

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

1. (Ita) Um poliedro convexo tem 24 vértices e 36 arestas. Sabemos que cada vértice une 3 faces e que o número de arestas em cada face só pode assumir um entre dois valores m ou n . É CORRETO afirmar que:
- a) é possível que $m = 3$ e $n = 4$.
 - b) é possível que $m = 3$ e $n = 5$.
 - c) é possível que $m = 3$ e $n = 7$.
 - d) é possível que $m = 3$ e $n = 8$.
 - e) é possível que $m = 4$ e $n = 5$.
2. (Eear) Sejam M e N dois poliedros convexos tais que: M tem 18 arestas, 8 vértices e m faces; e N tem 20 arestas, 10 vértices e n faces. Então é correto afirmar que _____.
- a) $m = n$
 - b) $m = n + 2$
 - c) $n = m + 2$
 - d) $m + n = 22$
3. (Espcex (Aman)) Dado um dodecaedro regular, exatamente, quantas retas ligam dois de seus vértices mas não pertencem a uma mesma face desse dodecaedro?
- a) 60
 - b) 100
 - c) 130
 - d) 160
 - e) 190
4. (Espcex (Aman)) Um poliedro possui 20 vértices. Sabendo-se que de cada vértice partem 3 arestas, o número de faces que poliedro possui é igual a
- a) 12.
 - b) 22.
 - c) 32.
 - d) 42.
 - e) 52.
5. (Eear) Um poliedro convexo de 32 arestas tem apenas 8 faces triangulares e x faces quadrangulares. Dessa forma, o valor de x é
- a) 8
 - b) 10

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

c) 12

d) 14

6. (Espcex (Aman)) Considere um tronco de pirâmide quadrangular regular. Sobre esse sólido, é correto afirmar:

a) Se r e s são retas suporte de arestas laterais distintas, então r e s são reversas.

b) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base menor e s é a reta suporte de uma aresta lateral, então r e s são reversas.

c) Se r é a reta suporte de um lado da base maior e s é a reta suporte de um lado da base menor, então r e s são paralelas.

d) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base maior e s é a reta suporte de um lado da base menor, então r e s são retas reversas.

e) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base maior e s é a reta suporte da diagonal de uma face, então r e s são reversas.

7. (Espcex (Aman)) Um poliedro convexo, com 13 vértices, tem uma face hexagonal e 18 faces formadas por polígonos do tipo P . Com base nessas informações, pode-se concluir que o polígono P é um

a) dodecágono.

b) octógono.

c) pentágono.

d) quadrilátero.

e) triângulo.

8. (Ita) Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão - 5.

Determine o número de vértices do poliedro.

9. (Espcex (Aman)) Sabendo que os pontos, as retas e os planos estão no espaço, considere as afirmações:

I. Dois planos distintos que se intersectam são chamados de planos secantes.

II. Se duas retas não têm ponto em comum, então elas só podem ser paralelas.

III. Se dois planos não coincidentes têm um ponto em comum, então eles têm uma reta em comum.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta desse plano.

Destas, é(são) correta(s) apenas:

a) I

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

- b) II e IV
- c) I e IV
- d) III
- e) I e III

10. (Esa) Sobre o estudo da Geometria Espacial de Posição, analise as assertivas abaixo:

I. Se duas retas de um plano, distintas e concorrentes, são paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos entre si.

II. Se um sistema linear é classificado como possível e indeterminado, então as retas que os constituem são ditas coincidentes.

III. Duas ou mais retas são coplanares quando existe um plano que contém todas elas.

IV. Quando uma reta é perpendicular a um plano, todos os planos que a contêm são perpendiculares a este plano.

V. Projeção ortogonal de um segmento sobre um plano: pode ser um segmento ou um ponto.

Marque a alternativa correta:

- a) Apenas os itens I, II e V são verdadeiros.
- b) Apenas os itens II e V são falsos.
- c) Os itens III, IV e V não são verdadeiros.
- d) Todos os itens são verdadeiros.
- e) Apenas o item I é verdadeiro.

11. (Ime) Sejam α e β dois planos não paralelos que se interceptam na reta r e cujo ângulo diedro é $\pi/6$ radianos. Tome pontos A, B, C, D de α e, por cada um destes pontos, trace retas ortogonais a α que interceptam β nos pontos A', B', C', D' , respectivamente. Sabendo que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio cuja diagonal AC é paralela a r , a razão entre as áreas de $ABCD$ e $A'B'C'D'$ é:

- a) 1
- b) $3/2$
- c) $\sqrt{3}/2$
- d) $\sqrt{3}/3$
- e) $1/3$

12. (Espcex (Aman)) Sobre os conceitos de Geometria Espacial de Posição, analise as proposições a seguir.

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

- I. Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente ao outro.
- II. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas desse plano.
- III. Se dois planos têm uma única reta em comum, eles são secantes.
- IV. Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.
- V. Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

Sobre essas proposições, é correto afirmar que

- a) apenas a II e a III são verdadeiras.
- b) apenas a II, a III e a IV são verdadeiras.
- c) apenas a I e a IV são falsas.
- d) apenas a IV e a V são falsas.
- e) todas são verdadeiras.

13. (Esc. Naval) Seja a reta r oblíqua a um plano φ pelo ponto A . Considere que a reta $s \subset \varphi$ é a projeção ortogonal de r sobre φ e a reta $t \subset \varphi$ que passa por A . Se θ é o ângulo entre r e s e, β é o ângulo entre r e t , assinale a opção que apresenta a correta relação entre esses ângulos.

- a) $\theta < \beta$
- b) $\theta = \beta$
- c) $\beta < \theta$
- d) $\theta = 2\beta$
- e) $2\beta < \theta$

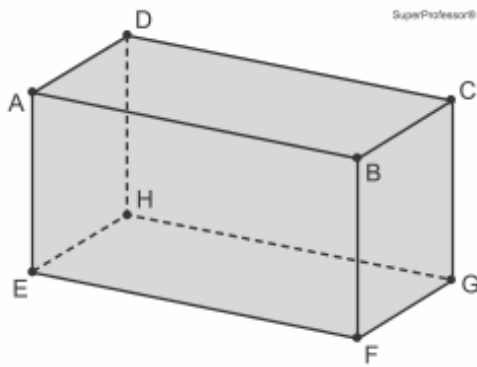
14. (Espcex (Aman)) Dado um cubo, o número de pares distintos de retas reversas que podemos traçar, de tal forma que cada reta contenha uma aresta desse cubo, é igual a

- a) 24.
- b) 30.
- c) 36.
- d) 42.
- e) 48.

15. (Esa) Observe o paralelepípedo retângulo da figura abaixo.

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais



Sobre este sólido, assinale a única alternativa correta.

- a) As retas CD e $\vec{CG}$ são ortogonais entre si.
- b) A reta CF é paralela ao plano (ADH) .
- c) As retas AC e HF são paralelas entre si.
- d) A reta AB é perpendicular ao plano (EFG) .
- e) As retas $\vec{BF}$ e DH são perpendiculares entre si.

16. (Espcex (Aman)) Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que $r \subset \alpha, s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

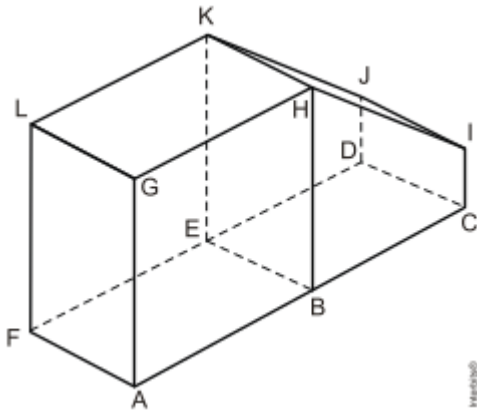
Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

- a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.
- b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t .
- c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.
- d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β .
- e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a S .

17. (Espcex (Aman)) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais



Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$, as retas $\overline{AG}$ e HI , e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,

- a) concorrentes; reversas; reversas.
- b) reversas; reversas; paralelas.
- c) concorrentes, reversas; paralelas.
- d) reversas; concorrentes; reversas.
- e) concorrentes; concorrentes; reversas.

18. (Esc. Naval) Um quadrado $ABCD$, de lado 4cm , tem os vértices num plano α . Pelos vértices A e C são traçados dois segmentos, AP e CQ , perpendiculares a α , medindo respectivamente, 3cm e 7cm . A distância PQ tem medida, em cm , igual a

- a) $2\sqrt{2}$
- b) $2\sqrt{3}$
- c) $3\sqrt{2}$
- d) $3\sqrt{3}$
- e) $4\sqrt{3}$

19. (Esc. Naval) Nas proposições abaixo, coloque **V** na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e **F** quando for falsa.

() Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

- () Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.
- () Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
- () Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro
- () Se três planos são dois a dois perpendiculares , eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

- a) F – F – V – F – V
- b) V – F – V – V – F
- c) V – V – F – V – V
- d) F – V – V – V – V
- e) V – V – V – V – V

20. (Espcex (Aman)) Considere as seguintes afirmações:

- I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.
- II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.
- III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P , então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r .

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

- a) Somente II
- b) I e II
- c) I e III
- d) II e III
- e) I, II e III

21. (Ita) Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

- a) 10
- b) 17
- c) 20
- d) 22
- e) 23

Gabarito

Resposta da questão 1:

[D]

Aplicando a relação de Euler, obtemos o número de faces do poliedro:

$$\begin{aligned}V + F &= A + 2 \\24 + F &= 36 + 2 \\F &= 14\end{aligned}$$

Para um total de A arestas, temos:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + kF_k = 2A$$

Com:

$$F_m + F_n = 14$$

Dentre as alternativas, a única que produz uma combinação possível é $m = 3$ e $n = 8$, pois:

$$\begin{aligned}3F_3 + 8F_8 &= 2 \cdot 36 \\3F_3 + 8(14 - F_3) &= 72 \\3F_3 + 112 - 8F_3 &= 72 \\-5F_3 &= -40 \\F_3 &= 8 \\e \\F_8 &= 14 - 8 = 6\end{aligned}$$

Resposta da questão 2:

[A]

Pela relação de Euler, obtemos:

$$\begin{aligned}V + F &= A + 2 \\ \begin{cases} 8 + m = 18 + 2 \\ 10 + n = 20 + 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ n = 12 \end{cases}\end{aligned}$$

Portanto, $m = n$.

Resposta da questão 3:

[B]

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

Um dodecaedro possui 12 faces pentagonais, e cada aresta está contida em 2 faces. Logo, o número de arestas é dado por:

$$A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$$

Total de vértices do dodecaedro:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + 12 &= 30 + 2 \\ V &= 20 \end{aligned}$$

Total de retas que podem ser formadas com 2 de seus vértices:

$$C_{20,2} = \frac{20!}{18! 2!} = 190$$

Total de retas que contêm as arestas das faces:

$$30$$

Total de retas que contêm as diagonais das faces:

$$12d = 12 \cdot \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 60$$

Portanto, a quantidade de retas que satisfaz a condição do enunciado é igual a:

$$190 - 60 - 30 = 100$$

Resposta da questão 4:

[A]

Como cada aresta está presente em dois vértices distintos, o número de arestas presentes nesse poliedro é:

$$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

Portanto, o número de faces é igual a:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ 20 + F &= 30 + 2 \\ \therefore F &= 12 \end{aligned}$$

Resposta da questão 5:

[B]

Como cada aresta está presente em 2 faces, devemos ter:

$$\begin{aligned} 32 &= \frac{8 \cdot 3}{2} + \frac{x \cdot 4}{2} \\ 32 &= 12 + 2x \\ \therefore x &= 10 \end{aligned}$$

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

Resposta da questão 6:

[D]

[A] Falsa. As retas r e s possuem um ponto de interseção, qual seja, o vértice da pirâmide que dá origem ao tronco.

[B] Falsa. Depende da aresta lateral que for considerada.

[C] Falsa. Depende do lado da base menor considerado.

[D] Verdadeira. Não há plano que contenha r e s .

[E] Falsa. Depende da diagonal da face considerada.

Resposta da questão 7:

[E]

Seja n o número de lados de cada polígono do tipo P .

Se $V = 13$ e $F = 19$, então, pela Relação de Euler, vem

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \quad \Leftrightarrow 13 + 19 = A + 2 \\ &\Leftrightarrow A = 30. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$2A = 18 \cdot n + 1 \cdot 6 \Leftrightarrow A = 9n + 3.$$

Desse modo, encontramos

$$9n + 3 = 30 \Leftrightarrow n = 3,$$

ou seja, P é um triângulo.

Resposta da questão 8:

Sejam n , $n-5$ e $n-10$, respectivamente, as quantidades de arestas, faces triangulares e quadrangulares.

Então,

$$\begin{aligned} n &= \frac{3 \cdot (n - 5) + 4 \cdot (n - 10)}{2} \\ 2n &= 3n - 15 + 4n - 40 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

Logo, o poliedro possui 11 arestas, 6 faces triangulares e 1 face quadrangular, ou seja, possui 7 faces.

Dessa forma, sendo V o número de vértices do poliedro, temos:

$$V - 11 + 7 = 2$$

$$V = 6$$

Resposta: Seis vértices

Resposta da questão 9:

[E]

[I] Verdadeira. Planos secantes possuem apenas uma reta comum.

[II] Falso. No espaço duas retas reversas (não coplanares) também não possuem ponto comum.

[III] Verdadeira. Planos secantes possuem apenas uma reta comum

[IV] Falsa. Pode ser reversa com outra reta do plano.

Resposta da questão 10:

[D]

[I] Verdadeira. Se duas retas distintas e concorrentes pertencentes a um mesmo plano são paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos entre si.

[II] Verdadeira. Se um sistema linear é possível e indeterminado, então as retas que o constituem são coincidentes, pois há infinitos pontos em comum entre elas.

[III] Verdadeira. Duas ou mais retas são ditas coplanares quando estão contidas em um mesmo plano.

[IV] Verdadeira. Se uma reta é perpendicular a um plano, então todos os planos que a contêm são perpendiculares a este plano.

[V] Verdadeira. A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano pode ser um segmento ou um ponto (caso em que o segmento é ortogonal ao plano).

Resposta da questão 11:

[C]

De acordo com os dados do problema, o quadrilátero ABCD é a projeção ortogonal do quadrilátero A'B'C'D' sobre o plano α . Sendo assim:

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta da questão 12:

[A]

[I] Falsa. As retas contidas nos planos podem ser paralelas.

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

[II] Verdadeira. Se um plano é paralelo a uma reta, então existem infinitas retas contidas no plano que são paralelas à essa reta.

[III] Verdadeira. Se dois planos possuem uma única reta em comum, então eles devem ser secantes.

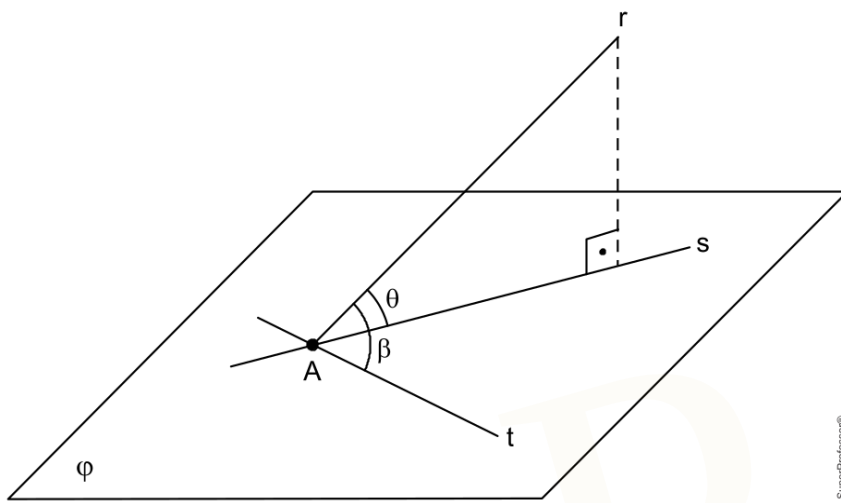
[IV] Falsa. Essas duas retas perpendiculares a uma terceira podem ser paralelas entre si, por exemplo.

[V] Falsa. Uma reta de um deles pode ser paralela ao outro.

Resposta da questão 13:

[A]

O ângulo θ é o menor ângulo entre o plano φ e a reta r .

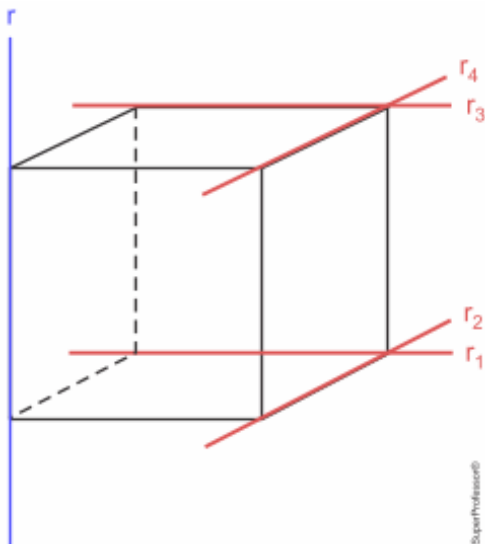


Sendo assim, podemos afirmar que $\theta < \beta$

Resposta da questão 14:

[A]

Cada reta que contenha uma aresta do cubo possui 4 retas reversas que também contenham arestas desse mesmo cubo.



GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

Como o cubo possui 12 arestas, o total de pares de arestas reversas que podemos traçar é de:

$$\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$$

Resposta da questão 15:

[B]

[A] Falsa. Na verdade, as retas CD e $\vec{CG}$ são perpendiculares.

[B] Verdadeira. Com efeito, pois as retas CF e DE são paralelas.

[C] Falsa. A projeção ortogonal da reta AC sobre o plano (EFG) é a reta EG . Ocorre que EG e HF são concorrentes.

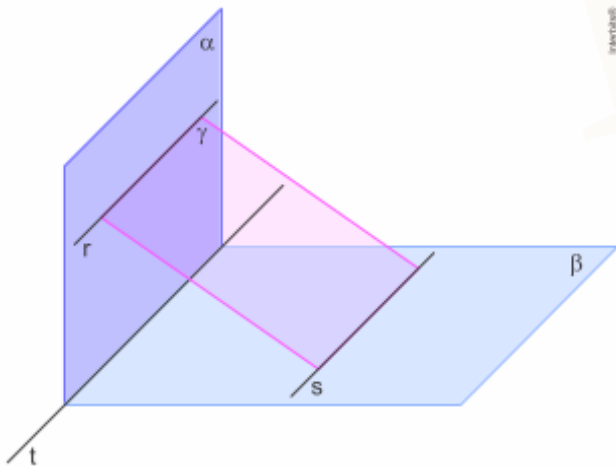
[D] Falsa. Na verdade, sabemos que a reta AB é paralela ao plano (EFG) .

[E] Falsa. Tais retas são paralelas.

Resposta da questão 16:

[B]

Do enunciado, temos:



Façamos $r // s$.

Dessa forma, é possível construir o plano γ paralelo à reta t , o que faz da alternativa [B] a alternativa verdadeira.

Resposta da questão 17:

[E]

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

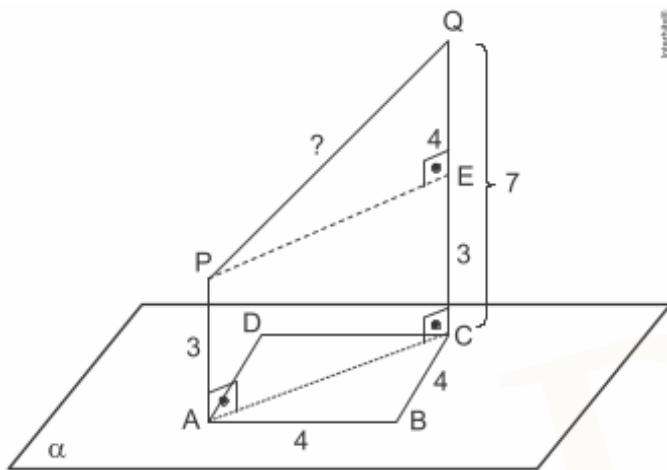
As retas LB e GE são as retas suporte das diagonais GE e LB . Logo, as retas LB e GE são concorrentes no ponto de interseção das diagonais do bloco.

Como as retas AG e HI são coplanares e não paralelas, segue que AG e HI são concorrentes.

Como AD e GK são distintas, não têm ponto em comum e não são coplanares, temos que AD e GK são reversas.

Resposta da questão 18:

[E]



$$PE = AC = 4\sqrt{2}cm$$

$$QE = 7 - 3 = 4cm$$

Logo,

$$PQ^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2$$

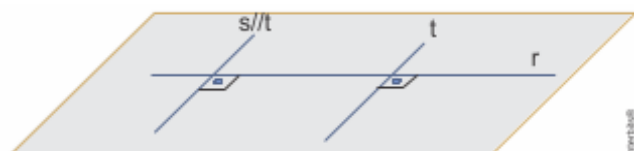
$$PQ = \sqrt{48}$$

$$PQ = 4 \cdot \sqrt{3}cm$$

Resposta da questão 19:

[D]

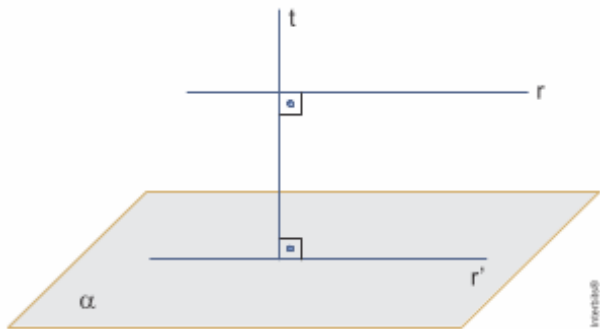
[A] Falsa. Ela poderá ser perpendicular a duas retas concorrentes deste plano e neste caso estar contida no plano.



GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

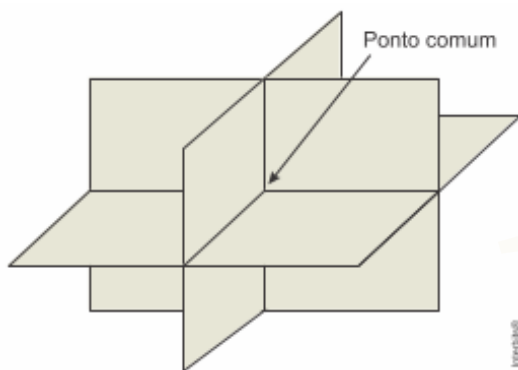
[B] Verdadeira. Toda à reta é paralela à sua projeção ortogonal em um plano qualquer.



[C] Verdadeira, pois formam o mesmo ângulo com o plano.

[D] Verdadeira. Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos entre si, pois formam o mesmo ângulo com esse terceiro plano.

[E] Verdadeiro. Estes três planos dividem o espaço em oito octantes, com apenas um ponto em comum, cada dois planos possuem em comum um única reta e estas três retas se encontram num único ponto.



Resposta da questão 20:

[D]

I. Falsa. r_1 e r_2 podem ser reversas.

II. Verdadeira. Dada uma reta $r_1 \subset \alpha$, podemos determinar $r_2 \subset \beta$, com $r_1 \parallel r_2$, através da projeção ortogonal de r_1 sobre β .

III. Verdadeira.

Resposta da questão 21:

[C]

Resumo das questões selecionadas nesta atividade

Legenda

Q/Prova = número da questão na prova

Q/DB = número da questão no banco de dados do Super Professor

GEOMETRIA ESPACIAL- AULA 01

Conceitos iniciais

Q/Prova	Q/DB	Grau/Dif.	Matéria	Fonte	Tipo
1	250381	Elevada	Matemática	Ita/2024	Múltipla escolha
2	220937	Baixa	Matemática	Eear/2023	Múltipla escolha
3	202927	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2022	Múltipla escolha
4	196140	Baixa	Matemática	Espcex (Aman)/2021	Múltipla escolha
5	197719	Baixa	Matemática	Eear/2021	Múltipla escolha
6	189565	Baixa	Matemática	Espcex (Aman)/2020	Múltipla escolha
7	189573	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2020	Múltipla escolha
8	176310	Média	Matemática	Ita/2018	Analítica
9	252621	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2025	Múltipla escolha
10	253010	Baixa	Matemática	Esa/2025	Múltipla escolha
11	242394	Elevada	Matemática	Ime/2024	Múltipla escolha
12	217813	Baixa	Matemática	Espcex (Aman)/2023	Múltipla escolha
13	245571	Baixa	Matemática	Esc. Naval/2023	Múltipla escolha
14	202933	Baixa	Matemática	Espcex (Aman)/2022	Múltipla escolha
15	206221	Média	Matemática	Esa/2022	Múltipla escolha
16	174120	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2018	Múltipla escolha
17	120722	Baixa	Matemática	Espcex (Aman)/2013	Múltipla escolha
18	133628	Média	Matemática	Esc. Naval/2013	Múltipla escolha
19	133629	Média	Matemática	Esc. Naval/2013	Múltipla escolha
20	116923	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2012	Múltipla escolha
21	30108	Não definida	Matemática	Ita/1999	Múltipla escolha