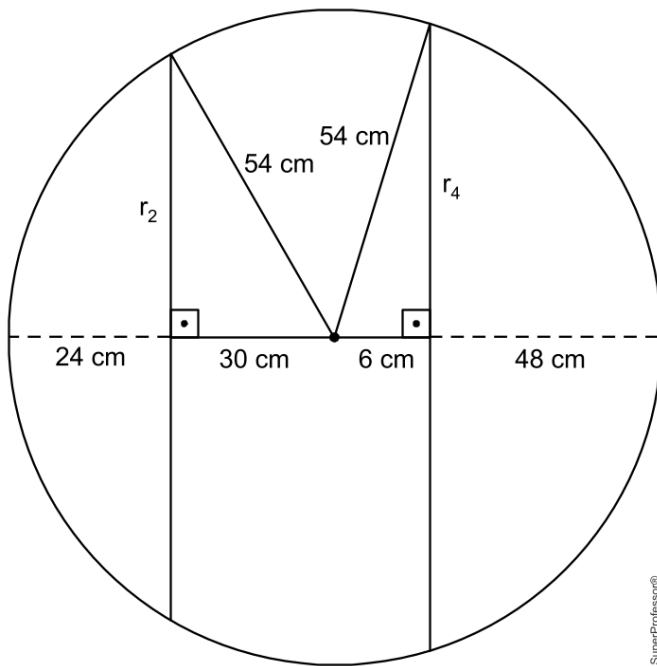
$$2k + 3k + 4k = 2 \cdot 54 \Rightarrow k = 12$$

$$h_2 = 2 \cdot 12 = 24$$

$$h_3 = 3 \cdot 12 = 36$$

$$h_4 = 4 \cdot 12 = 48$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



$$54^2 = r_2^2 + 30^2 \Rightarrow r_2^2 = 2016$$

$$54^2 = r_4^2 + 6^2 \Rightarrow r_4^2 = 2880$$

Utilizando as fórmulas $A_{\text{calota}} = 2\pi r h_{\text{calota}}$ e $V_{\text{calota}} = \frac{1}{3}\pi h_{\text{calota}}^2 (3r - h_{\text{calota}})$, temos:

$$\begin{cases} A_2 = 2\pi \cdot 54 \cdot 24 + \pi \cdot 2016 = 4608\pi \text{ cm}^2 \\ V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 24^2 \cdot (3 \cdot 54 - 24) = 26496\pi \text{ cm}^3 \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{26496\pi}{4608\pi} = 5,75$$

$$\begin{cases} A_4 = 2\pi \cdot 54 \cdot 48 + \pi \cdot 2880 = 8064\pi \text{ cm}^2 \\ V_4 = \frac{1}{3}\pi \cdot 48^2 \cdot (3 \cdot 54 - 48) = 87552\pi \text{ cm}^3 \end{cases} \Rightarrow C_4 = \frac{87552\pi}{8064\pi} \cong 10,86$$

$$\begin{cases} A_3 = 4\pi \cdot 54^2 - 2592\pi - 5184\pi + \pi \cdot 2016 + \pi \cdot 2880 = 8784\pi \text{ cm}^2 \\ V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 54^3 - 26496\pi - 87552\pi = 95904\pi \text{ cm}^3 \end{cases} \Rightarrow C_3 = \frac{95904\pi}{8784\pi} \cong 10,92$$

$$C = 5,75 + 10,86 + 10,92 = 27,53$$

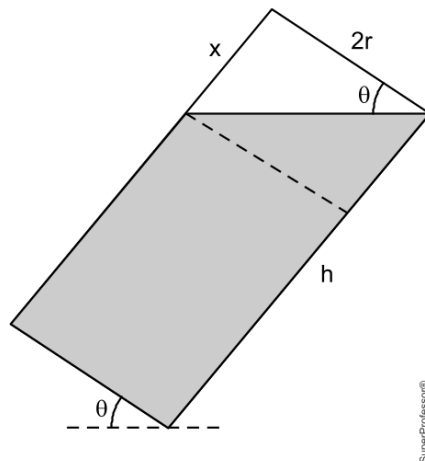
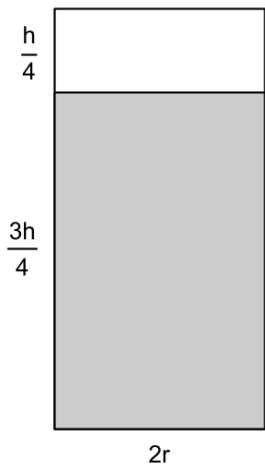
$$\therefore 25 < C < 30$$

Resposta da questão 8:

[E]

Igualando os volumes vazios em ambos os casos, obtemos:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{4} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot x}{2}$$

$$x = \frac{h}{2} = \frac{13}{2} \text{ cm}$$

Logo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2r} = \frac{13/2}{6} = \frac{13}{12}$$

$$\therefore \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{13}{12} \right)$$

Resposta da questão 9:

[A]

Do volume do cilindro, obtemos:

$$\pi r^2 h = 300$$

$$h = \frac{300}{\pi r^2}$$

A área total do cilindro é dada por:

$$A_T = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$$

$$A_T = 2 \pi r^2 + 2 \pi r \cdot \frac{300}{\pi r^2}$$

$$A_T = 2 \pi r^2 + \frac{600}{r}$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

A menor área total possível ocorre para:

$$\begin{aligned} \left(2\pi r^2 + \frac{600}{r}\right)' &= 0 \\ 4\pi r - \frac{600}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r &= \frac{600}{r^2} \\ \pi r^3 &= 150 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \text{ cm} \end{aligned}$$

Sendo assim, h vale, aproximadamente:

$$\begin{aligned} h &= \frac{300}{\sqrt{n\left(\frac{150}{\pi}\right)^2}} = \frac{300}{\sqrt[3]{\pi^3 \cdot \frac{150^2}{\pi^2}}} = \frac{300}{\sqrt[3]{\pi^3 \cdot \frac{150^2}{\pi^2}}} \\ &\cong \frac{300}{\sqrt[3]{3 \cdot 150^2}} \cong \frac{300}{\sqrt[3]{3^3 \cdot 50^2}} \cong \frac{300}{3\sqrt[3]{2500}} \cong \frac{100}{13,7} \cong 7,25 \end{aligned}$$

Resposta da questão 10:

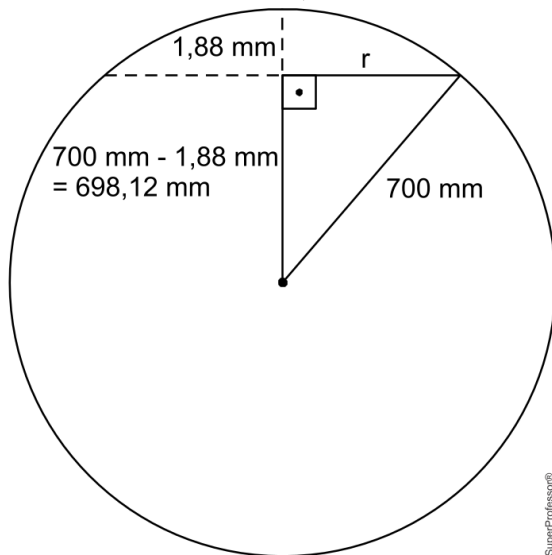
[D]

Volume da bola:

$$V = \frac{4\pi \cdot 700^3}{3} \text{ mm}^3$$

Raio da calota:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



$$700^2 = 698,12^2 + r^2$$

$$r \cong 51,3mm$$

Volume da calota:

$$V_c = \frac{\pi h}{6} \cdot (3r^2 + h^2) = \frac{\pi \cdot 1,88}{6} \cdot (3 \cdot 51,3^2 + 1,88^2)$$

$$V_c \cong 2475\pi mm^3$$

Logo:

$$\frac{V_c}{V} = \frac{2475\pi}{\frac{4\pi \cdot 700^3}{3}} = 5,4 \cdot 10^{-6} = 0,00054\%$$

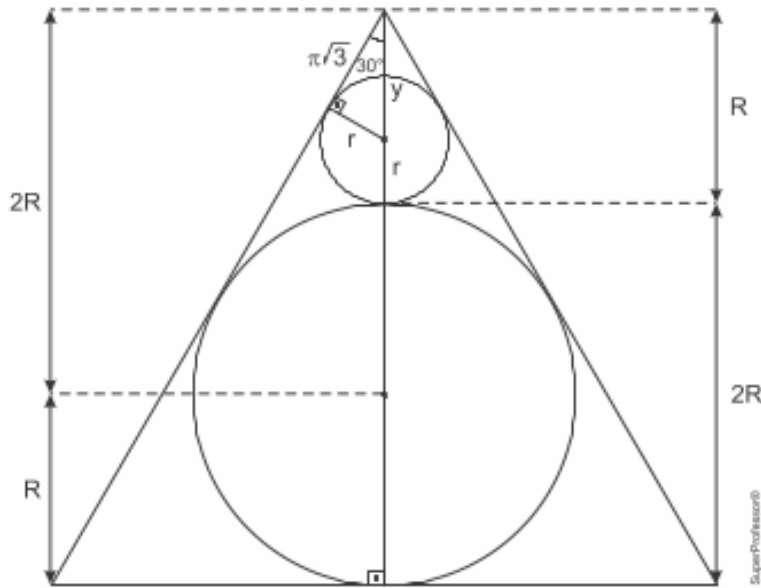
Ou seja, 0,0001% de $V < V_c < 0,001\%$ de V .

Resposta da questão 11:

[A]

Da figura abaixo, obtemos o raio das esferas:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{\pi\sqrt{3}} \Rightarrow r = \pi \text{ cm} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{y} \Rightarrow y = 2\pi \text{ cm} \\ R &= r + y = 3\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

Altura do cone:

$$h_c = 3R = 9\pi \text{ cm}$$

Raio da base do cone:

$$9\pi = \frac{2R_c\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R_c = 3\sqrt{3}\pi \text{ cm}$$

Volume do cone vale:

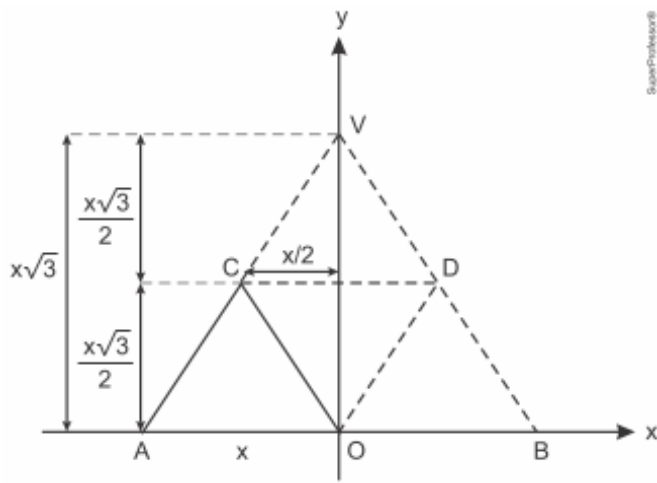
$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{3}\pi \cdot (3\sqrt{3}\pi)^2 \cdot 9\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3\pi^2 \cdot 9\pi \\ \therefore V_c &= 81\pi^4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Resposta da questão 12:

[B]

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

O volume procurado é dado pelo volume do cone equilátero ABV menos os volumes dos cones equiláteros CDO e CDV como ilustrado na figura abaixo:



$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot x\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{3} - \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{12}$$

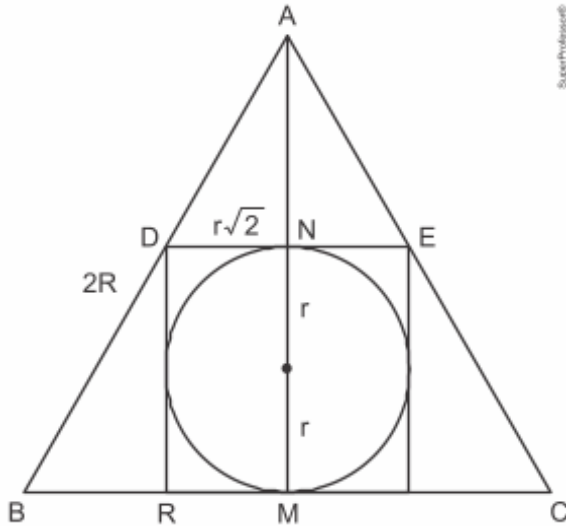
$$\therefore V = \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{4}$$

Resposta da questão 13:

[B]

Como o cone é equilátero, temos que:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



$$\overline{AM} = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

$$\overline{AN} = \overline{AM} - \overline{NM} = R\sqrt{3} - 2r$$

Observação: perceba que o raio do cone ADE é equivalente à diagonal da face superior do cubo, e, portanto, igual a $r\sqrt{2}$

Por semelhança de triângulos entre o $\triangle ABM$ e o $\triangle ADN$, obtemos:

$$\frac{\overline{DN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{R} = \frac{R\sqrt{3} - 2r}{R\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\sqrt{6} = R\sqrt{3} - 2r \Rightarrow r(\sqrt{6} + 2) = R\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} \cdot \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} - 2} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 - 4}$$

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$$

Resposta da questão 14:

[B]

Devemos ter que:

$$A_{\text{bolas}} = A_{\ell_{\text{sup}}}$$

$$n \cdot 4mR^2 = 2mRH$$

$$\therefore R = \frac{H}{2n}$$

Resposta da questão 15:

[A]

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Calculando, inicialmente, o volume total das trinta esferas.

$$V = 30 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = 30 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\pi^{-1})^3$$

$$V = 40 \text{ dm}^3$$

Como 40 dm^3 é o volume de metade do cone, concluímos que o volume do cone é 80 dm^3 .
Vamos, então, determinar a medida do raio deste cone.

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 6 = 80 \Rightarrow r^2 = \frac{40}{\pi}$$

Calculando, agora, a área do cone equilátero sugerido, temos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

Como o cone é equilátero, devemos considerar $g = 2r$.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot r \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{40}{\pi} \Rightarrow A_L = 80 \text{ dm}^2$$

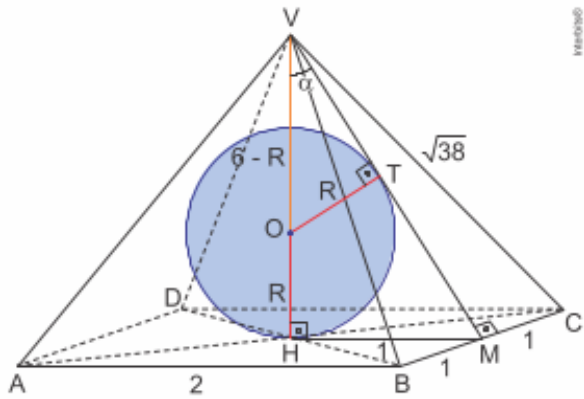
Resposta: [A] 80 dm^2

Resposta da questão 16:

[D]

Do enunciado, temos a seguinte figura:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



No triângulo VMC,

$$\sqrt{38}^2 = 1^2 + (VM)^2$$
$$VM = \sqrt{37}$$

No triângulo VHM,

$$\sqrt{37}^2 = (VH)^2 + 1^2$$
$$VH = 6$$

Note que:

$$\begin{aligned} \text{TVO} &= \text{MVH} = \alpha \\ V^\top \text{TO} &= \text{VHM} = 90^\circ \end{aligned}$$

Logo, VTO e VHM são triângulos semelhantes.

Daí,

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\begin{aligned}\frac{R}{1} &= \frac{6-R}{\sqrt{37}} \\ \sqrt{37} \cdot R &= 6-R \\ R \cdot (\sqrt{37} + 1) &= 6 \\ R &= \frac{6}{\sqrt{37} + 1} \\ R &= \frac{6}{\sqrt{37} + 1} \cdot \frac{\sqrt{37} - 1}{\sqrt{37} - 1} \\ R &= \frac{6 \cdot (\sqrt{37} - 1)^2}{\sqrt{37}} - 1^2 \\ R &= \frac{6 \cdot (\sqrt{37}^2 - 1)}{36} \\ R &= \frac{\sqrt{37}^3 - 1}{6}\end{aligned}$$

Resposta da questão 17:

[A]

Calculando:

$$\begin{aligned}\text{Cone} &\rightarrow \frac{10\pi\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{10}{7} = \frac{1}{3} \cdot R^3 \rightarrow R^3 = \frac{30}{7} \\ \text{Pirâmide} &\rightarrow \begin{cases} \ell = R \text{ (hexágono regular)} \\ h = R\sqrt{3} \text{ (cone equilátero)} \\ V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \end{cases} \\ V &= \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \cdot R\sqrt{3} = \frac{18}{12} \cdot \frac{30}{7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{7} = \frac{90}{14} \rightarrow V = \frac{45}{7}\end{aligned}$$

Resposta da questão 18:

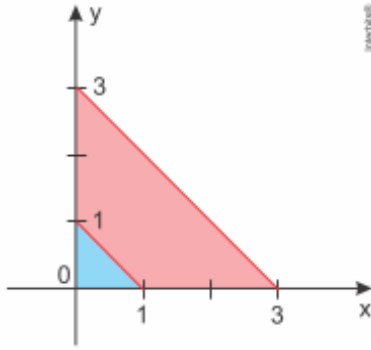
[C]

Reescrevendo as duas primeiras inequações como equações, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{y}{3} + \frac{x}{3} &\leq 1 \rightarrow \frac{y}{3} + \frac{x}{3} = 1 \rightarrow y = 3 - x \\ y + x &\geq 1 \rightarrow y + x = 1 \rightarrow y = 1 - x\end{aligned}$$

Tendo estas duas equações de retas e sabendo que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, pode-se construir o gráfico a seguir, que apresenta a região E (em rosa) indicada no enunciado:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



Rotacionando a área E (em rosa) em 360° em torno do eixo x teremos um cone “oco” de altura e raio 3, com uma concavidade também em formato de cone, de altura e raio igual a 1 (região indicada em azul). Assim, para se conseguir o volume somente do sólido gerado pela rotação da área rosa E, podemos calcular o volume total do cone de altura e raio 3 (que chamaremos de V) e subtrair dele o volume do cone gerado pela rotação da área representada em azul (que chamaremos de V_{azul}). Assim, o volume do sólido gerado pela rotação da área E (V_E) será:

$$V_E = V - V_{\text{azul}}$$

Sendo o volume de um cone de revolução dado pela fórmula $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h$, temos que:

$$V_E = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \right) = 9\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow V_E = \frac{26\pi}{3}$$

Porém, o solicitado no enunciado não é uma rotação de 360° em torno do eixo x , mas sim uma rotação de 270° . Nesse caso, o volume final v'_E será correspondente a $\frac{3}{4}v_E$. Ou seja:

$$V'_E = 3/4 V_E = \frac{3}{4} \cdot \frac{26\pi}{3} = \frac{78\pi}{12} \rightarrow V'_E = \frac{13\pi}{2}$$

Resposta da questão 19:

[E]

Tem-se que

$$6A^2 = 4\pi R^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} R.$$

Portanto, a resposta é

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\frac{A^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}R\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$

Resposta da questão 20:

[C]

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R \cdot (R + h) \rightarrow h = \frac{A}{2\pi R} - R$$

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot \left(\frac{A}{2\pi R} - R\right) = \frac{AR}{2} - \pi R^3$$

$$V' = \frac{A}{2} - mR^2 \rightarrow \frac{A}{2} - mR^2 = 0 \rightarrow R = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$$

$$h = \frac{A}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \rightarrow h = \frac{A}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}}$$

$$m = V_{\text{máx}} = mR^2 h = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right)^2 \cdot \left(\frac{A}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}}\right) \rightarrow m = \frac{A^2}{18\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}}$$

$$f(x) = (2\pi x^2)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$f(m) = \left(2\pi \left(\frac{A^2}{18\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} + 1 = \left(\frac{A^3}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 = \frac{A}{3} + 1 = \frac{1}{3}(A + 3)$$

Resposta da questão 21:

[C]

Sejam ℓ e h , respectivamente, a medida da aresta da base e a medida da altura do prisma. Assim, a medida da diagonal da base mede $\ell\sqrt{2}$ e, portanto, temos

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\ell\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \ell\sqrt{6} \text{ u. c.}$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Por outro lado, se o prisma tem área lateral igual a $36\sqrt{6}$, vem

$$4\ell \cdot h = 36\sqrt{6} \Leftrightarrow \ell \cdot \ell \cdot \sqrt{6} = 9\sqrt{6} \\ \Rightarrow \ell = 3\text{u.c.}$$

Em consequência, o volume do prisma é igual a $3^2 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6} \text{ u. v.}$

O volume da esfera é dado por

$$\frac{4\pi}{3} (24^{1/6})^3 = \frac{4\pi}{3} (6 \cdot 4)^{1/2} = \frac{8\pi}{3} \sqrt{6} \text{ u. v.}$$

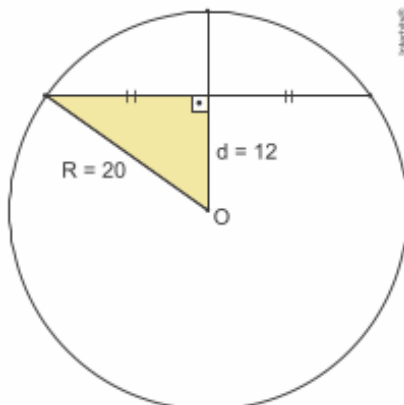
A razão pedida é

$$\frac{\frac{8\pi}{3} \sqrt{6}}{27\sqrt{6}} = \frac{8\pi}{81}.$$

Resposta da questão 22:

[B]

Com as informações do enunciado, temos:



CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

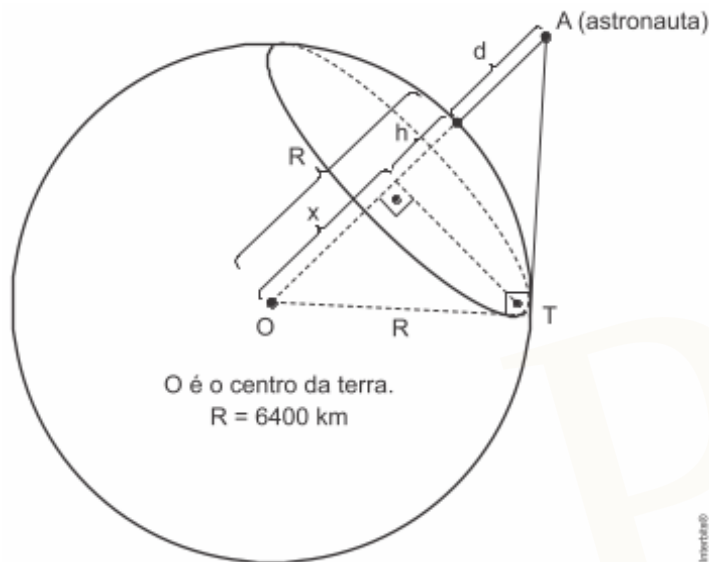
Observando o triângulo retângulo destacado, percebe-se que o cateto menor mede 12 e o cateto maior (utilizando o Teorema de Pitágoras) mede 16. Logo, um dos lados da secção retangular mede 32; o outro lado é igual a altura h do cilindro. Assim, pode-se escrever:

$$32h = \pi \cdot 20^2 \rightarrow h = \frac{25\pi}{2}$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{25\pi}{2} \rightarrow V_{cilindro} = 5000\pi^2$$

Resposta da questão 23:

[C]



Sabemos que a área da calota esférica (avistada pelo astronauta) é um décimo da área da superfície esférica. Temos, então, a seguinte equação:

$$2\pi Rh = \frac{4\pi R^2}{10} \Rightarrow h = \frac{R}{5}$$

Calculando a medida x da figura:

$$x = R - h \Rightarrow x = R - \frac{R}{5} \Rightarrow x = \frac{4R}{5}$$

Aplicando uma relação métrica no triângulo ATO, temos:

$$R^2 = AO \cdot \frac{4}{5} \cdot R \Rightarrow AO = \frac{5R}{4}$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Logo, a distância d pedida será dada por:

$$d = \frac{5R}{4} - R \Rightarrow d = \frac{R}{4} \Rightarrow d = \frac{6400}{4} \Rightarrow d = 1600km.$$

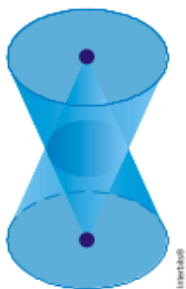
Resposta da questão 24:

[E]

O volume do sólido de revolução corresponde ao volume do segmento esférico de altura $h = \frac{r}{2}$, com raios $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ e $r_2 = r$. subtraído do volume do cone reto de mesma altura h e raio da base r_1 . ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2] - \frac{\pi}{3} r_1^2 h &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2 - 2r_1^2) \\ &= \frac{\pi r}{12} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r \right)^2 + 3r^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o volume comum aos dois cones de altura H e raio da base 1 cm é igual ao volume de dois cones de altura $\frac{H}{2}$ e raio $R = \frac{1}{2}\text{ cm}$, conforme a figura.



Portanto,

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{H}{2} = \frac{\pi^3}{3} \Leftrightarrow H = 4r^3.$$

Resposta da questão 25:

[C]

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Sendo $r = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}\dots}}}$ cm o raio da esfera, temos

$$r = \sqrt[4]{45\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}\dots}} \Rightarrow r^4 = 45r$$

$$\Leftrightarrow r(r^3 - 45) = 0$$

$$\Rightarrow r^3 = 45.$$

Portanto, o resultado pedido é

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 45$$

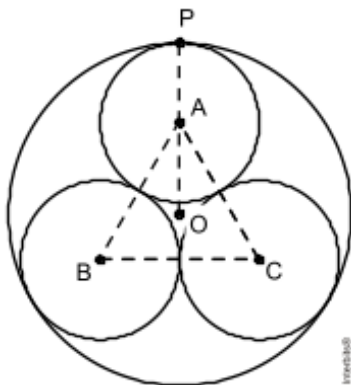
$$= 60\pi \text{ cm}^3$$

$$= 60 \cdot 10^{-3} \pi \text{ dm}^3.$$

Resposta da questão 26:

[B]

Considere a figura, em que $\overline{OP} = R$ e ABC é um triângulo equilátero de lado $2a$.



Como O é o baricentro de ABC , segue-se que

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\overline{OA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \quad \Leftrightarrow R = \frac{2a\sqrt{3}}{3} + a \\ &\Leftrightarrow R = \frac{(3 + 2\sqrt{3})a}{3}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 27:

[C]

Considerando V_T o volume do tanque e V_B o volume do barril:

$$\begin{aligned}V_T &= \pi r^2 \cdot h \\ V_B &= \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{80} = \frac{V_T}{80}\end{aligned}$$

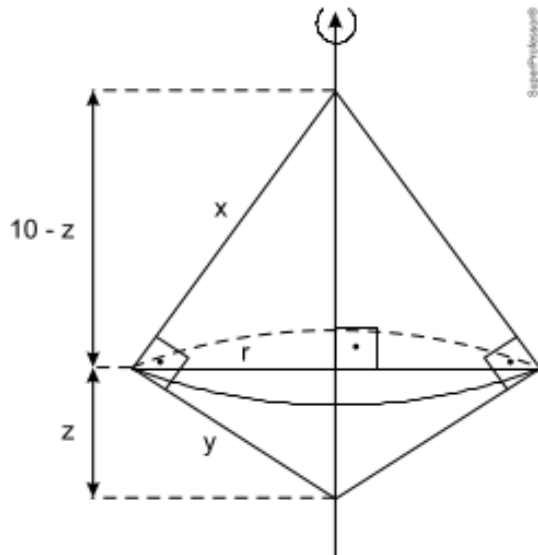
Portanto, $x = 80$ barris e 40 mercados.

Resposta da questão 28:

[E]

Do volume do sólido, obtemos:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN



$$\frac{\pi r^2(10 - z)}{3} + \frac{\pi r^2 z}{3} = 30\pi$$

$$10r^2 - r^2 z + r^2 z = 90$$

$$r = 3 \text{ cm}$$

Das relações métricas no triângulo retângulo, obtemos:

$$\begin{cases} xy = 10 \cdot 3 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 60 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} +$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 160 \Rightarrow (x + y)^2 = 160$$

$$\therefore x + y = 4\sqrt{10}$$

Portanto, o perímetro do triângulo vale $10 + 4\sqrt{10} \text{ cm}$

Resposta da questão 29:

[D]

Geratriz do cone:

$$g^2 = R^2 + \left(\frac{3R}{2}\right)^2 = \frac{13R^2}{4}$$

$$g = R \frac{\sqrt{13}}{2}$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Área lateral do cone:

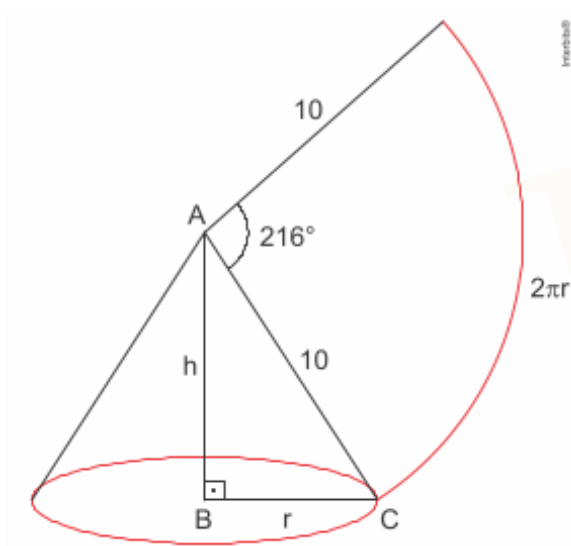
$$A_{\ell} = \pi R g = \pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{2}$$

A área iluminada deve ser menor do que a área lateral do cone. Sendo assim, apenas a alternativa [D] satisfaz esta condição.

Resposta da questão 30:

[D]

Do enunciado, temos:



Da figura, temos:

$$\begin{aligned} 2\pi r \cdot 360^\circ &= 2\pi \cdot 10 \cdot 216 \\ r &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

No triângulo ABC,

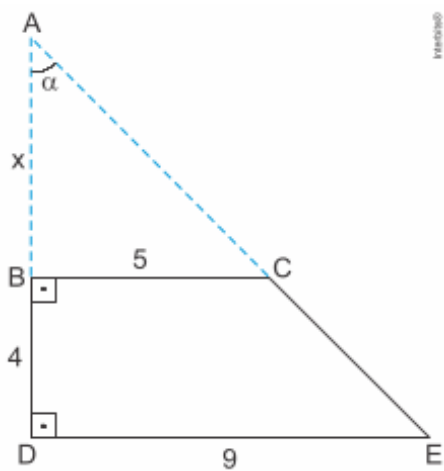
$$\begin{aligned} 10^2 &= h^2 + r^2 \\ 10^2 &= h^2 + 6^2 \\ h^2 &= 100 - 36 \\ h &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Resposta da questão 31:

[B]

Do enunciado, temos:



Os triângulos ABC e ADE são semelhantes, logo,

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5}{9}$$

$$x = 5$$

Portanto, o volume do tronco do cone é:

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 9^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 5$$

$$\frac{604 \pi}{3} \text{ cm}^3$$

O volume de uma esfera de raio 5 cm é:

$$\frac{4}{3} \pi 5^3$$

$$\frac{500 \pi}{3} \text{ cm}^3$$

Sendo r a medida do raio da base do cilindro, seu volume é dado por:

$$\pi r^2 \cdot 11$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Dessa forma, temos:

$$PA \left(\frac{604\pi}{3}, \frac{500\pi}{3}, 11\pi r^2 \right)$$

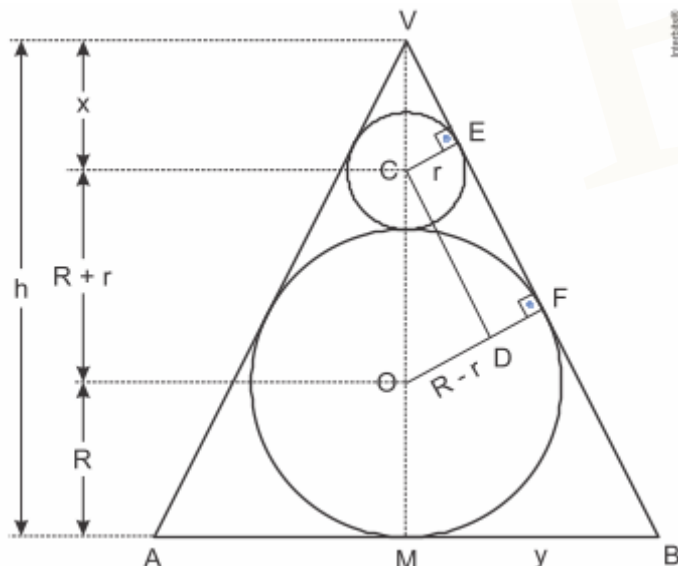
Então,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{500\pi}{3} &= \frac{604\pi}{3} + 11\pi^2 \\ \frac{1000\pi}{3} &= \frac{604\pi + 33\pi^2}{3} \\ 1000\pi &= \pi \cdot (604 + 33r^2) \\ 396 &= 33r^2 \\ r^2 &= 12 \\ r &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Resposta da questão 32:

[B]

Consideremos a secção meridiana do cone mostrada na figura abaixo:.



Considerando que O é o centro da esfera inscrita no cone e C o centro da outra esfera tangente à superfície lateral do cone e à esfera inscrita neste cone. Considere também que o segmento CD é paralelo ao segmento EF .

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo COD, temos:

$$CD^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \Rightarrow CD = 2\sqrt{Rr}$$

Considerando que os triângulos ACE e COD são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{x}{R + r} = \frac{r}{R - r} \Rightarrow x = \frac{r \cdot (R + r)}{R - r}$$

Portanto, a altura h do triângulo será dada por:

$$h = x + R + r + R \Rightarrow h = \frac{2 \cdot R^2}{R - r}$$

Considerando, agora, que os triângulos COD e COD são semelhantes, escrevemos:

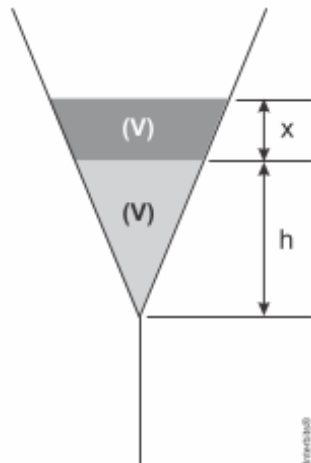
$$\frac{\frac{2\sqrt{R \cdot r}}{\frac{2 \cdot R^2}{R - r}}}{\frac{R - r}{y}} = \frac{R - r}{y} \Rightarrow y = \frac{R^2}{\sqrt{R \cdot r}}$$

Portanto, o volume do cone será:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot y^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R^2}{\sqrt{R \cdot r}} \right)^2 \cdot \frac{2 \cdot R^2}{R - r} = \frac{2 \cdot \pi R^5}{3 \cdot r \cdot (R - r)}$$

Resposta da questão 33:

[C]



CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Admitindo que x seja a altura pedida, v o volume do líquido de altura h e utilizando a razão entre os volumes de cones semelhantes, temos:

$$\left(\frac{x+h}{h}\right)^3 = \frac{2v}{v} \Rightarrow \frac{x+h}{h} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = h \cdot (\sqrt[3]{2} - 1).$$

Resposta da questão 34:

[E]

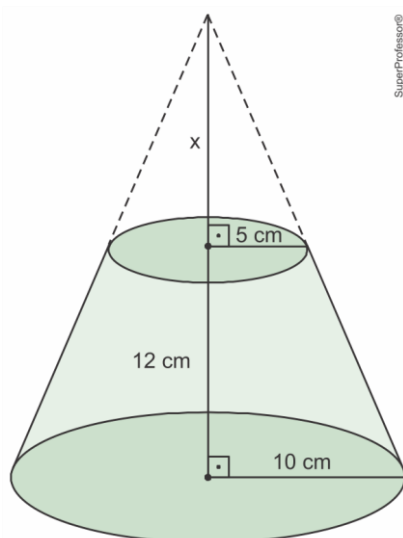
Da situação descrita, sabemos que:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A_1(h+x) = A_2(h-y) \\ A_1x = A_2y \end{cases} \\ &\frac{A_2y}{x}(h+x) = A_2(h-y) \\ &yh + xy = xh - xy \\ &2xy = h(x-y) \\ &\therefore h = \frac{2xy}{x-y} \end{aligned}$$

Resposta da questão 35:

[A]

Calculando o volume de um dos troncos de cone, obtemos:



CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\frac{x}{x+12} = \frac{5}{10} \Rightarrow 2x = x+12 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 24}{3} - \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 700\pi \text{ cm}^3$$

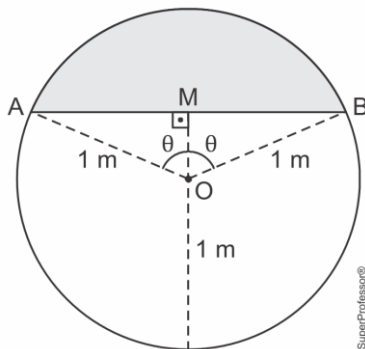
Portanto, o volume do vaso vale:

$$V_{\text{vaso}} = 2 \cdot 700\pi \text{ cm}^3 = 1400\pi \text{ cm}^3$$

Resposta da questão 36:

[B]

Da figura abaixo, obtemos:



$$\overline{OM} = \frac{3}{4} \cdot 2m - 1m = \frac{1}{2}m$$

$$\cos\theta = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AM}}{1} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

A área hachurada é dada pela área do setor circular de ângulo 120° menos a área do triângulo OAB. Logo:

$$A = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} m^2$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

Sendo assim, o volume de água introduzido foi de:

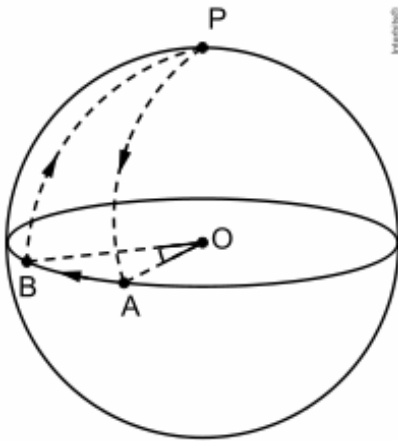
$$V = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 6$$

$$\therefore V = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} m^3$$

Resposta da questão 37:

[C]

Considere a figura, em que P é o Polo Norte e O é o centro da esfera.



Queremos calcular a soma $\widehat{PA} + \widehat{AB} + \widehat{BP}$.

Sabendo que a circunferência da Terra mede 40000 km , temos

$$2\pi r = 40000 \Leftrightarrow r = \frac{20000}{\pi} \text{ km},$$

em que r é o raio da Terra.

Ademais, como $\angle AOB = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, vem

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= \angle AOB \cdot r \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{20000}{\pi} \\ &= 5000 \text{ km}. \end{aligned}$$

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

É fácil ver que $PA = PB$ Logo, como $PA + PB_B$ corresponde à metade da circunferência da Terra, podemos escrever

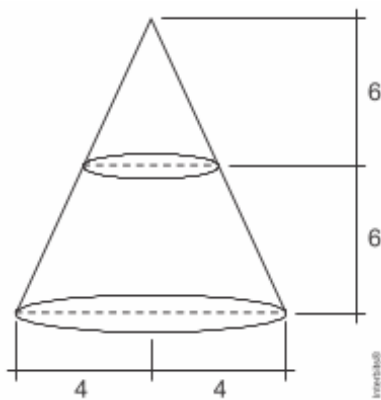
$$\begin{aligned} PA + PB &= \frac{40000}{2} \\ &= 20000 \text{ km.} \end{aligned}$$

A resposta é $20000 + 5000 = 25000 \text{ km.}$

Resposta da questão 38:

[C]

De acordo com o enunciado:



Considerando:

V = volume total do cone
 v' = volume cheio (tronco)
 v'' = volume vazio(topo)
 $H = 12$ = altura total
 $h = 6$ = altura topo / altura tronco

Pode-se calcular:

CONE, CILINDRO E ESFERA- TURMA AFA/ EFOMM/ EN

$$\frac{V}{v''} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^3 = \frac{V}{v''} \rightarrow V = 8 v''$$

$$v' + v'' = V \rightarrow v' + \frac{V}{8} = V \rightarrow v' = \frac{7}{8} V$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 12 \rightarrow V = 200,96$$

$$v' = \frac{7}{8} V = \frac{7}{8} \cdot 200,96 \rightarrow v' = 175,85 m^3$$

$$\text{Tempo: } 500 L/\text{min} = 0,5 m^3/\text{min}$$

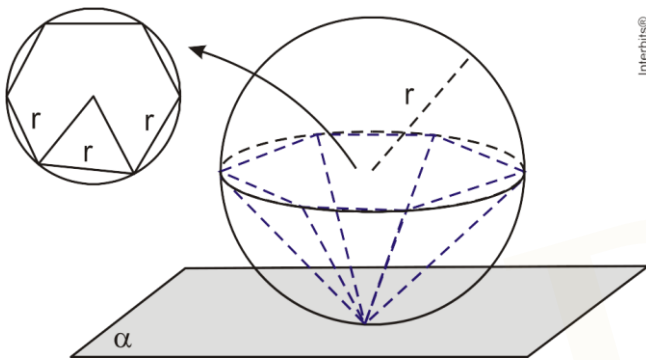
$$1 \text{ min} \text{ --- } 0,5 m^3$$

$$t \text{ --- } 175,85 m^3$$

$$t = 351,7 \text{ min} \approx 5h e 50 \text{ min}$$

Resposta da questão 39:

[E]



$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot r^3 \sqrt{3}}{4} r$$

$$V = \frac{r^3 \sqrt{3}}{2}$$

Resposta da questão 40:

[E]