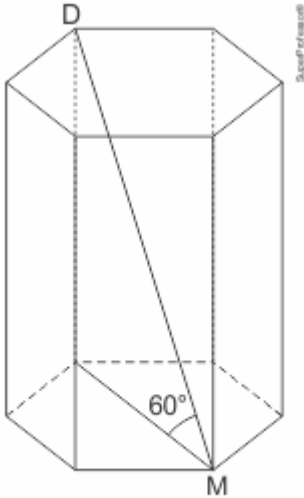


1. (Espcex (Aman)) Considere o prisma hexagonal regular de altura 12 cm e o segmento DM que une os vértices D e M formando um ângulo de 60° com o plano da base, como indicado na figura abaixo.



Desenho ilustrativo – Fora de escala

Determine, em cm^3 o volume do prisma.

- a) $144\sqrt{3}$.
- b) $168\sqrt{3}$.
- c) $192\sqrt{3}$.
- d) $216\sqrt{3}$.
- e) $225\sqrt{3}$.

2. (Espcex (Aman)) Um paralelepípedo reto tem como seção reta um paralelogramo $ABCD$, cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 20 cm e 10 cm, e o ângulo DAB mede 30° . Sabendo que a altura do paralelepípedo é igual a dois terços do perímetro da seção reta, o seu volume é:

- a) 2000 cm^3
- b) 4000 cm^3
- c) 6000 cm^3
- d) $2000\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- e) $4000\sqrt{3} \text{ cm}^3$

3. (Espcex (Aman)) Um cubo com área total de 96 cm^2 está circunscrito a uma esfera. O volume dessa esfera é igual a

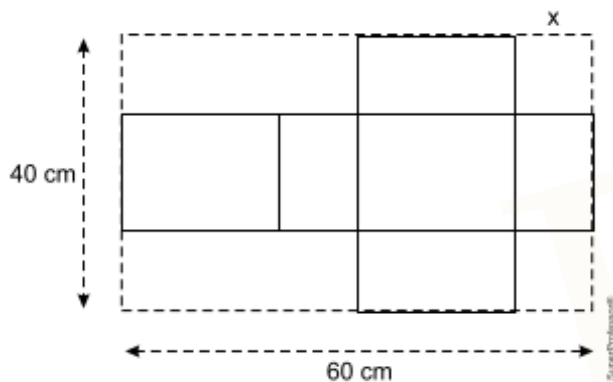
- a) $\frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$
- b) $16\pi \text{ cm}^3$
- c) $\frac{64}{3}\pi \text{ cm}^3$
- d) $\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$

e) $\frac{16}{3}\pi\text{cm}^3$

4. (Fgv) Certo produto é transportado em contêineres cúbicos. Para reduzir o custo da embalagem no transporte, os transportadores pretendem trocar o contêiner atual por um cubo maior, com aresta duas vezes a aresta do cubo atual. Suponha que o material gasto para montar um contêiner seja proporcional à área da superfície do cubo. Ao transportar um volume correspondente ao cubo maior totalmente cheio, a economia de material com o cubo maior em relação ao material gasto com os contêineres atuais, necessários para transportar o mesmo volume, é de

- a) 10%
- b) 20%
- c) 30%
- d) 40%
- e) 50%

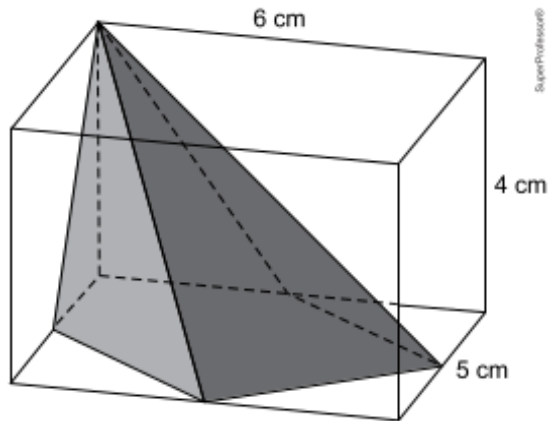
5. (Fgv) De uma folha retangular de papel de medidas 60 cm por 40 cm serão recortados quatro cantos, de maneira a ser possível construir um paralelepípedo reto-retângulo de área total 1.698 cm^2 , conforme mostra a figura.



Nessas condições o valor de x é

- a) 6 cm.
- b) 7 cm.
- c) 8 cm.
- d) 9 cm.
- e) 10 cm.

6. (Fgv) Em um paralelepípedo reto-retângulo está inscrita uma pirâmide de base pentagonal. Dois vértices dessa pirâmide são os vértices de uma das arestas do paralelepípedo e os outros quatro vértices são os pontos médios das arestas da base do paralelepípedo, conforme mostra a figura.



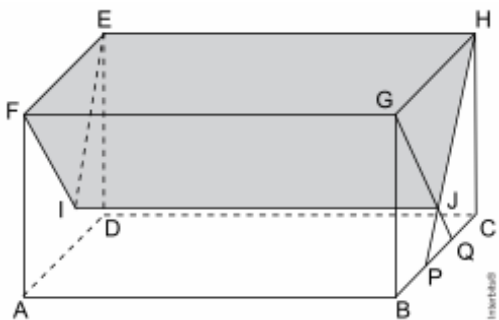
O volume dessa pirâmide é

- a) 25 cm^3 .
- b) 30 cm^3 .
- c) 35 cm^3 .
- d) 40 cm^3 .
- e) 45 cm^3 .

7. (Fuvest) Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de medidas $60 \text{ cm} \times 24 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medidas das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir esse paralelepípedo?

- a) 60
- b) 72
- c) 80
- d) 96
- e) 120

8. (Fgv) Sobre a face quadrada BCHG do paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH foram traçados $\overline{GQ}$ e $\overline{HP}$, intersectando-se em J, com Q dividindo $\overline{BC}$ em três segmentos congruentes tais que $BP = PQ = QC$. Sabe-se ainda que $HE = 8 \text{ cm}$ e que GJHEFI é um prisma reto de volume 81 cm^3 .



O volume do paralelepípedo ABCDEFGH, em cm^3 , é igual a

- a) 243
- b) 216

- c) 192
- d) 96
- e) 72

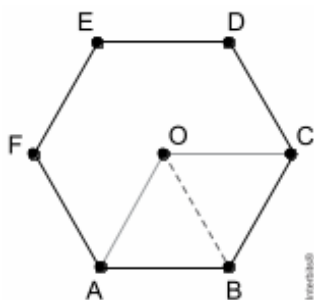
9. (Espcex (Aman)) Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura a e lados da base b e c (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e " a ", b e c são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

- a) 16
- b) 36
- c) 108
- d) 432
- e) 648

10. (Espcex (Aman)) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm . Então a medida da sua área total, em cm^2 , é

- a) 752
- b) 820
- c) 1.024
- d) 1.302
- e) 1.504

11. (Fgv) Em uma folha de papel, desenha-se um hexágono regular ABCDEF de lado 3 cm e inscrito em uma circunferência de centro O . O hexágono é recortado, e, em seguida, faz-se um recorte no raio $\overline{OB}$. A partir do recorte no raio, o pedaço de papel será usado para formar uma pirâmide de base quadrangular e centro O . Tal pirâmide será feita com a sobreposição e a colagem dos triângulos OAB e OCD , e dos triângulos OAF e OBC .



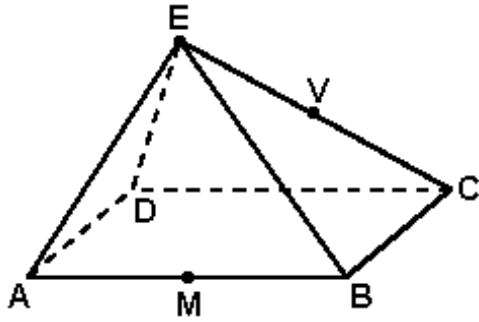
O volume da pirâmide formada após as sobreposições e colagens, em cm^3 , é igual a

- a) $3\sqrt{2}$
- b) $3\sqrt{3}$
- c) $4\sqrt{2}$

d) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

12. (Fuvest) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:



a) 1

b) 1,5

c) 2

d) 2,5

e) 3

13. (Fuvest) Uma pirâmide tem como base um quadrado de lado 1, e cada uma de suas faces laterais é um triângulo equilátero. Então, a área do quadrado, que tem como vértices os baricentros de cada uma das faces laterais, é igual a

a) $\frac{5}{9}$

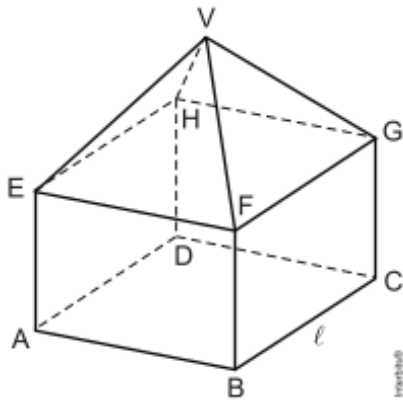
b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{9}$

14. (Espcex (Aman)) Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide. Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida ℓ , então as medidas da altura (distância do ponto V à face ABCD) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,



a) $l \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2} \right)$ e $l^2(\sqrt{3}+4)$

b) $l \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2} \right)$ e $l^2(\sqrt{3}+5)$

c) $l \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2} \right)$ e $l^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 5 \right)$

d) $l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ e $l^2(\sqrt{3}+5)$

e) $l \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ e $l^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \right)$

15. (Espcex (Aman)) As medidas em centímetros das arestas de um bloco retangular são as raízes da equação polinomial $x^3 - 14x^2 + 64x - 96 = 0$. Denominando-se r , s e t essas medidas, se for construído um novo bloco retangular, com arestas medindo $(r - 1)$, $(s - 1)$ e $(t - 1)$, ou seja, cada aresta medindo 1 cm a menos que a do bloco anterior, a medida do volume desse novo bloco será

a) 36 cm^3

b) 45 cm^3

c) 54 cm^3

d) 60 cm^3

e) 80 cm^3

16. (Fuvest) Em um tetraedro regular de lado a , a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a

a) $a\sqrt{3}$

b) $a\sqrt{2}$

c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

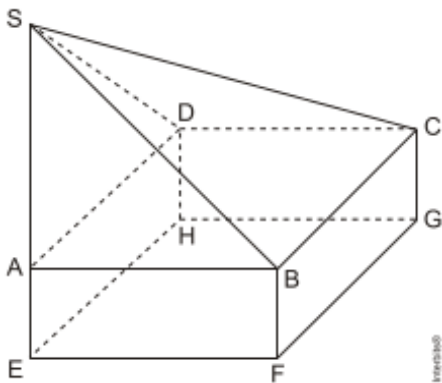
d) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

17. (Espcex (Aman)) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3 . O volume do prisma original é

- a) 18 cm^3 .
- b) 36 cm^3 .
- c) $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
- d) $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
- e) 40 cm^3 .

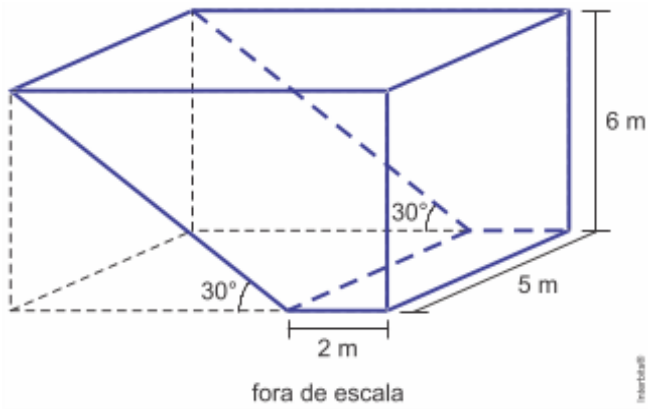
18. (Fuvest) O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que $\overline{AE} = 2 \text{ cm}$, $\overline{AD} = 4 \text{ cm}$ e $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$.



A medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é

- a) 2 cm
- b) 4 cm
- c) 6 cm
- d) 8 cm
- e) 10 cm

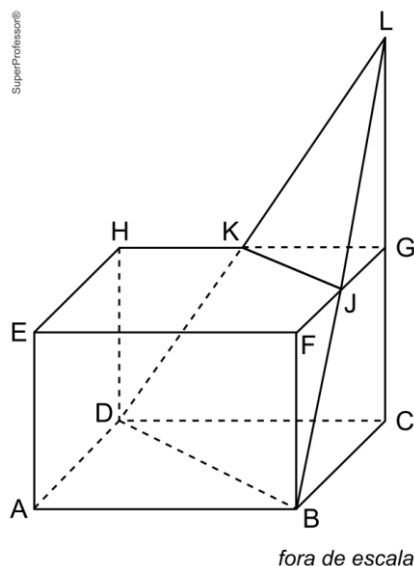
19. (Famema) A figura indica, em azul, um reservatório em forma de prisma construído a partir de um paralelepípedo reto-retangular, também indicado na figura.



Relembrando que seno, cosseno e tangente de 30° são iguais a $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$, respectivamente, o volume do reservatório, em m^3 , é igual a

- a) 60
- b) $30 + 90\sqrt{3}$
- c) $90 + 90\sqrt{3}$
- d) $180 + 60\sqrt{3}$
- e) $60 + 90\sqrt{3}$

20. (Albert Einstein - Medicina) Na figura, estão representados o prisma retorretângulo ABCDEFGH e a pirâmide BCDL. O vértice L da pirâmide está na reta que contém a aresta CG do prisma. O prisma e a pirâmide BCDL têm o mesmo volume.

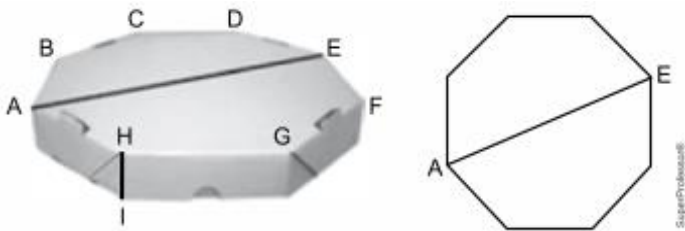


O ponto J está na interseção dos segmentos BL e FG , e o ponto K está na interseção dos segmentos DL e GH . O volume da pirâmide GJKL, em relação ao volume do prisma, corresponde a

- a) $\frac{125}{216}$

- b) $\frac{16}{25}$
 c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{25}{36}$
 e) $\frac{64}{125}$

21. (Albert Einstein - Medicina) Uma embalagem de pizza tem a forma de um prisma reto-regular de base octogonal, conforme mostram as figuras. Sabe-se que $\overline{AE}$ é a maior diagonal da parte superior da tampa, medindo 32 cm, e que $\overline{HI}$ é a aresta lateral da embalagem, medindo 4 cm.



Desconsiderando os encaixes e a espessura do material de que é feita a embalagem e utilizando, se necessário, a fórmula $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, o volume dessa embalagem é igual a

- a) $512\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 b) $1024\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 c) $758\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 d) $1536\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 e) $2048\sqrt{2} \text{ cm}^3$

Gabarito

Resposta da questão 1:

[D]

Seja P a projeção do ponto D no plano da base do prisma. No triângulo DPM, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{\overline{DP}}{\overline{PM}} \\ \sqrt{3} &= \frac{12}{\overline{PM}} \\ \overline{PM} &= 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Sendo assim, o lado do hexágono regular da base vale:

$$\begin{aligned} 2\ell &= 4\sqrt{3} \\ \ell &= 2\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

E a área da base vale:

$$A = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Logo, o volume do prisma é igual a:

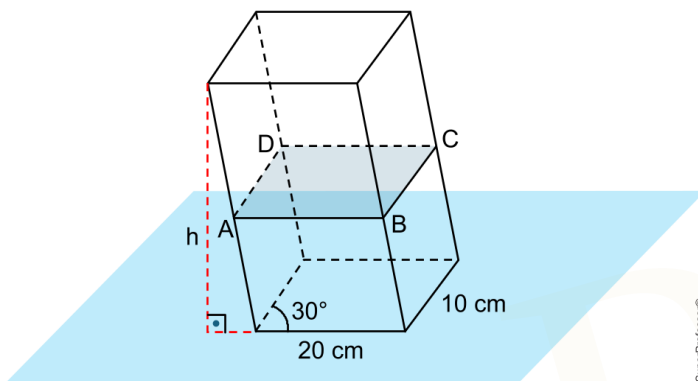
$$V = A \cdot h = 18\sqrt{3} \cdot 12$$

$$\therefore V = 216\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Resposta da questão 2:

[B]

De acordo com as informações do problema, podemos representar o prisma da seguinte forma:



Calculando, inicialmente, a área da base, temos:

$$A_b = 20 \cdot 10 \cdot \text{sen}30^\circ \Rightarrow A_b = 200 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A_b = 100 \text{ cm}^2$$

A altura será dois terços do perímetro da base:

$$h = \frac{2}{3} \cdot (20 + 20 + 10 + 10) \Rightarrow h = 40 \text{ cm}$$

Logo, o volume será dado por:

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = 100 \cdot 40$$

$$V = 4000 \text{ cm}^3$$

Resposta da questão 3:

[D]

Lado do cubo:

$$\begin{aligned} 6L^2 &= 96 \\ L &= \sqrt{16} \\ L &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Raio da esfera:

$$\begin{aligned} 2R &= 4 \\ R &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Portanto, o volume da esfera vale:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \\ \therefore V &= \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Resposta da questão 4:

[E]

Quantidade de cubos menores para cada cubo maior:

$$\begin{aligned} V_{\text{maior}} &= V_{\text{menor}} \\ (2a)^3 &= n \cdot a^3 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

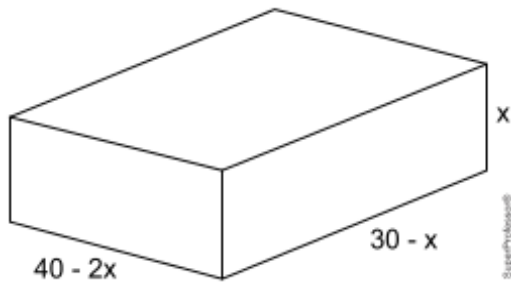
Economia de material:

$$\frac{8A_{\text{menor}} - A_{\text{maior}}}{8A_{\text{menor}}} \cdot 100\% = \frac{8 \cdot 6a^2 - 6 \cdot (2a)^2}{8 \cdot 6a^2} \cdot 100\% = 50\%$$

Resposta da questão 5:

[D]

As dimensões do paralelepípedo (em cm) estão representadas na figura abaixo:



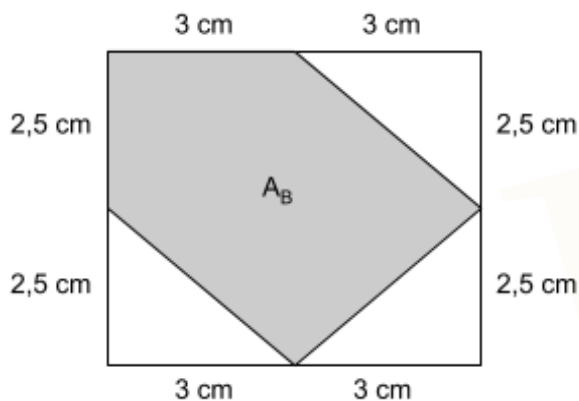
Sendo assim, o valor de x é:

$$\begin{aligned}
 2[(40 - 2x)(30 - x) + x(40 - 2x) + x(30 - x)] &= 1698 \\
 1200 - 40x - 60x + 2x^2 + 40x - 2x^2 + 30x - x^2 &= 849 \\
 x^2 + 30x - 351 &= 0 \\
 x &= \frac{-30 + \sqrt{2304}}{2} = \frac{-30 + 48}{2} \\
 \therefore x &= 9 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 6:

[A]

Área da base da pirâmide:



$$\begin{aligned}
 A_B &= 6 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{3 \cdot 2,5}{2} \\
 A_B &= 18,75 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Volume da pirâmide:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \cdot 18,75 \cdot 4 \\
 \therefore V &= 25 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 7:

[E]

A medida da aresta de cada cubo corresponde ao máximo divisor comum das dimensões do paralelepípedo, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \text{mdc}(60, 24, 18) &= \text{mdc}(2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2) \\
 &= 2 \cdot 3 \\
 &= 6 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Em consequência, a resposta é

$$\frac{60}{6} \cdot \frac{24}{6} \cdot \frac{18}{6} = 120.$$

Resposta da questão 8:

[B]

Calculando:

$$\Delta GHJ \approx \Delta PQJ$$

$$GH = GB = BC = CH = a$$

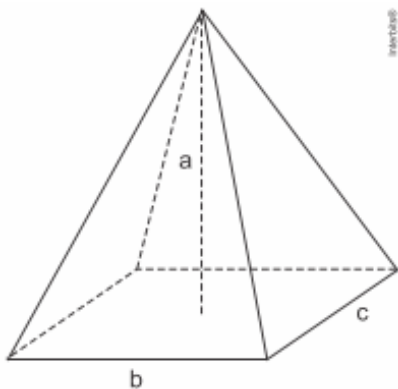
$$\frac{a}{a/3} = \frac{h_{GHJ}}{a - h_{GHJ}} \Rightarrow h_{GHJ} = \frac{3a}{4}$$

$$V_{prisma} = \frac{a \cdot h_{GHJ}}{2} \cdot 8 = 81 \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot 8 = 81 \Rightarrow a^2 = 27$$

$$V_{paralelepipedo} = a^2 \cdot 8 = 27 \cdot 8 = 216$$

Resposta da questão 9:

[D]



$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = k \Rightarrow \begin{aligned} a &= 6k \\ b &= 4k \\ c &= 2k \end{aligned}$$

Portanto,

$$6k + 4k + 2k = 36 \Rightarrow k = 3.$$

O volume da pirâmide será dada por:

$$V = \frac{b \cdot c \cdot a}{3} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 18}{3} = 432$$

Resposta da questão 10:

[E]

Sejam a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 3k, b = 4k \text{ e } c = 5k.$$

$$3k + 4k + 5k = 48 \Rightarrow 12k = 48 \Rightarrow k = 4$$

Portanto, $a = 12 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$ e $c = 20 \text{ cm}$.

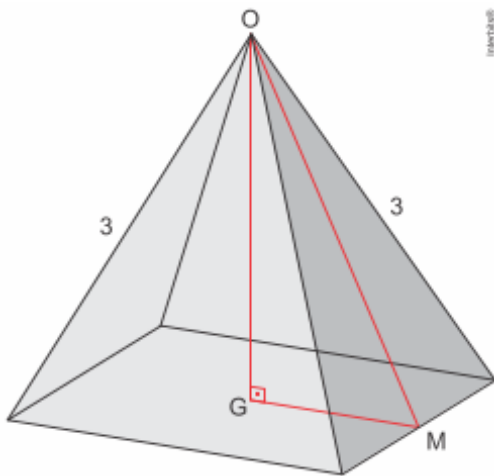
Então, a área total será dada por:

$$A_T = 2 \cdot (12 \cdot 16 + 12 \cdot 20 + 16 \cdot 20) = 1504 \text{ cm}^2$$

Resposta da questão 11:

[D]

Calculando:



$$\ell = 3$$

$$OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$GM = \frac{3}{2}$$

$$(OG)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow OG = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = V = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Resposta da questão 12:

[B]

Resposta da questão 13:

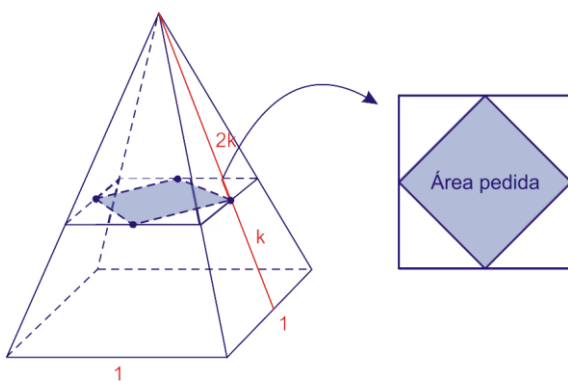
[D]

O baricentro divide a mediana na razão 2 para 1

Secção transversal = quadrado (maior) destacado

$$\frac{A_{\text{sec}}}{A_{\text{base}}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{A_{\text{sec}}}{1} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow A_{\text{sec}} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Área pedida} = \frac{1}{2} A_{\text{sec}} = \frac{2}{9}$$



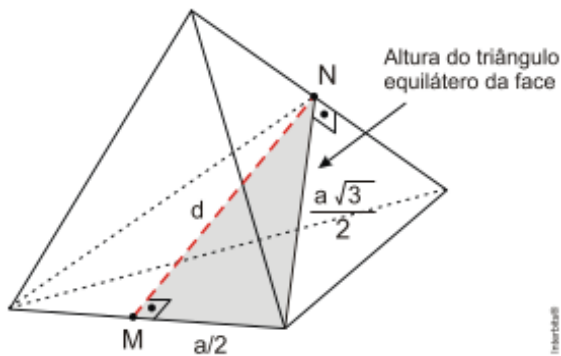
Resposta da questão 14:

[B]

Considere a figura abaixo, em que $\bigcirc$ é o centro da base da pirâmide.

Resposta da questão 16:

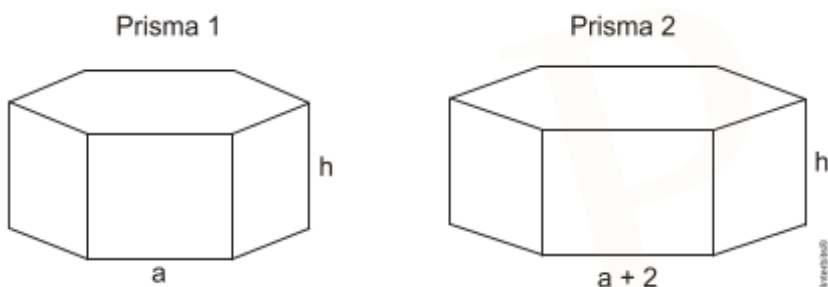
[D]



$$d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{2 \cdot a^2}{4}} \Leftrightarrow d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Resposta da questão 17:

[B]



Volume do prisma 1: $\frac{6 \cdot a^2 \sqrt{3} \cdot h}{4}$

Volume do prisma 2: $\frac{6 \cdot (a+2)^2 \sqrt{3} \cdot h}{4}$

Aumento do volume: $V_2 - V_1 = 6\sqrt{3} \cdot (a+1) \cdot h = 108 \quad (I)$

$$\frac{a}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = a\sqrt{3} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\begin{aligned}6\sqrt{3} \cdot (a + 1) \cdot a\sqrt{3} &= 108 \\18(a^2 + a) &= 108 \\a^2 + a &= 6\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos $a = -3$ (não convém) ou $a = 2$.

$a = 2\text{ cm} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\text{ cm}$, portanto, o volume do prisma 1 será dado por:

$$V_1 = \frac{6 \cdot a^2\sqrt{3} \cdot h}{4} = \frac{6 \cdot 2^2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 36\text{ cm}^3$$

Resposta da questão 18:

[E]

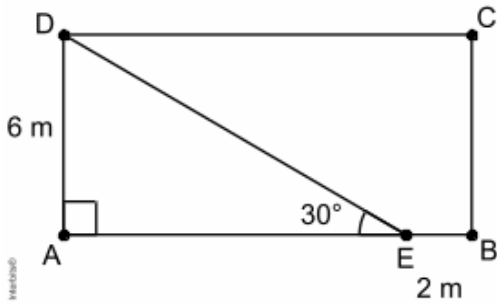
Sabendo que ABCDEFGH é paralelepípedo reto, temos $\overline{EF} = \overline{AB}$ e $\overline{EH} = \overline{AD}$. Portanto, segue que o resultado pedido é dado por

$$\begin{aligned}[SABCD] + [ABCDHEFG] &= \frac{4}{3} \cdot [SEFGH] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \overline{SA} + \overline{AE} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} (\overline{AE} + \overline{SA}) \\&\Leftrightarrow 3 \cdot \overline{SA} + 9 \cdot 2 = 4 \cdot (2 + \overline{SA}) \\&\Leftrightarrow \overline{SA} = 10 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 19:

[E]

Considere a vista frontal do paralelepípedo que deu origem ao reservatório, de tal sorte que $\overline{BE} = 2 \text{ m}$ e $\overline{AD} = 6 \text{ m}$.



Assim, do triângulo ADE , vem

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AE} = 6\sqrt{3}m.$$

Em consequência, sendo a altura do prisma igual a 5 m. temos

$$\left(\frac{6\sqrt{3} + 2 + 2}{2}\right) \cdot 6 \cdot 5 = (60 + 90\sqrt{3})m^3.$$

Resposta da questão 20:

[A]

Da igualdade entre os volumes do prisma e da pirâmide, obtemos:

$$\begin{aligned} V_{ABCDEFGH} &= V_{BCDL} \\ 2A_{BCD} \cdot CG &= \frac{1}{3} \cdot A_{BCD} \cdot CL \\ CL &= 6CG \end{aligned}$$

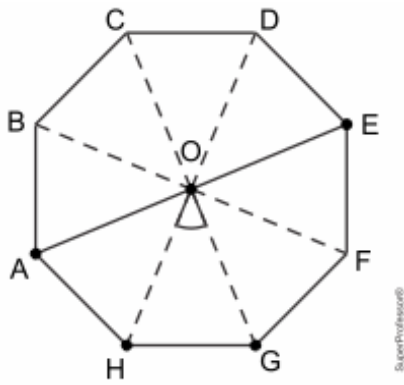
Por semelhança de volumes, obtemos a relação procurada:

$$\begin{aligned} \frac{V_{GJKL}}{V_{BCDL}} &= \left(\frac{\overline{GL}}{\overline{CL}}\right)^3 = \left(\frac{6\overline{CG} - \overline{CG}}{6\overline{CG}}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ \therefore \frac{V_{GJKL}}{V_{BCDL}} &= \frac{125}{216} \end{aligned}$$

Resposta da questão 21:

[E]

Considere a figura.



Tem-se que o ponto médio de AE é o centro do círculo circunscrito ao octógono $ABCDEFGH$. Assim, temos $\overline{GO} = \overline{HO} = \frac{32}{2} = 16\text{cm}$ e $GOH = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

A área do octógono $ABCDEFGH$ é dada por

$$\begin{aligned} 8 \cdot (GOH) &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{GO} \cdot \overline{HO} \cdot \text{sen} \hat{GOH} \\ &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 512\sqrt{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Em consequência, o volume da embalagem é igual a

$$512\sqrt{2} \cdot 4 = 2048\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$