

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

1. (Efomm) Seja S a soma de todos $t \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a igualdade

$$2 \sec^2(x) \cot^2(t) - 2 \cot^2(t) = A \cdot B,$$

- $A = [\tan^2(x) + \cos(2x) \tan^2(x)]$
- $B = [2 \cos^2(x) + \tan^2(x) - \cos(2x)],$

tal que $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Seja $V_E = \frac{S}{3}$ o volume da esfera E inscrita num cilindro C .

Seja K o sólido formado por dois cones inscritos em C , tal que cada uma das bases coincide com as bases inferior e superior de C e vértices comum no centro de E .

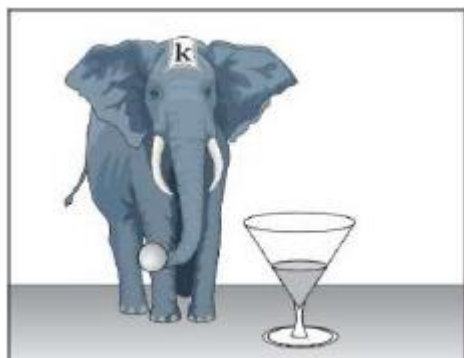
O sólido AC , chamado de Anticlépsidra, é a região interna de C e externa de K .

Seja V_{AC} o volume da Anticlépsidra e A_c a área total do cilindro C .

Qual é o valor de $\frac{4A_c}{V_{AC}}$?

- a) 18
- b) $18\pi^2$
- c) 18π
- d) $9\pi^2$
- e) 9

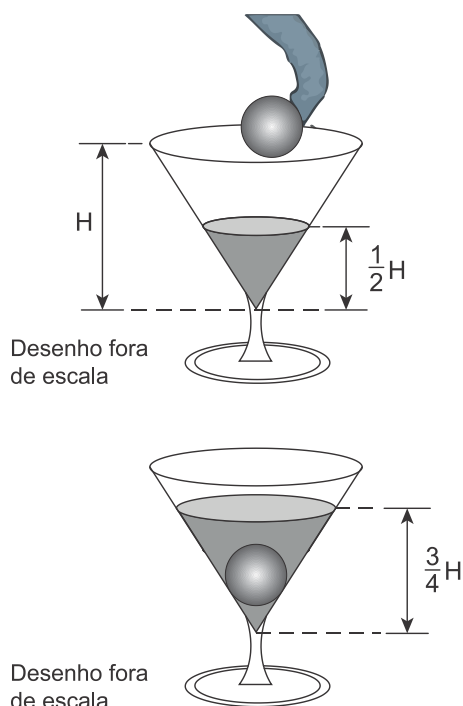
2. (Epcar (Afa)) Em um circo, para uma das atrações, o elefante Krewanjovi coloca uma esfera de raio 19 cm em um recipiente no formato cônico, conforme ilustrado abaixo.



Sabe-se que o recipiente se encontrava com água até a metade de sua altura.

Krewanjovi, então, coloca a esfera dentro do recipiente sem derramar uma gota sequer. A esfera fica totalmente submersa e o nível da água sobe para $3/4$ da altura do cone.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO



Considerando $\pi = 3$, podemos afirmar que o volume do cone, em cm^3 , é um número divisível por

- a) 5^2
- b) 19^3
- c) 3^4
- d) 2^5

3. (Efomm) Um reservatório cônico está sendo cheio a uma vazão de $\frac{2m^3}{s}$. O reservatório possui 9 metros de altura e sua base possui 6 metros de diâmetro. O quão rápido o nível da água está subindo quando a água estiver a 6 metros do topo?

- a) $\frac{3}{8\pi} \frac{m}{s}$
- b) $\frac{1}{2\pi} \frac{m}{s}$
- c) $\frac{4}{\pi} \frac{m}{s}$
- d) $\frac{9}{8\pi} \frac{m}{s}$
- e) $\frac{2}{\pi} \frac{m}{s}$

4. (Esc. Naval) Um copo na forma de um cilindro circular reto, com altura medindo 13 cm e diâmetro da base medindo 6 cm, está com água até $\frac{3}{4}$ de sua altura. Assim, qual o maior ângulo em que é possível inclinar o copo sem derramar água?

- a) $\arctg(4/13)$
- b) $\arctg(1/3)$
- c) $\arctg(6/13)$
- d) $\arctg(1/2)$
- e) $\arctg(13/12)$

5. (Epcar (Afa)) Um cone de revolução possui volume igual a $128\pi \text{ cm}^3$. Em sua base inscreve-se um hexágono regular de lado 8 cm.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

Considere um cilindro que tenha o mesmo volume e a mesma área da base do cone descrito anteriormente.

A razão entre a altura do cone e a altura do cilindro, nessa ordem, ambas na mesma unidade de medida, é igual a

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) 1
- d) 3

6. (Esc. Naval) Uma esfera de raio 54 cm é seccionada por planos perpendiculares a um diâmetro, dividindo-o em partes proporcionais a 2, 3 e 4 e determinando os sólidos S_2 , S_3 e S_4 , respectivamente. Suponha que S_3 , contenha o centro da esfera e que C_k é a razão entre o volume e a área total de S_k , para $k = 2, 3$ e 4. Calcule o valor de $C = C_2 + C_3 + C_4$ e assinale a opção correta.

- a) $10 < C < 15$
- b) $15 < C < 20$
- c) $20 < C < 25$
- d) $25 < C < 30$
- e) $30 < C < 35$

7. (Esc. Naval) Um cilindro circular reto de raio r e altura h possui volume igual a 300 cm^3 . Sabendo que o cilindro possui menor área total possível, a altura h , em cm, é aproximadamente igual a:

- a) 7,25
- b) 6,90
- c) 6,15
- d) 3,63
- e) 2,00

8. (Esc. Naval) Na partida de futebol entre Alemanha e Japão na Copa do Mundo de 2022, no lance que originou o segundo gol do Japão, por 1,88mm, a bola não passou totalmente pela linha de fundo (linha branca), como mostram as figuras 1, 2 e 3 apresentadas abaixo.



Figura 1

Fonte: www.mirror.co.uk/sport/football/news/fifa-statement-japan-goal-germany-28641190

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO



Figura 2

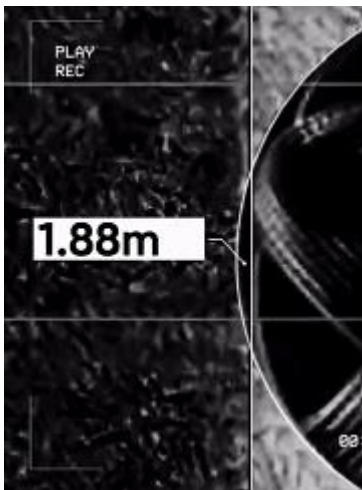


Figura 3

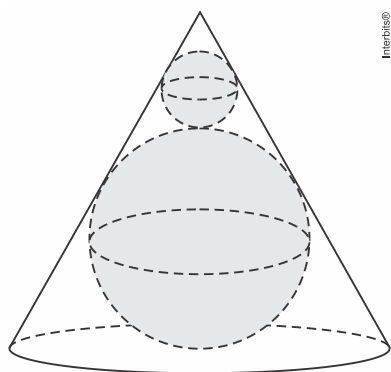
(Fonte: www.facebook.com/superLigInternationalOriginal/photos/a.1384593458432250/3447555148802727)

Sabe-se que a parte da bola sobre a linha branca equivale a uma calota esférica de altura 1,88mm e volume V_c . Considerando a bola de futebol uma esfera de raio 70cm e volume V , assinale a opção que apresenta corretamente a relação entre V e V_c .

- a) 0,1% de $V < V_c < 1\%$ de V
- b) 0,01% de $V < V_c < 0,1\%$ de V
- c) 0,001% de $V < V_c < 0,01\%$ de V
- d) 0,0001% de $V < V_c < 0,001\%$ de V
- e) $V_c < 0,0001\%$

9. (Epcar (Afa)) Um cone equilátero tem, em seu interior, duas esferas tangentes entre si e tangentes ao cone, conforme figura a seguir.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO



A distância do vértice do cone ao ponto de tangência entre o cone e a esfera de menor raio é igual a $\pi\sqrt{3}$ cm.

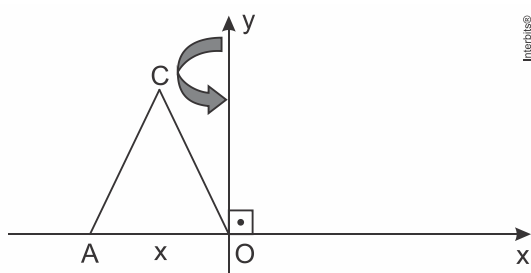
O volume desse cone, em cm^3 , é igual a

- a) $81\pi^4$
- b) $81\pi^3$
- c) $243\pi^4$
- d) $243\pi^3$

10. (Esc. Naval) Um fabricante de bolas de tênis (bolas em formatos esféricos) deseja vender as bolas em embalagens cilíndricas (cilindros circulares retos) de raio R e altura H , cada uma. Em cada embalagem há n bolas de tênis de raio R , cada bola. O fabricante deseja que a área total das superfícies das bolas seja igual à área lateral da embalagem (cilindro). Dessa forma, é correto afirmar que:

- a) $R = \frac{H}{n}$.
- b) $R = \frac{H}{2n}$.
- c) $R = \frac{H}{3n}$.
- d) $R = \frac{2H}{3n}$.
- e) $R = \frac{3H}{4n}$.

11. (Efomm) Ao rotacionar o triângulo equilátero AOC em torno do eixo y , conforme ilustra a figura a seguir, obteremos um sólido. Assinale a alternativa que representa o volume desse sólido, em unidades de volume, sabendo que o vértice O do triângulo AOC sobrepõe-se à origem dos eixos.



- a) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{6}$
- b) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{4}$

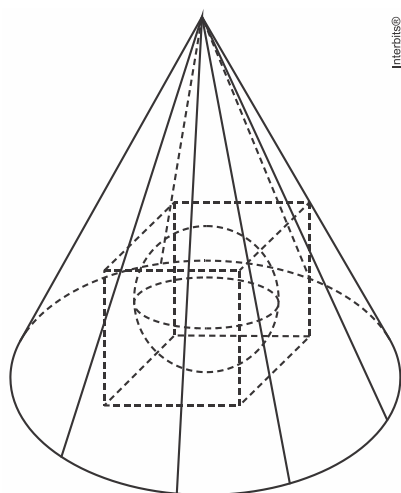
Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

- c) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{2}$
 d) $\frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{24}$
 e) $\frac{7\pi x^3 \sqrt{3}}{24}$

12. (Epcar (Afa)) Considere a figura a seguir:



Desenho fora de escala

Nela está representada a inscrição de uma esfera num cubo que, por sua vez, está inscrito num cone equilátero, de tal forma que uma de suas faces está apoiada na base do cone e os vértices da face oposta estão na lateral do cone. A projeção ortogonal do vértice do cone à sua base contém dois pontos de tangência da esfera com o cubo.

Se R e r são, respectivamente, as medidas do raio da base do cone e do raio da esfera, em cm , então

- a) $\frac{R}{r} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$
 b) $\frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$
 c) $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$
 d) $\frac{r}{R} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

13. (Epcar (Afa)) Sejam as curvas $\lambda: x^2 + y^2 = r^2$ e $\beta: y^2 - x^2 = 4$ tangentes em dois pontos distintos do plano cartesiano.

Considere S o conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Se for realizada uma rotação de 90° dos pontos de S em torno de uma das assíntotas de β , então o sólido formado tem uma superfície cuja área total, em unidade de área, mede

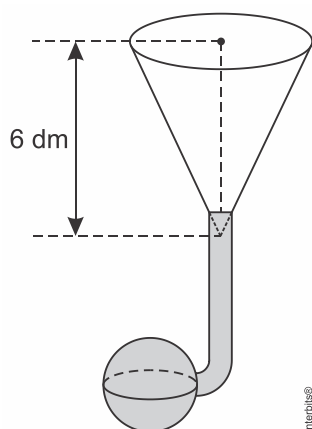
- a) $\frac{16}{3}\pi$
 b) 8π
 c) 12π
 d) 16π

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

14. (Epcar (Afa)) Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.

O conteúdo da caixa d'água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}} \text{ dm}$.



Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2 , é igual a

- a) 80
- b) 40
- c) 20
- d) 10

15. (Esc. Naval) Um cilindro circular reto tem área total A , raio da base R e altura h . Se o volume máximo desse cilindro é expresso por um número real m e a função f da variável real x é definida por $f(x) = (2\pi x^2)^{\frac{1}{3}} + 1$, pode-se dizer que $f(m)$

- a) $\frac{1}{3}A$
- b) $A + 3$
- c) $\frac{1}{3}(A + 3)$
- d) $\frac{1}{3}(A - 3)$
- e) $A \frac{\sqrt{2}}{3} + 1$

16. (Epcar (Afa)) Considere a região E do plano cartesiano dada por

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

$$E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \\ y + x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de 270° em torno do eixo $\overrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a

- a) $\frac{26\pi}{3}$
- b) 26π
- c) $\frac{13\pi}{2}$
- d) $\frac{13\pi}{3}$

17. (Efomm) Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A , ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

- a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
- b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$.
- c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.
- d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.
- e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

18. (Esc. Naval)

Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de 60° com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{\frac{1}{6}}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

- a) $\frac{8}{81\pi}$
- b) $\frac{81\pi}{8}$
- c) $\frac{8\pi}{81}$
- d) $\frac{8\pi}{27}$
- e) $\frac{81}{8\pi}$

19. (Esc. Naval) Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a 20 cm , quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de 12 cm desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos é

- a) $6.000\pi^2$
- b) $5.000\pi^2$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

- c) $4.000\pi^2$
- d) $3.000\pi^2$
- e) $2.000\pi^2$

20. (Esc. Naval) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente $\frac{1}{10}$ da superfície da Terra.

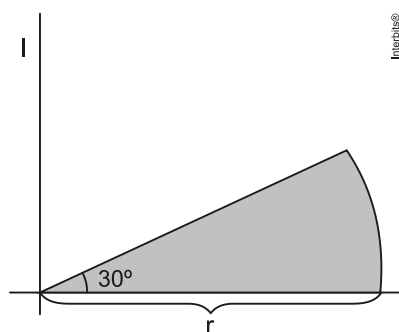
Que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a 6400km

- a) 1200km
- b) 1280km
- c) 1600km
- d) 3200km
- e) 4200km

21. (Esc. Naval) Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R. Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas são tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a, vale

- a) $\frac{(1+2\sqrt{3})a}{3}$
- b) $\frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}$
- c) $\frac{(3+\sqrt{3})a}{3}$
- d) $(1 + 2\sqrt{3})a$
- e) $(3 + 2\sqrt{3})a$

22. (Esc. Naval) Considere dois cones circulares retos, de altura H e raio da base 1cm, de modo que o vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume comum aos dois cones coincide com o volume do sólido obtido pela rotação do setor circular, sombreado na figura abaixo, em torno do eixo l. O valor de H é, em cm,



- a) $(2 + \sqrt{3})r^3$
- b) $2\sqrt{3}r^3$
- c) $\frac{4}{3}r^3$
- d) $2r^3$
- e) $4r^3$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

23. (Esc. Naval) Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor

de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}\dots}}}$ cm, então

seu volume vale

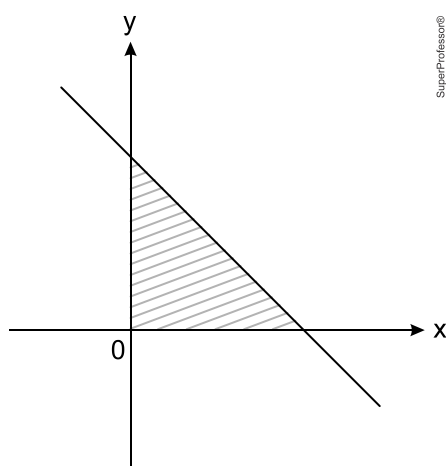
- a) $45 \cdot 10^{-3}\pi \text{ dm}^3$
- b) $0,45 \cdot 10^{-3}\pi \text{ dm}^3$
- c) $60 \cdot 10^{-3}\pi \text{ dm}^3$
- d) $0,15 \cdot 10^3\pi \text{ dm}^3$
- e) $60 \cdot 10^3\pi \text{ dm}^3$

24. (Epcar (Afa)) Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade.

Sabe-se que cada mercado receberá 2 barris de vinho, com altura igual a $\frac{1}{5}$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade x de mercados que receberão os barris (com sua capacidade máxima ocupada) é tal que x pertence ao intervalo

- a) $0 < x < 20$
- b) $20 \leq x < 40$
- c) $40 \leq x < 60$
- d) $60 \leq x < 80$

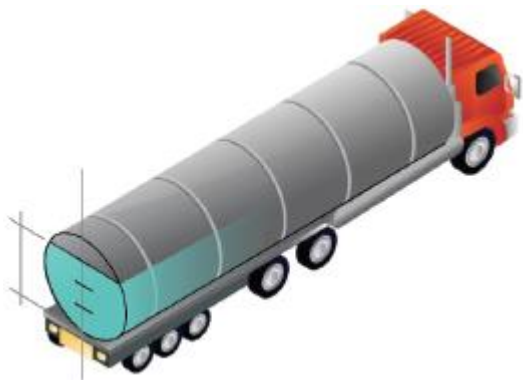
25. (Fuvest) A figura a seguir esboça, no plano cartesiano, a região hachurada delimitada pelo eixo Ox, pelo eixo Oy e pela reta $x + y = 4$.



- a) Calcule a área da região determinada pela intersecção do plano Oxy com o sólido de revolução gerado pela rotação da região hachurada quando gira em torno do eixo Oy.
- b) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região hachurada quando gira em torno da reta vertical $x = 4$.
- c) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região hachurada quando gira em torno da reta $x + y = 4$.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

26. (Fuvest) O reservatório de um caminhão-pipa tem a forma de um cilindro circular reto com eixo horizontal e dimensões internas de 6 metros de comprimento e 2 metros de diâmetro. Uma escola contratou o serviço do caminhão-pipa para abastecer sua caixa d'água. Após o abastecimento, o motorista percebeu que o reservatório do caminhão estava cheio até $\frac{3}{4}$ de sua altura, conforme ilustrado na figura.



Qual foi o volume, em metros cúbicos, de água utilizada para abastecer a caixa d'água da escola, sabendo que o reservatório do caminhão estava cheio antes do abastecimento?

- a) $\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
- b) $\left(2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- c) $\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- d) $\left(4\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
- e) $\left(4\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

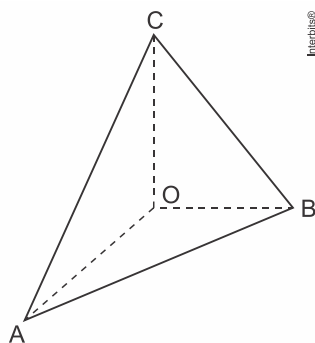
27. (Fuvest) Suponha, para simplificar, que a Terra é perfeitamente esférica e que a linha do Equador mede 40.000 km. O trajeto que sai do Polo Norte, segue até a linha do Equador pelo meridiano de Greenwich, depois se desloca ao longo da linha do Equador até o meridiano $45^\circ L$ e então retorna ao Polo Norte por esse meridiano tem comprimento total de

- a) 15.000 km.
- b) 20.000 km.
- c) 25.000 km.
- d) 30.000 km.
- e) 35.000 km.

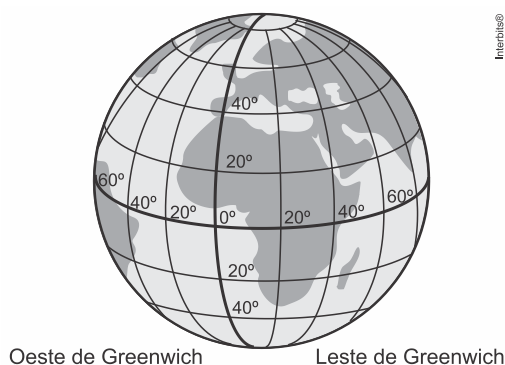
28. (Fuvest) Para responder aos itens a) e b), considere a figura correspondente.

- a) Num tetraedro $OABC$, os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$ medem 90° . Sendo α e β as medidas dos ângulos $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}O$, respectivamente, expresse o cosseno do ângulo $A\hat{C}B$ em função de α e β .

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO



- b) Um navio parte do ponto de latitude 0° e longitude 0° e navega até chegar a um ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste, seguindo a trajetória que minimiza a distância percorrida. Admita que a Terra seja esférica de raio $R = 6.000 \text{ km}$. Qual foi a distância percorrida pelo navio?



29. (Fuvest) Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m . Sua altura é igual a 12 m . A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:

- π é aproximadamente 3,14.

- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

- a) 4 horas e 50 minutos.
- b) 5 horas e 20 minutos.
- c) 5 horas e 50 minutos.
- d) 6 horas e 20 minutos.
- e) 6 horas e 50 minutos.

30. (Fuvest) A esfera ε , de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α . O plano β é paralelo a α e contém O . Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α , é igual a

- a) $\frac{\sqrt{3}r^3}{4}$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

- b) $\frac{5\sqrt{3}r^3}{16}$
c) $\frac{3\sqrt{3}r^3}{8}$
d) $\frac{7\sqrt{3}r^3}{16}$
e) $\frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

Gabarito:

Resposta da questão 1:

[A]

Simplificando A e B, obtemos:

$$A = \tan^2(x)[1 + \cos(2x)] = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}[1 + \cos^2(x) - \sin^2(x)] = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot 2 \cos^2(x) = 2 \sin^2(x)$$

$$B = 2 \cos^2(x) + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - [\cos^2(x) - \sin^2(x)] = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Logo:

$$2 \sec^2(x) \cot^2(t) - 2 \cot^2(t) = 2 \sin^2(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow 2 \cot^2(t) \left[\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right] = \frac{2 \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

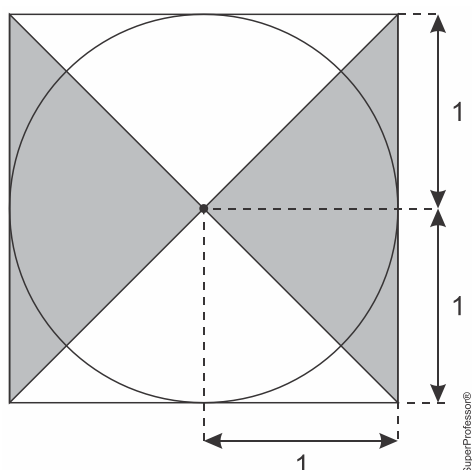
$$\Rightarrow \cot^2(t) \cdot \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \Rightarrow \cot^2(t) \tan^2(x) = \tan^2(x) \Rightarrow \cot(t) = \pm 1 \Rightarrow \tan(t) = \pm 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi$$

Raio da esfera:

$$V_E = \frac{S}{3} \Rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow R = 1$$

A área total do cilindro e o volume descrito são dados por:



$$A_c = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 + 2\pi \cdot 1 \cdot 2 = 6\pi$$

$$V_{AC} = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto:

$$\frac{4A_c}{V_{AC}} = \frac{4 \cdot 6\pi}{\frac{4\pi}{3}} = 18$$

Resposta da questão 2:

[D]

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

Vamos considerar:

V_L : volume do líquido

V_C : volume do cone

V_E : volume da esfera

$$\frac{V_L}{V_C} = \left(\frac{\frac{H}{2}}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_L}{V_C} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_L = \frac{V_C}{8} \quad (I)$$

$$\frac{V_L + V_E}{V_C} = \left(\frac{\frac{3H}{4}}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_L + V_E}{V_C} = \frac{27}{64} \Rightarrow V_L + V_E = \frac{27 \cdot V_C}{64} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{V_C}{8} + V_E &= \frac{27 \cdot V_C}{64} \Rightarrow 8V_C = 64V_E = 27V_C \Rightarrow 19V_C = 64V_E \Rightarrow \\ 19V_C &= 64 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 19^3 \end{aligned}$$

Admitindo $\pi = 3$, temos:

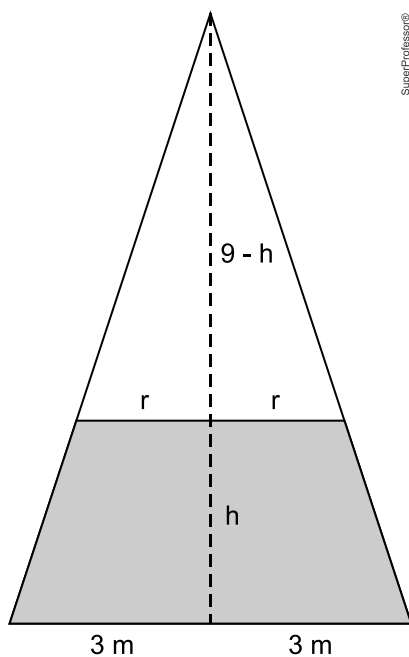
$$V_C = 2^8 \cdot 19^2$$

Portanto, o volume do cone é um número divisível por 2^5 .

Resposta da questão 3:

[B]

Da descrição do problema, temos:



Relação entre r e h :

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\frac{9-h}{9} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{9-h}{3}$$

Volume de água:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 9}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (9-h)}{3} = 27\pi - \frac{\pi(9-h)}{3} \cdot \left(\frac{9-h}{3}\right)^2 = 27\pi - \frac{(9\pi - \pi h)}{3} \cdot \frac{(81 - 18h + h^2)}{9} \\ &= 27\pi - \frac{729\pi - 162\pi h + 9\pi h^2 - 81\pi h + 18\pi h^2 - \pi h^3}{27} = \frac{243\pi h - 27\pi h^2 + \pi h^3}{27} \\ &= 9\pi h - \pi h^2 + \frac{\pi h^3}{27} \end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{dV}{dt} = 9\pi \frac{dh}{dt} - 2\pi h \frac{dh}{dt} + \frac{\pi h^2}{9} \frac{dh}{dt}$$

Como $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ e $h = 3 \text{ m}$:

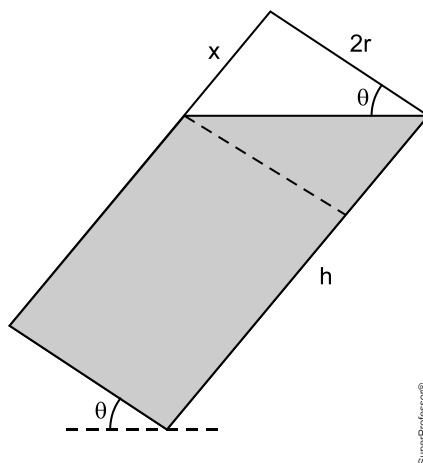
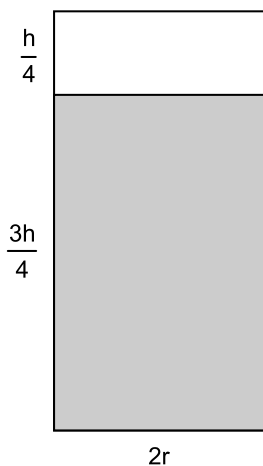
$$\begin{aligned} 2 &= \pi \frac{dh}{dt} \left(9 - 2 \cdot 3 + \frac{3^2}{9} \right) \\ 2 &= 4\pi \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi} \text{ m/s}$$

Resposta da questão 4:

[E]

Igualando os volumes vazios em ambos os casos, obtemos:



$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{4} &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot x}{2} \\ x &= \frac{h}{2} = \frac{13}{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Logo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2r} = \frac{\frac{13}{2}}{6} = \frac{13}{12}$$

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

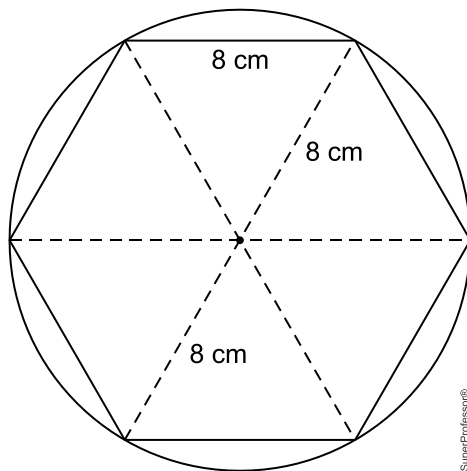
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\therefore \theta = \arctg\left(\frac{13}{12}\right)$$

Resposta da questão 5:

[D]

O raio da base do cone e do cilindro vale 8 cm conforme pode ser observado na figura abaixo (que ilustra o hexágono inscrito na base do cone):



Altura do cone:

$$128\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot h_{\text{cone}}$$
$$h_{\text{cone}} = 6 \text{ cm}$$

Altura do cilindro:

$$128\pi = \pi \cdot 8^2 \cdot h_{\text{cilindro}}$$
$$h_{\text{cilindro}} = 2 \text{ cm}$$

Logo:

$$\frac{h_{\text{cone}}}{h_{\text{cilindro}}} = \frac{6}{2} = 3$$

Resposta da questão 6:

[D]

Alturas das partes da esfera após a divisão proporcional:

$$2k + 3k + 4k = 2 \cdot 54 \Rightarrow k = 12$$

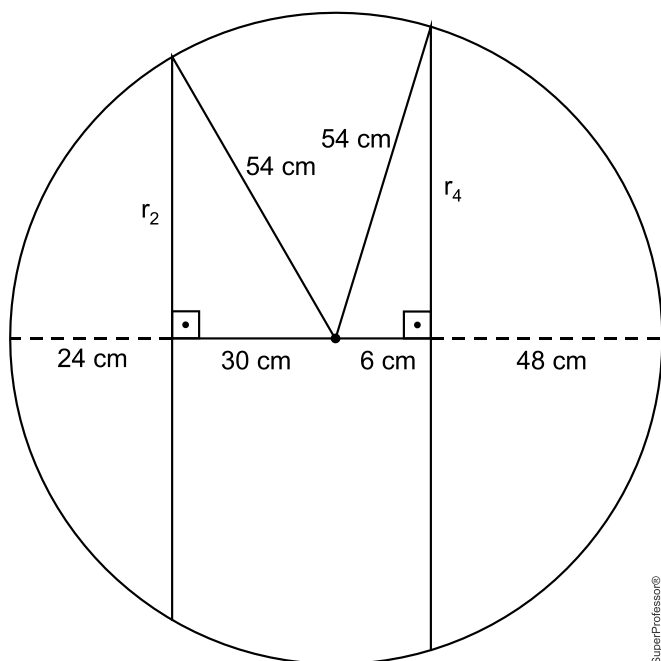
$$h_2 = 2 \cdot 12 = 24$$

$$h_3 = 3 \cdot 12 = 36$$

$$h_4 = 4 \cdot 12 = 48$$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO



$$54^2 = r_2^2 + 30^2 \Rightarrow r_2^2 = 2016$$

$$54^2 = r_4^2 + 6^2 \Rightarrow r_4^2 = 2880$$

Utilizando as fórmulas $A_{calota} = 2\pi r h_{calota}$ e $V_{calota} = \frac{1}{3}\pi h_{calota}^2(3r - h_{calota})$, temos:

$$\begin{cases} A_2 = 2\pi \cdot 54 \cdot 24 + \pi \cdot 2016 = 4608\pi \text{ cm}^2 \\ V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 24^2 \cdot (3 \cdot 54 - 24) = 26496\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow C_2 = \frac{26496\pi}{4608\pi} = 5,75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_4 = 2\pi \cdot 54 \cdot 48 + \pi \cdot 2880 = 8064\pi \text{ cm}^2 \\ V_4 = \frac{1}{3}\pi \cdot 48^2 \cdot (3 \cdot 54 - 48) = 87552\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow C_4 = \frac{87552\pi}{8064\pi} \cong 10,86 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = 4\pi \cdot 54^2 - 2592\pi - 5184\pi + \pi \cdot 2016 + \pi \cdot 2880 = 8784\pi \text{ cm}^2 \\ V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 54^3 - 26496\pi - 87552\pi = 95904\pi \text{ cm}^3 \end{cases} \Rightarrow C_3 = \frac{95904\pi}{8784\pi} \cong 10,92$$

$$C = 5,75 + 10,86 + 10,92 = 27,53$$

$\therefore 25 < C < 30$

Resposta da questão 7:

[A]

Do volume do cilindro, obtemos:

$$\pi r^2 h = 300$$

$$h = \frac{300}{\pi r^2}$$

A área total do cilindro é dada por:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{300}{\pi r^2}$$

$$A_T = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}$$

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

A menor área total possível ocorre para:

$$\begin{aligned}\left(2\pi r^2 + \frac{600}{r}\right)' &= 0 \\ 4\pi r - \frac{600}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r &= \frac{600}{r^2} \\ \pi r^3 &= 150 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \text{ cm}\end{aligned}$$

Sendo assim, h vale, aproximadamente:

$$\begin{aligned}h &= \frac{300}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{150}{\pi}\right)^2}} = \frac{300}{\sqrt[3]{\pi^3 \cdot \frac{150^2}{\pi^2}}} = \frac{300}{\sqrt[3]{\pi^{\boxed{3}} \cdot \frac{150^{\boxed{2}}}{\pi^{\boxed{2}}}}} \\ &\cong \frac{300}{\sqrt[3]{3 \cdot 150^2}} \cong \frac{300}{\sqrt[3]{3 \cdot 50^2}} \cong \frac{300}{\sqrt[3]{2500}} \cong \frac{100}{13,7} \cong 7,25\end{aligned}$$

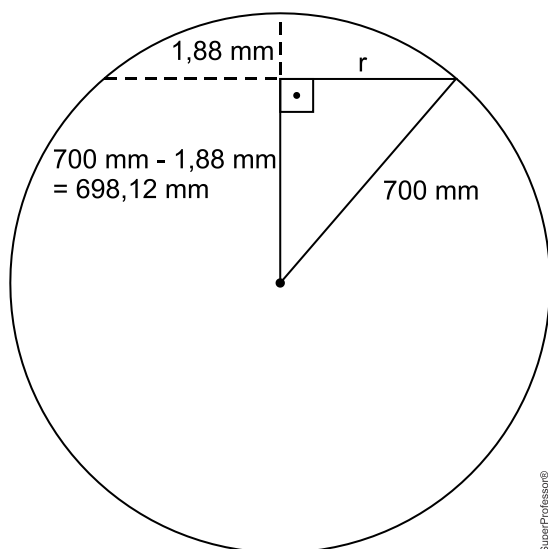
Resposta da questão 8:

[D]

Volume da bola:

$$V = \frac{4\pi \cdot 700^3}{3} \text{ mm}^3$$

Raio da calota:



$$\begin{aligned}700^2 &= 698,12^2 + r^2 \\ r &\cong 51,3 \text{ mm}\end{aligned}$$

Volume da calota:

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

$$V_c = \frac{\pi h}{6} \cdot (3r^2 + h^2) = \frac{\pi \cdot 1,88}{6} \cdot (3 \cdot 51,3^2 + 1,88^2)$$

$$V_c \cong 2475\pi \text{ mm}^3$$
$$\frac{V_c}{V} = \frac{2475\pi}{\frac{4\pi \cdot 700^3}{3}} = 5,4 \cdot 10^{-6} = 0,00054\%$$
$$[A]$$
[illegible]

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{\pi\sqrt{3}} \Rightarrow r = \pi \text{ cm} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{y} \Rightarrow y = 2\pi \text{ cm} \\ R &= r + y = 3\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

$$h_c = 3R = 9\pi \text{ cm}$$
$$9\pi = \frac{2R_c\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R_c = 3\sqrt{3}\pi \text{ cm}$$
$$V_c = \frac{1}{3} \pi \cdot (3\sqrt{3}\pi)^2 \cdot 9\pi = \frac{1}{\boxed{3}} \pi \cdot 9 \cdot \boxed{3} \pi^2 \cdot 9\pi$$

$$\therefore V_c = 81\pi^4 \text{ cm}$$

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

Resposta da questão 10:

[B]

Devemos ter que:

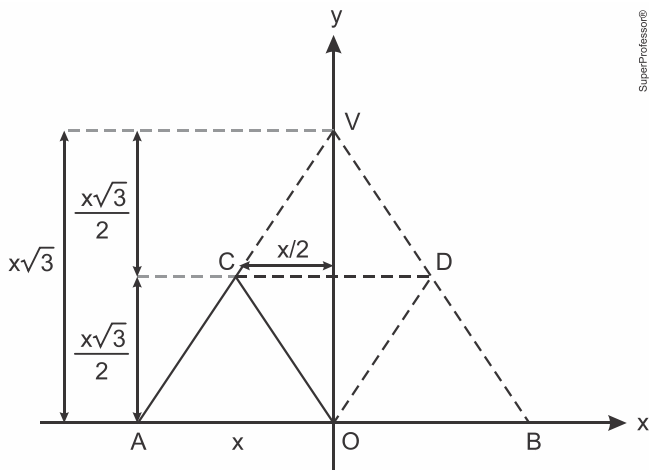
$$A_{bolas} = A_{\ell_{sup}}$$
$$n \cdot 4\pi R^2 = 2\pi RH$$

$$\therefore R = \frac{H}{2n}$$

Resposta da questão 11:

[B]

O volume procurado é dado pelo volume do cone equilátero ABV menos os volumes dos cones equiláteros CDO e CDV como ilustrado na figura abaixo:



$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot x\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}$$
$$V = \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{3} - \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore V = \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{4}$$

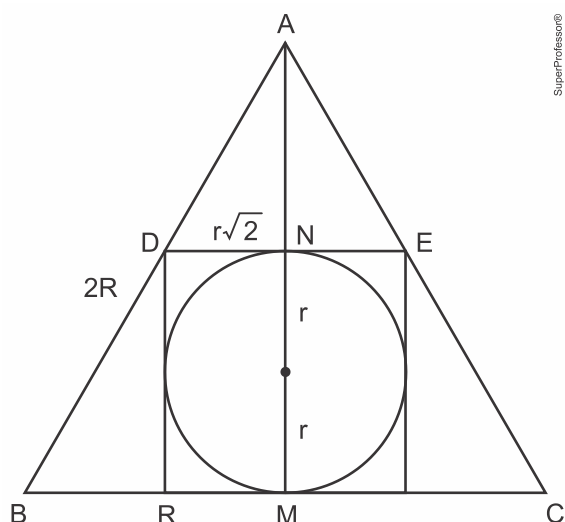
Resposta da questão 12:

[B]

Como o cone é equilátero, temos que:

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO



$$\overline{AM} = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

$$\overline{AN} = \overline{AM} - \overline{NM} = R\sqrt{3} - 2r$$

Observação: perceba que o raio do cone ADE é equivalente à diagonal da face superior do cubo, e, portanto, igual a $r\sqrt{2}$.

Por semelhança de triângulos entre o $\triangle ABM$ e o $\triangle ADN$, obtemos:

$$\frac{\overline{DN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{R} = \frac{R\sqrt{3} - 2r}{R\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\sqrt{6} = R\sqrt{3} - 2r \Rightarrow r(\sqrt{6} + 2) = R\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} \cdot \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} - 2} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6 - 4}$$

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$$

Resposta da questão 13:

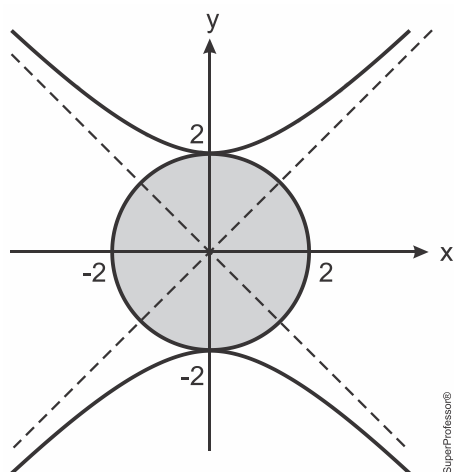
[D]

Reescrevendo a equação da hipérbole, temos:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$$

Sendo assim, podemos ilustrar as curvas descritas como na figura abaixo:

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO



De onde concluímos que $r = 2$.

Realizando uma rotação de 90° dos pontos de S em torno de uma das assíntotas de β , obtemos uma esfera de raio 2. Portanto, a sua superfície total vale:
 $A = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ u.a.}$

Resposta da questão 14:

[A]

Calculando, inicialmente, o volume total das trinta esferas.

$$\begin{aligned} V &= 30 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ V &= 30 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\pi^{-1})^3 \\ V &= 40 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Como 40 dm^3 é o volume de metade do cone, concluímos que o volume do cone é 80 dm^3 . Vamos, então, determinar a medida do raio deste cone.

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 6 = 80 \Rightarrow r^2 = \frac{40}{\pi}$$

Calculando, agora, a área do cone equilátero sugerido, temos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

Como o cone é equilátero, devemos considerar $g = 2r$.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot r \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{40}{\pi} \Rightarrow A_L = 80 \text{ dm}^2$$

Resposta: [A] 80 dm^2

Resposta da questão 15:

[C]

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R \cdot (R + h) \rightarrow h = \frac{A}{2\pi R} - R$$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot \left(\frac{A}{2\pi R} - R \right) = \frac{AR}{2} - \pi R^3$$

$$V' = \frac{A}{2} - \pi R^2 \rightarrow \frac{A}{2} - \pi R^2 = 0 \rightarrow R = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$$

$$h = \frac{A}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \rightarrow h = \frac{A}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}}$$

$$m = V_{\max} = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \right)^2 \cdot \left(\frac{A}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}} \right) \rightarrow m = \frac{A^2}{18\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}}$$

$$f(x) = (2\pi x^2)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$f(m) = \left(2\pi \left(\frac{A^2}{18\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{A}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} + 1 = \left(\frac{A^3}{27} \right)^{\frac{1}{3}} + 1 = \frac{A}{3} + 1 = \frac{1}{3}(A + 3)$$

Resposta da questão 16:

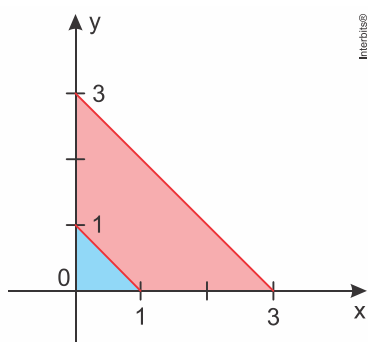
[C]

Reescrevendo as duas primeiras inequações como equações, tem-se:

$$\frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \rightarrow \frac{y}{3} + \frac{x}{3} = 1 \rightarrow y = 3 - x$$

$$y + x \geq 1 \rightarrow y + x = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

Tendo estas duas equações de retas e sabendo que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, pode-se construir o gráfico a seguir, que apresenta a região E (em rosa) indicada no enunciado:



Rotacionando a área E (em rosa) em 360° em torno do eixo x teremos um cone “oco” de altura e raio 3, com uma concavidade também em formato de cone, de altura e raio igual a 1 (região indicada em azul). Assim, para se conseguir o volume somente do sólido gerado pela rotação da área rosa E, podemos calcular o volume total do cone de altura e raio 3 (que chamaremos de V) e subtrair dele o volume do cone gerado pela rotação da área representada em azul (que chamaremos de V_{azul}). Assim, o volume do sólido gerado pela rotação da área E (V_E) será:

$$V_E = V - V_{\text{azul}}$$

Sendo o volume de um cone de revolução dado pela fórmula $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h$, temos que:

$$V_E = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \right) = 9\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow V_E = \frac{26\pi}{3}$$

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

Porém, o solicitado no enunciado não é uma rotação de 360° em torno do eixo x , mas sim uma rotação de 270° . Nesse caso, o volume final V_E' será correspondente a $\frac{3}{4}V_E$. Ou seja:

$$V_E' = \frac{3}{4}V_E = \frac{3}{4} \cdot \frac{26\pi}{3} = \frac{78\pi}{12} \rightarrow V_E' = \frac{13\pi}{2}$$

Resposta da questão 17:

[E]

Tem-se que

$$6A^2 = 4\pi R^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} R.$$

Portanto, a resposta é

$$\frac{A^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}} R\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$

Resposta da questão 18:

[C]

Sejam ℓ e h , respectivamente, a medida da aresta da base e a medida da altura do prisma.

Assim, a medida da diagonal da base mede $\ell\sqrt{2}$ e, portanto, temos

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\ell\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \ell\sqrt{6} \text{ u.c.}$$

Por outro lado, se o prisma tem área lateral igual a $36\sqrt{6}$, vem

$$4\ell \cdot h = 36\sqrt{6} \Leftrightarrow \ell \cdot \ell\sqrt{6} = 9\sqrt{6} \\ \Rightarrow \ell = 3 \text{ u.c.}$$

Em consequência, o volume do prisma é igual a $3^2 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$ u.v.

O volume da esfera é dado por

$$\frac{4\pi}{3} (24^{\frac{1}{6}})^3 = \frac{4\pi}{3} (6 \cdot 4)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\pi}{3} \sqrt{6} \text{ u.v.}$$

A razão pedida é

$$\frac{\frac{8\pi}{3}\sqrt{6}}{27\sqrt{6}} = \frac{8\pi}{81}.$$

Resposta da questão 19:

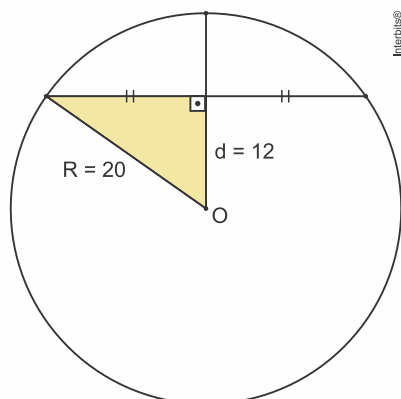
[B]

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

Com as informações do enunciado, temos:



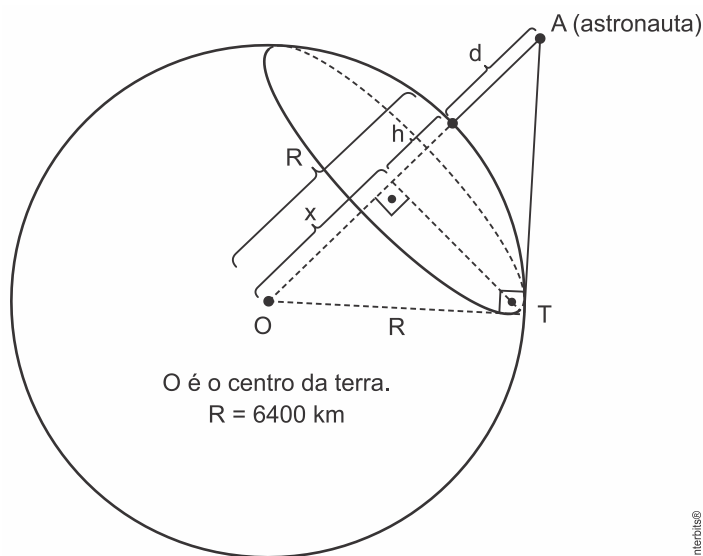
Observando o triângulo retângulo destacado, percebe-se que o cateto menor mede 12 e o cateto maior (utilizando o Teorema de Pitágoras) mede 16. Logo, um dos lados da secção retangular mede 32; o outro lado é igual a altura h do cilindro. Assim, pode-se escrever:

$$32h = \pi \cdot 20^2 \rightarrow h = \frac{25\pi}{2}$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{25\pi}{2} \rightarrow V_{cilindro} = 5000\pi^2$$

Resposta da questão 20:

[C]



Sabemos que a área da calota esférica (avistada pelo astronauta) é um décimo da área da superfície esférica. Temos, então, a seguinte equação:

$$2\pi Rh = \frac{4\pi R^2}{10} \Rightarrow h = \frac{R}{5}$$

Calculando a medida x da figura:

$$x = R - h \Rightarrow x = R - \frac{R}{5} \Rightarrow x = \frac{4R}{5}$$

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

Aplicando uma relação métrica no triângulo ATO, temos:

$$R^2 = AO \cdot \frac{4}{5} \cdot R \Rightarrow AO = \frac{5R}{4}$$

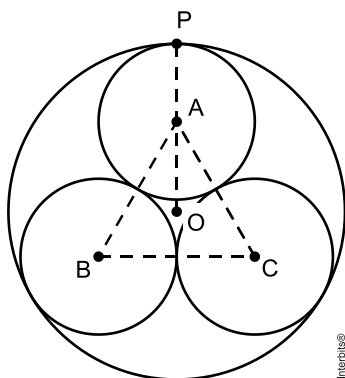
Logo, a distância d pedida será dada por:

$$d = \frac{5R}{4} - R \Rightarrow d = \frac{R}{4} \Rightarrow d = \frac{6400}{4} \Rightarrow \boxed{d = 1600km.}$$

Resposta da questão 21:

[B]

Considere a figura, em que $\overline{OP} = R$ e ABC é um triângulo equilátero de lado $2a$.



Como O é o baricentro de ABC , segue-se que

$$\overline{OA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \Leftrightarrow R = \frac{2a\sqrt{3}}{3} + a \\ \Leftrightarrow R &= \frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 22:

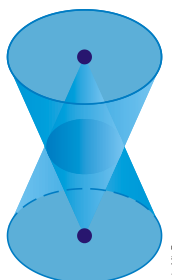
[E]

O volume do sólido de revolução corresponde ao volume do segmento esférico de altura $h = \frac{r}{2}$, com raios $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ e $r_2 = r$, subtraído do volume do cone reto de mesma altura h e raio da base r_1 , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2] - \frac{\pi}{3} r_1^2 h &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2 - 2r_1^2) \\ &= \frac{\pi r}{12} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r \right)^2 + 3r^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

Por outro lado, o volume comum aos dois cones de altura H e raio da base 1cm é igual ao volume de dois cones de altura $\frac{H}{2}$ e raio $R = \frac{1}{2}\text{cm}$, conforme a figura.



Portanto,

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{H}{2} = \frac{\pi r^3}{3} \Leftrightarrow H = 4r^3.$$

Resposta da questão 23:
[C]

Sendo $r = \sqrt[3]{3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{5\sqrt[5]{3}\dots}}}\text{cm}$ o raio da esfera, temos

$$r = \sqrt[4]{45\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}\dots}} \Rightarrow r^4 = 45r$$

$$\Leftrightarrow r(r^3 - 45) = 0$$

$$\Rightarrow r^3 = 45.$$

Portanto, o resultado pedido é

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 &= \frac{4\pi}{3} \cdot 45 \\ &= 60\pi \text{ cm}^3 \\ &= 60 \cdot 10^{-3} \pi \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Resposta da questão 24:
[C]

Considerando V_T o volume do tanque e V_B o volume do barril:

$$\begin{aligned} V_T &= \pi r^2 \cdot h \\ V_B &= \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 \cdot \frac{h}{5} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{80} = \frac{V_T}{80} \end{aligned}$$

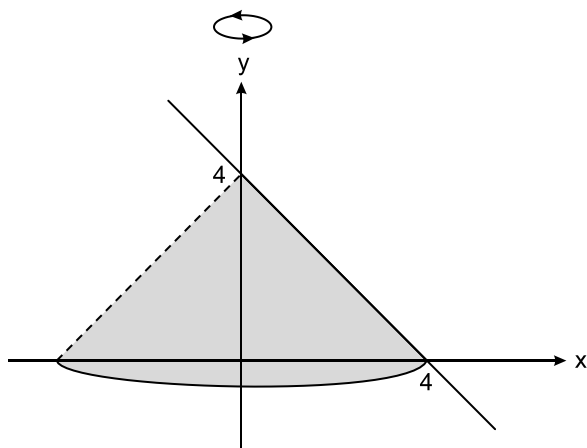
Portanto, $x = 80$ barris e 40 mercados.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

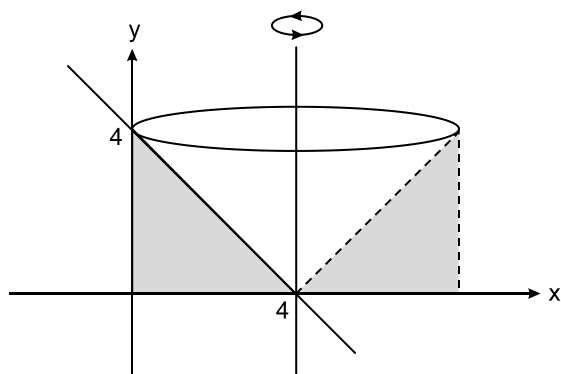
Resposta da questão 25:

a) Quando a região gira em torno do eixo y , ela forma um cone de raio 4 e altura 4. A figura formada pela interseção do plano Oxy com o cone é um triângulo de base 8 e altura 4, cuja área vale:



$$A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ u.a.}$$

b)



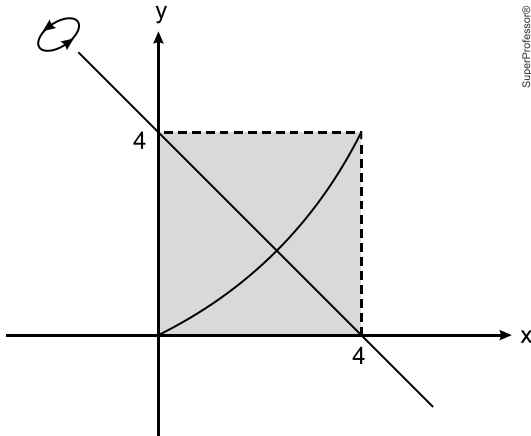
O sólido formado pela rotação da região em torno da reta $x = 4$ é dado por um cilindro de raio da base 4 e altura 4 menos um cone de raio da base 4 e altura 4. Logo, o seu volume é igual a:

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 - \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 4}{3} = \frac{128\pi}{3} \text{ u.v.}$$

c) Ao girar em torno da reta $x + y = 4$, a região dá origem a 2 cones de altura e raio da base valendo $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Sendo assim, o seu volume vale:

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM

PROFESSOR YURI POLITANO

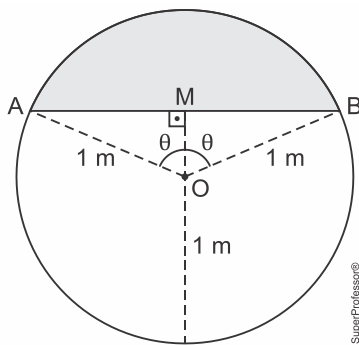


$$V = 2 \cdot \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{32\pi\sqrt{2}}{3} \text{ u. v.}$$

Resposta da questão 26:

[B]

Da figura abaixo, obtemos:



$$\overline{OM} = \frac{3}{4} \cdot 2 \text{ m} - 1 \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ m}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AM}}{1} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

A área hachurada é dada pela área do setor circular de ângulo 120° menos a área do triângulo OAB. Logo:

$$A = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$$

Sendo assim, o volume de água introduzido foi de:

$$V = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 6$$

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

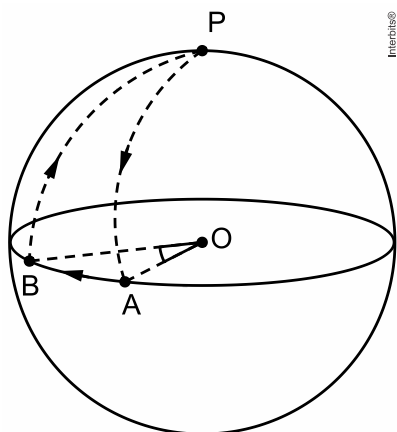
CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM PROFESSOR YURI POLITANO

$$\therefore V = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} m^3$$

Resposta da questão 27:

[C]

Considere a figura, em que P é o Polo Norte e O é o centro da esfera.



Queremos calcular a soma $\widehat{PA} + \widehat{AB} + \widehat{BP}$.

Sabendo que a circunferência da Terra mede $40000km$, temos

$$2\pi r = 40000 \Leftrightarrow r = \frac{20000}{\pi} km,$$

em que r é o raio da Terra.

Ademais, como $\widehat{AOB} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} rad$, vem

$$\begin{aligned} AB &= \widehat{AOB} \cdot r \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{20000}{\pi} \\ &= 5000km. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\widehat{PA} = \widehat{PB}$. Logo, como $\widehat{PA} + \widehat{PB}$ corresponde à metade da circunferência da Terra, podemos escrever

$$\begin{aligned} PA + PB &= \frac{40000}{2} \\ &= 20000km. \end{aligned}$$

A resposta é $20000 + 5000 = 25000km$.

Resposta da questão 28:

a) Dos triângulos retângulos ACO , BCO e ABO obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, respectivamente, $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$, $\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2$ e $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$.

Além disso, temos

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CO}}{\cos \alpha} \text{ e } \overline{BC} = \frac{\overline{CO}}{\cos \beta}.$$

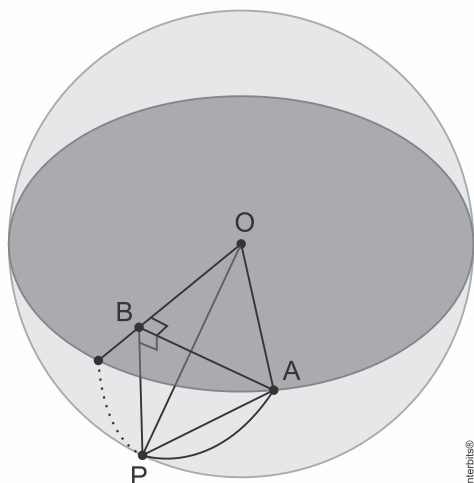
Em consequência, do triângulo ABC , pela Lei dos Cossenos, vem

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos A \hat{C} B \Leftrightarrow \\ \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - 2 \cdot \frac{\overline{CO}}{\cos \alpha} \cdot \frac{\overline{CO}}{\cos \beta} \cdot \cos A \hat{C} B \Leftrightarrow \\ \cos A \hat{C} B &= \cos \alpha \cdot \cos \beta.\end{aligned}$$

- b) Considere a figura, em que O é o centro da Terra, A é o ponto de latitude 0° e longitude 0° , B é a projeção ortogonal de A sobre a reta que passa por O e pelo ponto de latitude 0° e longitude 45° oeste e P é o ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste.



Como B também é projeção ortogonal de P sobre a reta que passa por O e pelo ponto de latitude 0° e longitude 45° oeste, segue que o tetraedro $OBPA$ corresponde ao tetraedro do item (a). Logo, sendo $B\hat{O}P = 45^\circ$ e $B\hat{O}A = 45^\circ$, temos

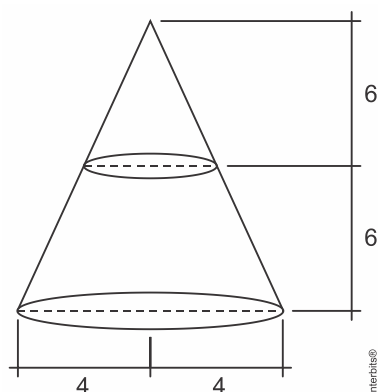
$$\cos A \hat{O} P = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}.$$

Portanto, vem $A\hat{O}P = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ e, assim, o resultado é dado por $\frac{\pi}{3} \cdot 6000 = 2000\pi \text{ km}$.

Resposta da questão 29:

[C]

De acordo com o enunciado:



Considerando:

Nos caminhos da matemática, cada problema é um poema disfarçado, cada acerto uma conquista silenciosa, e cada erro uma chance de reescrever a beleza do raciocínio. Pense com ousadia.

CORPOS REDONDOS- AFA/EFOMM/EM
PROFESSOR YURI POLITANO

$V = \text{volume total do cone}$

v' = volume cheio (tronco)

$v'' = volume\ vuoto\ (topo)$

$$H = 12 = \text{altura total}$$
$$h = 6 = \text{altura topo/altura tronco}$$

Pode-se calcular:

$$\frac{V}{v''} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^3 = \frac{V}{v''} \rightarrow V = 8v''$$

$$v' + v'' = V \rightarrow v' + \frac{V}{8} = V \rightarrow v' = \frac{7}{8}V$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 12 \rightarrow V = 200,96$$

$$v' = \frac{7}{8} V = \frac{7}{8} \cdot 200,96 \rightarrow v' = 175,85 \text{ m}^3$$

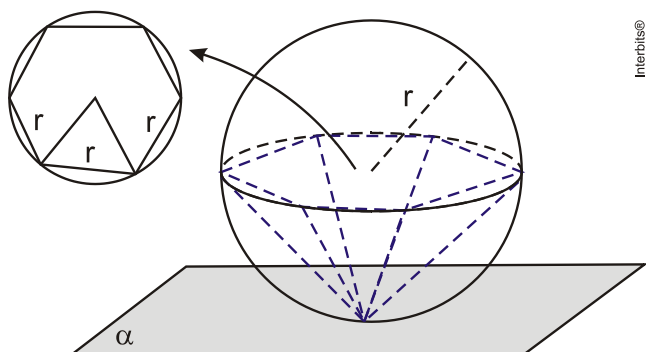
Tempo: $500 \text{ L/min} = 0,5 \text{ m}^3/\text{min}$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ min} \quad \boxed{} \quad 0,5 \text{ m}^3 \\ t \quad \boxed{} \quad 175,85 \text{ m}^3 \end{array}$$

$$t = 351,7 \text{ min} \approx 5h \text{ e } 50 \text{ min}$$

Resposta da questão 30:

[E]



$$V = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot r^3 \sqrt{3}}{4} \cdot r$$

$$V = \frac{r^3 \sqrt{3}}{2}$$