

GEOMETRIA ESPACIAL- PRISMAS E PIRÂMIDES
Professor Yuri Politano

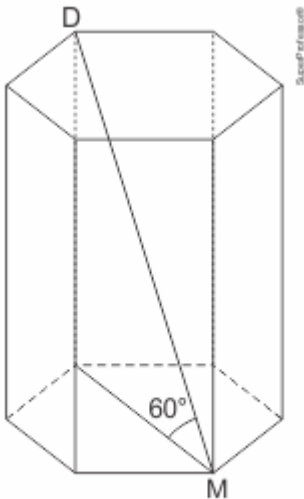
1. (Efomm) No processo de construção de embarcações, os estaleiros frequentemente projetam reservatórios com diferentes geometrias, buscando otimizar o espaço interno da embarcação e garantir estabilidade e eficiência.

Em um determinado projeto, foi especificado um reservatório no formato de prisma triangular reto, que será instalado no porão de uma embarcação de médio porte. As dimensões desse reservatório foram definidas a partir de cálculos técnicos, sendo que a altura do prisma é igual a x_1x_2 , e o triângulo que forma sua base possui base igual a x_3x_4 e altura x_5x_6 .

Sabendo-se que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e $x_6 \in \mathbb{R}$, tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$, calcule o volume desse reservatório, em metros cúbicos.

- a) 2 m^3
- b) 3 m^3
- c) 4 m^3
- d) 8 m^3
- e) 9 m^3

2. (Espcex (Aman)) Considere o prisma hexagonal regular de altura 12 cm e o segmento DM que une os vértices D e M formando um ângulo de 60° com o plano da base, como indicado na figura abaixo.



Desenho ilustrativo – Fora de escala

Determine, em cm^3 o volume do prisma.

- a) $144\sqrt{3}$.
- b) $168\sqrt{3}$.
- c) $192\sqrt{3}$.
- d) $216\sqrt{3}$.
- e) $225\sqrt{3}$.

3. (Efomm) Determine o volume do paralelepípedo com base quadrada, dadas as seguintes condições:

- Uma pirâmide com base quadrada está completamente contida no paralelepípedo, coincidindo sua base com a base inferior do paralelepípedo. A projeção do vértice da pirâmide coincide com os centros dos quadrados das bases do paralelepípedo. O volume da pirâmide é de $5m^3$.

- Um cone está contido no paralelepípedo, com vértice comum a pirâmide, e sua base está inscrita na base superior do paralelepípedo. O volume do cone é $4m^3$

a) $\left(5 + \frac{48}{\pi}\right)m^3$

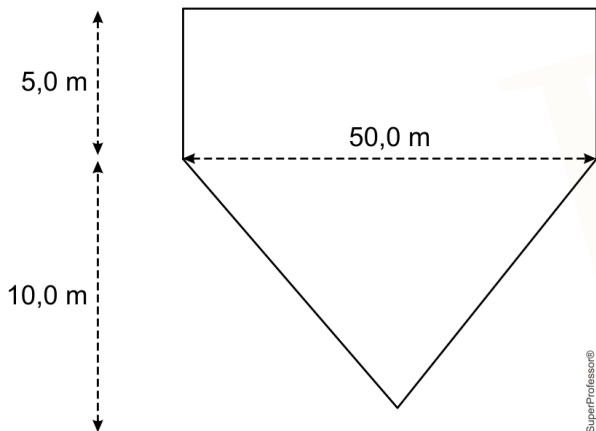
b) $\left(15 + \frac{3}{\pi}\right)m^3$

c) $\left(5 + \frac{49}{3\pi}\right)m^3$

d) $\left(15 + \frac{48}{\pi}\right)m^3$

e) $\left(15 + \frac{49}{3\pi}\right)m^3$

4. (Efomm) A figura abaixo mostra a seção transversal uniforme do casco de uma embarcação que possui 100 m de comprimento. Supondo a embarcação em equilíbrio, qual o calado (distância vertical a partir do fundo do casco até a linha superficial da água), em metros, da embarcação se sua massa total é 16.000 t, conforme a figura abaixo?



a) 11

b) 8

c) 6

d) 4

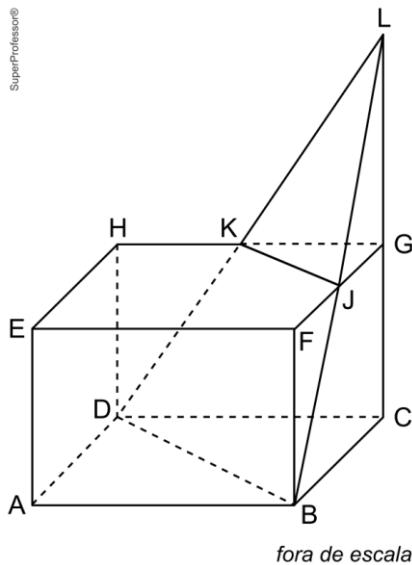
e) 2

5. (Espcex (Aman)) Um paralelepípedo reto tem como seção reta um paralelogramo ABCD, cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 20 cm e 10 cm, e o ângulo DAB mede 30° . Sabendo que a altura do paralelepípedo é igual a dois terços do perímetro da seção reta, o seu volume é:

a) 2000 cm^3

- b) 4000 cm^3
- c) 6000 cm^3
- d) $2000\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- e) $4000\sqrt{3} \text{ cm}^3$

6. (Albert Einstein - Medicina) Na figura, estão representados o prisma retorretângulo ABCDEFGH e a pirâmide BCDL. O vértice L da pirâmide está na reta que contém a aresta CG do prisma. O prisma e a pirâmide BCDL têm o mesmo volume.

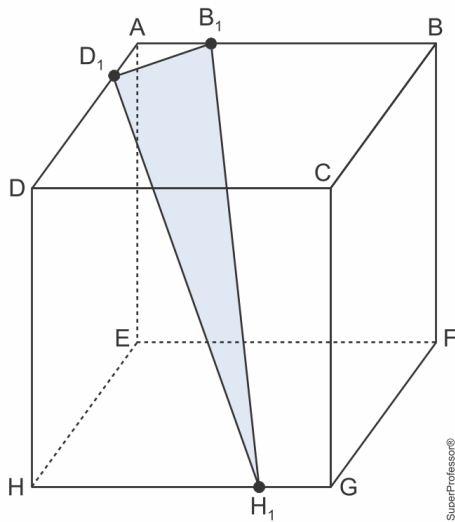


O ponto J está na interseção dos segmentos BL e FG , e o ponto K está na interseção dos segmentos DL e GH . O volume da pirâmide GJKL, em relação ao volume do prisma, corresponde a

- a) $\frac{125}{216}$
- b) $\frac{16}{25}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{25}{36}$
- e) $\frac{64}{125}$

7. (Ime) No cubo ABCDEFGH, a aresta mede 1. Conforme a figura, o ponto B_1 , sobre a aresta AB, é tal que $\overline{AB_1} = 1/3$; o ponto D_1 , sobre a aresta AD, é tal que $\overline{AD_1} = 1/3$ e o ponto H_1 , sobre a

aresta GH, e tal que $\overline{GH_1} = 1/3$.



A área do triângulo $B_1D_1H_1$ é

- a) $\frac{l^2}{9}$
- b) $\frac{l^2\sqrt{3}}{18}$
- c) $\frac{5l^2\sqrt{34}}{18}$
- d) $\frac{2l^2\sqrt{2}}{9}$
- e) $\frac{l^2\sqrt{34}}{18}$

8. (Ita) Calcule a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma das diagonais do cubo.

9. (Esc. Naval) Um tronco de pirâmide regular de base hexagonal e volume 126 u.v possui lado da base menor, lado da base maior e altura, nesta ordem, formando uma progressão geométrica de razão natural não nula e termo inicial no intervalo $]3/2, 2[$. Determine o ângulo formado pela face lateral do tronco e a base maior e assinale a opção correta.

- a) $\arctg\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$.
- b) $\arctg(2\sqrt{3})$.
- c) $\arctg(\sqrt{3})$.
- d) $\arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
- e) $\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

10. (Epcar (Afa)) Considere um tronco de pirâmide obtido de uma pirâmide quadrangular regular.

Por esse tronco, passa-se um plano α paralelo às bases gerando um quadrilátero de área $x \text{ cm}^2$, tal que:

- a razão entre a distância da base menor do tronco ao plano α e a distância do plano α à base maior do tronco é igual a $\frac{3}{2}$;
- a área da base maior do tronco mede 441 cm^2 ; e
- a área da base menor do tronco mede 64 cm^2 .

A área x do quadrilátero, em cm^2 , é igual a

- a) $\frac{8441}{64}$
- b) $\frac{12661}{81}$
- c) $\frac{6241}{25}$
- d) $\frac{4772}{16}$

11. (Espcex (Aman)) Um cubo com área total de 96 cm^2 está circunscrito a uma esfera. O volume dessa esfera é igual a

- a) $\frac{256}{3} \pi \text{ cm}^3$
- b) $16 \pi \text{ cm}^3$
- c) $\frac{64}{3} \pi \text{ cm}^3$
- d) $\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$
- e) $\frac{16}{3} \pi \text{ cm}^3$

12. (Ime) Seja um tetraedro de vértices A, B, C e D. São dados os ângulos em radianos:

$$\widehat{ADB} = \frac{\pi}{3} \text{ e } \widehat{CDB} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$$

e os comprimentos das arestas em centímetros $\overline{CD} = 3$ e $\overline{AD} = \overline{BD} = 4$. A distância em centímetros do ponto D ao plano ABC é

- a) $\frac{6}{7} \sqrt{7}$
- b) 3
- c) $2\sqrt{3}$
- d) 4
- e) 5

13. (Efomm) Duas caixas cúbicas A e B tem volumes, em litros, respectivamente iguais a V e $4V$. Calculando-se a razão entre as áreas de suas bases, em dm^2 , das caixas B e A, respectivamente, obtemos

- a) $\sqrt[3]{2}$.
- b) $\sqrt[3]{4}$.
- c) 2.
- d) $2\sqrt[3]{2}$.
- e) $2\sqrt[3]{4}$.

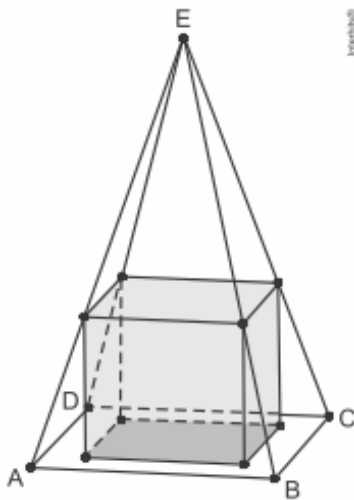
14. (Efomm) A pirâmide de Quéops, a maior do Egito, tem como base um quadrado de 230 metros de lado. A reta que passa pelo centro da base e pelo ponto mais elevado (vértice) dessa pirâmide é perpendicular à base.

O segmento de reta com extremos no vértice e no ponto médio de um lado da base forma com o plano da base um ângulo obtuso de medida α tal que $\cos \alpha = -0,6$.

A altura da pirâmide é, aproximadamente, de

- a) 149 metros.
- b) 151 metros.
- c) 153 metros.
- d) 155 metros.
- e) 157 metros.

15. (Efomm) Seja a pirâmide quadrangular regular ABCDE com aresta da base $4\sqrt{2}$ e aresta lateral 8. Considere o prisma quadrangular regular interior à pirâmide. O prisma possui base inferior sobre a base da pirâmide e os vértices da base superior estão sobre as arestas laterais da pirâmide, como sugere a figura abaixo.



O volume máximo do prisma é igual a

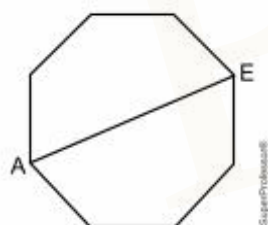
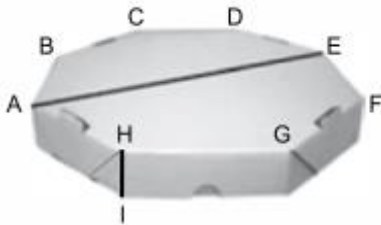
- a) $\frac{512\sqrt{3}}{27}$

- b) $\frac{128\sqrt{3}}{9}$
 c) $\frac{256\sqrt{3}}{9}$
 d) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$
 e) $\frac{256\sqrt{3}}{27}$

16. (Ita) Seja P uma pirâmide regular cujo vértice V é um dos vértices de um cubo de lado ℓ e cuja base é o hexágono formado pelos pontos médios das seis arestas do cubo que não contém V nem o vértice oposto a V. O raio da esfera que circunscreve P é

- a) $\ell\sqrt{2}/12$.
 b) $\ell\sqrt{3}/12$.
 c) $5\ell\sqrt{2}/12$.
 d) $5\ell\sqrt{3}/12$.
 e) $\ell\sqrt{3}/6$.

17. Uma embalagem de pizza tem a forma de um prisma reto-regular de base octogonal, conforme mostram as figuras. Sabe-se que $\overline{AE}$ é a maior diagonal da parte superior da tampa, medindo 32 cm, e que $\overline{HI}$ é a aresta lateral da embalagem, medindo 4 cm.



Desconsiderando os encaixes e a espessura do material de que é feita a embalagem e utilizando, se necessário, a fórmula $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, o volume dessa embalagem é igual a

- a) $512\sqrt{2}cm^3$
 b) $1024\sqrt{2}cm^3$
 c) $758\sqrt{2}cm^3$
 d) $1536\sqrt{2}cm^3$
 e) $2048\sqrt{2}cm^3$

18. (Ime) Um copo exótico de vidro, em uma festa, era uma pirâmide invertida de base pentagonal regular de 9cm de altura. Esse copo continha uma bebida que ocupava 8cm de

altura. Um dos convidados fechou a base pentagonal do copo e o virou de cabeça para baixo. A nova altura h da bebida, em cm , em relação à base pentagonal satisfaz:

- a) $2,9 \leq h \leq 3,0$
- b) $3,8 \leq h \leq 4,0$
- c) $4,8 \leq h \leq 4,9$
- d) $5,8 \leq h \leq 6,0$
- e) $6,1 \leq h \leq 6,2$

19. (Ita) Seja P uma pirâmide regular com base quadrada. Suponha que os centros das esferas inscrita e circunscrita a P coincidam. Determine a razão entre as áreas das esferas circunscrita e inscrita a P .

20. (Esc. Naval) Suponha que a base de um paralelepípedo reto seja um paralelogramo de lados a e b . Suponha, ainda, que o ângulo obtuso desse paralelogramo seja β . Sabendo que a menor diagonal do paralelepípedo é igual à maior diagonal do paralelogramo, assinale a opção que apresenta o volume do paralelepípedo em função de a , b e β .

- a) $2ab(\sin(\beta)\sqrt{-ab \cdot \cos(\beta)})$
- b) $2ab(\sin(\beta)\sqrt{ab \cdot \sin(\beta)})$
- c) $2ab(\cos(\beta)\sqrt{-ab \cdot \sin(\beta)})$
- d) $2ab(-\cos(\beta)\sqrt{-ab \cdot \cos(\beta)})$
- e) $2ab(-\sin(\beta)\sqrt{ab \cdot \cos(\beta)})$

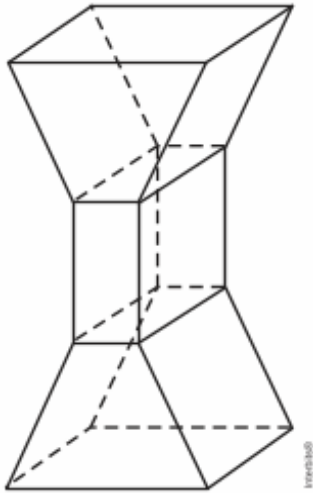
21. (Efomm) Seja a esfera de raio R inscrita na pirâmide quadrangular regular de aresta base $2cm$ e aresta lateral $\sqrt{38}cm$. Sabendo-se que a esfera tangencia todas as faces da pirâmide, o valor de R , em cm , é

- a) $\frac{\sqrt{37}+1}{6}$
- b) $\frac{\sqrt{39}-1}{38}$
- c) $\frac{6\sqrt{38}+12}{17}$
- d) $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$
- e) $\frac{6\sqrt{38}-12}{17}$

22. (Epcar (Afa)) Um objeto de decoração foi elaborado a partir de sólidos utilizados na rotina de estudos de um estudante de matemática.

Inicialmente, partiu-se de um cubo sólido de volume igual a 19.683cm^3 .

Do interior desse cubo, retirou-se, sem perda de material, um sólido formado por dois troncos de pirâmide idênticos e um prisma reto, como mostra o esquema da figura a seguir.



Sabe-se que:

- as bases maiores dos troncos estão contidas em faces opostas do cubo;
- as bases dos troncos são quadradas;
- a diagonal da base maior de cada tronco está contida na diagonal da face do cubo que a contém e mede a sua terça parte;
- a diagonal da base menor de cada tronco mede a terça parte da diagonal da base maior do tronco; e
- os troncos e o prisma têm alturas iguais.

Assim, o volume do objeto de decoração obtido da diferença entre o volume do cubo e o volume do sólido esquematizado na figura acima, em cm^3 , é um número do intervalo

- a) $[17.200, 17.800]$
- b) $[17.800, 18.400]$
- c) $]18.400, 19.000]$
- d) $[19.000, 19.600]$

23. (Ime) Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC . A área do $\triangle ABC$ é igual à área do $\triangle ACD$, e o ângulo $\widehat{MAD}$ é igual ao ângulo $\widehat{MDA}$, $\widehat{MDA}$, onde M é ponto médio de BC . Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2 , sabendo que $BC = 2\text{cm}$, e que o ângulo $\widehat{BAC}$ é igual a 30° .

- a) $(2 - \sqrt{3})$

- b) $(2 + \sqrt{3})$
- c) $4(2 - \sqrt{3})$
- d) $4(2 + \sqrt{3})$
- e) 4

24. (Efomm) Duas caixas cúbicas e retangulares perfeitas, têm seis faces de quadrados perfeitos. As faces da primeira caixa tem $3m^2$ de área, e cada face da segunda caixa tem $9m^2$ de área. A razão entre o volume da primeira caixa e o volume da segunda é:

- a) $3^{1/2}$
- b) $3^{-1/2}$
- c) $3^{-3/2}$
- d) $3^{3/2}$
- e) $3^{-2/3}$

25. (Ime) Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de $28cm^2$. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

- a) $\sqrt{17}cm$
- b) $\sqrt{19}cm$
- c) $\sqrt{21}cm$
- d) $2\sqrt{7}cm$
- e) $\sqrt{29}cm$

26. (Ita) Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas $3cm$, $4cm$ e $5cm$. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3 :

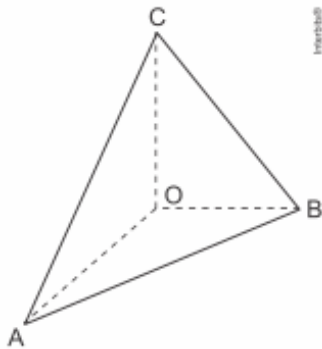
- a) 10.
- b) 12.
- c) 15.
- d) 20.
- e) 30.

27. (Ita) Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se $MN = CN = 2cm$, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm ,

- a) $\frac{\sqrt{60}}{3}$.

- b) $\frac{\sqrt{50}}{3}$.
 c) $\frac{\sqrt{40}}{3}$.
 d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$.
 e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

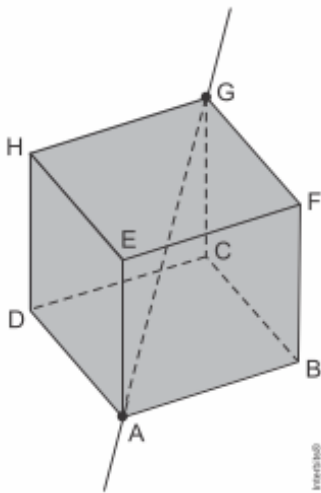
28. (Fuvest) Para responder aos itens a) e b), considere a figura correspondente.
 a) Num tetraedro OABC, os ângulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ e $\widehat{COA}$ medem 90° . Sendo α e β as medidas dos ângulos $\widehat{ACO}$ e $\widehat{BCO}$ respectivamente, expresse o cosseno do ângulo $\widehat{ACB}$ em função de α e β .



b) Um navio parte do ponto de latitude 0° e longitude 0° e navega até chegar a um ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste, seguindo a trajetória que minimiza a distância percorrida. Admita que a Terra seja esférica de raio $R = 6.000\text{km}$. Qual foi a distância percorrida pelo navio?



29. (Esc. Naval) Observe a figura abaixo.



O cubo $ABCDEFGH$, de aresta 3cm é rotacionado em torno de sua diagonal AG , gerando um sólido de revolução de volume V . Dessa forma, pode-se afirmar que o valor de V , em cm^3 , é tal que:

- a) $V < 17$
- b) $17 < V < 27$
- c) $36 < V < 55$
- d) $27 < V < 36$
- e) $55 < V < 74$

30. (Epcar (Afa)) Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi\text{cm}^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm^3 , é igual a

- a) $\frac{45}{7}$
- b) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$
- c) $\frac{30\sqrt{3}}{7}$
- d) $\frac{135}{7}$

31. (Efomm) Um cubo de lado $2a$, possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

- a) $\frac{\pi}{6}$
- b) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

- c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$
- d) $\frac{2\pi}{6\sqrt{3}}$
- e) $\frac{1}{2}$

32. (Espcex (Aman)) Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura a e lados da base b e c (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e " a ", b e c são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

- a) 16
- b) 36
- c) 108
- d) 432
- e) 648

33. (Esc. Naval) Uma pirâmide triangular tem como base um triângulo de lados $13cm$, $14cm$ e $15cm$; as outras arestas medem ℓ . Sabendo que o volume da pirâmide é de $105\sqrt{22}cm^3$, o valor de ℓ , em cm , é igual a:

- a) $\frac{155}{8}$
- b) $\frac{335}{11}$
- c) $\frac{275}{9}$
- d) $\frac{205}{8}$
- e) $\frac{95}{8}$

34. (Espcex (Aman)) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a $48cm$. Então a medida da sua área total, em cm^2 , é

- a) 752
- b) 820
- c) 1.024
- d) 1.302
- e) 1.504

35. (Esc. Naval) A equação

$$\begin{vmatrix} \sec^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16},$$

com $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado ℓ e altura $h = \sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de ℓ é igual a:

- a) $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$
- b) $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$
- c) $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$
- d) $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$
- e) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

36. (Esc. Naval) Em um polígono regular, cujos vértices A, B e C são consecutivos, a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 30° . Se o lado do polígono mede ℓ unidades de comprimento, o volume da pirâmide, cuja base é esse polígono e cuja altura vale o triplo da medida do lado, é igual a

- a) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}$
- b) $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$
- d) $\frac{3\ell\sqrt{3}}{4}$
- e) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{3}$

37. (Espcex (Aman)) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3 . O volume do prisma original é

- a) 18 cm^3 .
- b) 36 cm^3 .
- c) $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
- d) $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

e) 40cm^3 .

38. (Epcar (Afa)) Considere uma pirâmide regular $ABCDV$ de base $ABCD$.

Sendo $2\sqrt{2}\text{cm}$ a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}\text{cm}$ a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm , de A à aresta lateral VC é

- a) $2\sqrt{2}$
- b) $2\sqrt{3}$
- c) 4
- d) $\sqrt{3}$

39. (Epcar (Afa)) Uma pirâmide regular $ABCV$, de base triangular ABC , é tal, que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede 3cm .

Sendo $\sqrt{5}\text{cm}$ a altura de tal pirâmide, a distância, em cm , de A à face BCV é igual a

- a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$
- b) $\sqrt{7}$
- c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$
- d) $2\sqrt{2}$

40. (Ita) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V , determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm . O volume, em cm^3 , do sólido $VABC$ é

- a) 2.
- b) 4.
- c) $\sqrt{17}$
- d) 6.
- e) $5\sqrt{10}$

41. (Esc. Naval) Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é

- a) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
- b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
- d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

42. (Esc. Naval) Qual é o menor ângulo formado por duas diagonais de um cubo de aresta L ?

a) $\arcsen \frac{1}{4}$

b) $\arccos \frac{1}{4}$

c) $\arcsen \frac{1}{3}$

d) $\arccos \frac{1}{3}$

e) $\arctg \frac{1}{4}$

43. (Fuvest) Em um tetraedro regular de lado a , a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a

a) $a\sqrt{3}$

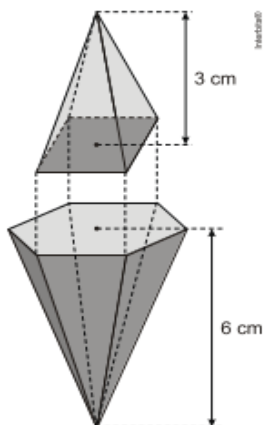
b) $a\sqrt{2}$

c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

44. (Epcar (Afa)) Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3cm de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\text{cm}$, então, o volume do sólido obtido, em cm^3 , é igual a



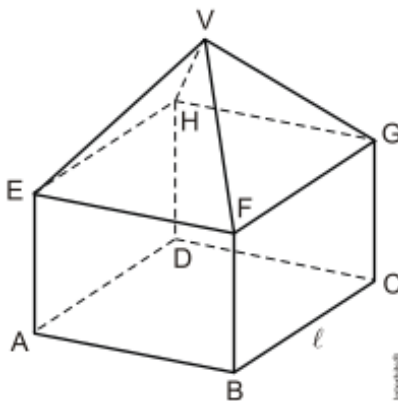
a) $15\sqrt{3}$

- b) $20\sqrt{3}$
 c) $25\sqrt{3}$
 d) $30\sqrt{3}$

45. (Ita) Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\text{cm}$. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

- a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$.
 b) $\frac{13}{3}$.
 c) $\frac{15}{4}$.
 d) $2\sqrt{3}$
 e) $\frac{10}{3}$.

46. (Espcex (Aman)) Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide. Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida ℓ , então as medidas da altura (distância do ponto V à face ABCD) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

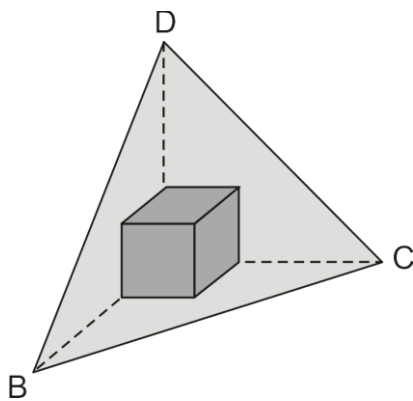


- a) $\ell \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2} \right)$ e $\ell^2(\sqrt{3}+4)$
 b) $\ell \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2} \right)$ e $\ell^2(\sqrt{3}+5)$
 c) $\ell \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2} \right)$ e $\ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 5 \right)$
 d) $\ell \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ e $\ell^2(\sqrt{3}+5)$
 e) $\ell \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ e $\ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \right)$

47. (Fuvest) Uma pirâmide tem como base um quadrado de lado 1, e cada uma de suas faces laterais é um triângulo equilátero. Então, a área do quadrado, que tem como vértices os baricentros de cada uma das faces laterais, é igual a

- a) $\frac{5}{9}$
- b) $\frac{4}{9}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{2}{9}$
- e) $\frac{1}{9}$

48. (Ufrj) A pirâmide $ABCD$ é tal que as faces ABC , ABD e ACD são triângulos retângulos cujos catetos medem a . Considere o cubo de volume máximo contido em $ABCD$ tal que um de seus vértices seja o ponto A , como ilustra a figura a seguir.

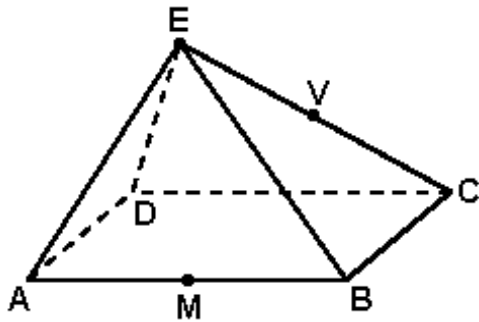


Determine a medida da aresta desse cubo em função de a .

49. (Ita) Sejam A , B , C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND , em cm^2 , é igual a

- a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.
- b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
- c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
- d) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.
- e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

50. (Fuvest) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:



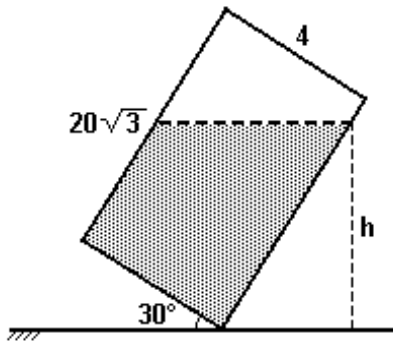
- a) 1
- b) 1,5
- c) 2
- d) 2,5
- e) 3

51. (Ita) Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de R , a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

52. (Ita) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $1/8$ do volume da pirâmide original?

- a) 2 m.
- b) 4 m.
- c) 5 m.
- d) 6 m.
- e) 8 m.

53. (Fuvest) Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4 cm e altura $20\sqrt{3}$ cm, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral a seguir). Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.



54. (Ita) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{9} x$ cm
- b) $\frac{\sqrt{3}}{18} x$ cm
- c) $\frac{\sqrt{3}}{6} x$ cm
- d) $\frac{\sqrt{3}}{3} x$ cm
- e) $\frac{\sqrt{3}}{2} x$ cm

55. (Ita) As dimensões x , y , z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm^2 , então o volume deste paralelepípedo, em cm^3 , é igual:

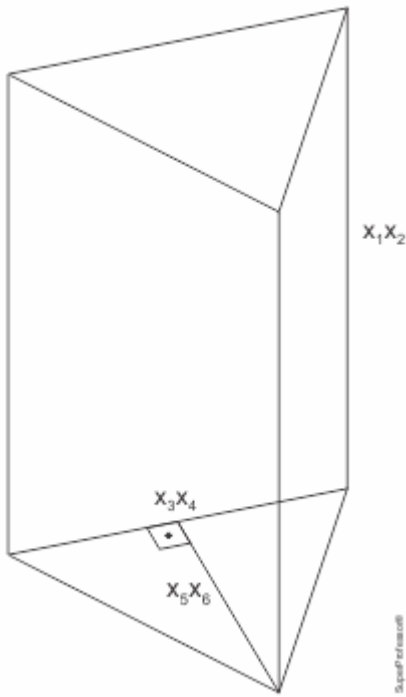
- a) 1.200
- b) 936
- c) 1.155
- d) 728
- e) 834

Gabarito

Resposta da questão 1:

[B]

O volume do prisma é dado por:



$$V = \frac{x_3x_4 \cdot x_5x_6}{2} \cdot x_1x_2 = \frac{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}{2}$$

Das relações fornecidas, obtemos:

$$\begin{aligned} 4^{x_3} &= 6 & 3^{x_2} &= 5 \\ (2^{x_1})^{x_3} &= 6 & (3^{x_2})^{x_4} &= 5^{x_4} \\ (2^{x_1x_3})^{x_5} &= 6^{x_5} & e & (3^{x_2x_4})^{x_6} = 7^{x_6} \\ 2^{x_1x_3x_5} &= 8 & 3^{x_2x_4x_6} &= 9 \\ x_1x_3x_5 &= 3 & x_2x_4x_6 &= 2 \end{aligned}$$

Logo:

$$V = \frac{x_1x_3x_5 \cdot x_2x_4x_6}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2}$$

$$\therefore V = 3m^3$$

Resposta da questão 2:

[D]

Seja P a projeção do ponto D no plano da base do prisma. No triângulo DPM, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{\overline{DP}}{\overline{PM}} \\ \sqrt{3} &= \frac{12}{\overline{PM}} \\ \overline{PM} &= 4\sqrt{3}cm \end{aligned}$$

Sendo assim, o lado do hexágono regular da base vale:

$$\begin{aligned} 2\ell &= 4\sqrt{3} \\ \ell &= 2\sqrt{3}cm \end{aligned}$$

E a área da base vale:

$$\begin{aligned} A &= \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \\ A &= 18\sqrt{3}cm^2 \end{aligned}$$

Logo, o volume do prisma é igual a:

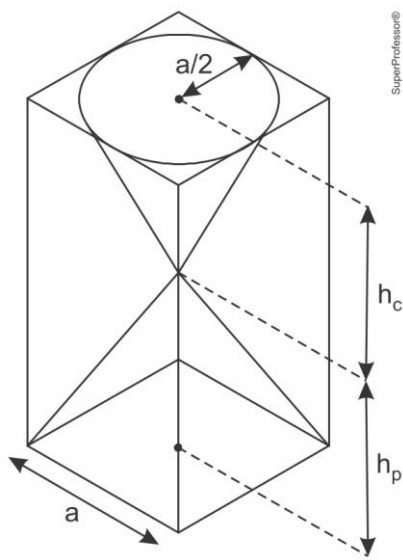
$$V = A \cdot h = 18\sqrt{3} \cdot 12$$

$$\therefore V = 216\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Resposta da questão 3:

[D]

Dos volumes da pirâmide e do cone, obtemos:



$$V_p = \frac{a^2 \cdot h_p}{3} = 5 \Rightarrow a^2 \cdot h_p = 15$$

$$V_c = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h_c}{3} = 4 \Rightarrow a^2 \cdot h_c = \frac{48}{\pi}$$

Calculando o volume do paralelepípedo, chegamos a:

$$V = a^2(h_p + h_c) = a^2 \cdot h_p + a^2 \cdot h_c$$

$$\therefore V = \left(15 + \frac{48}{\pi}\right) m^3$$

Resposta da questão 4:

[B]

Da condição de equilíbrio, obtemos o volume submerso da embarcação:

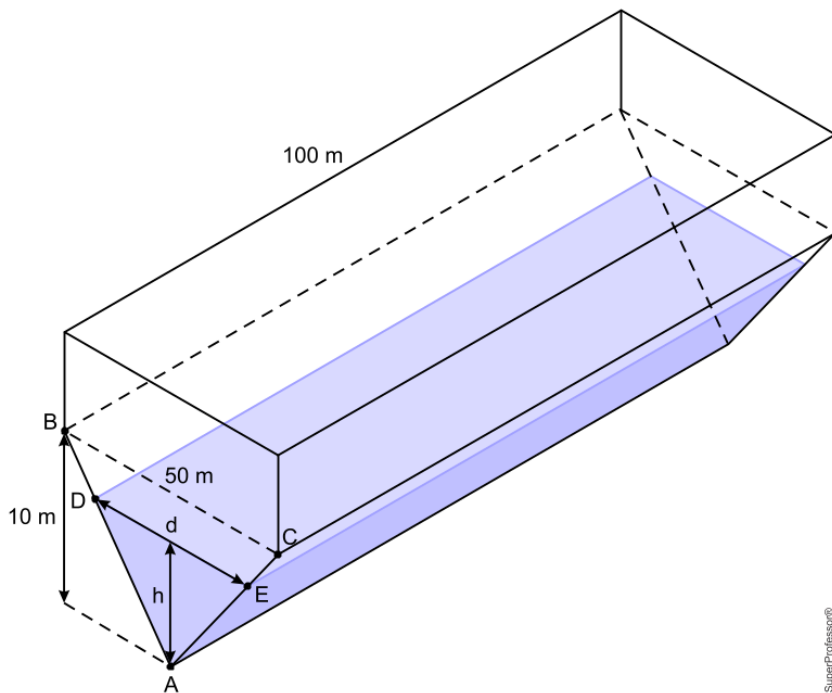
$$P = E$$

$$mg = dV V_{\text{sub}} g$$

$$16000 \cdot 10^3 = 10^3 V_{\text{sub}}$$

$$V_{\text{sub}} = 16000 m^3$$

Por semelhança entre os triângulos ABC e ADE, temos:



$$\frac{h}{10} = \frac{d}{50} \Rightarrow d = 5h$$

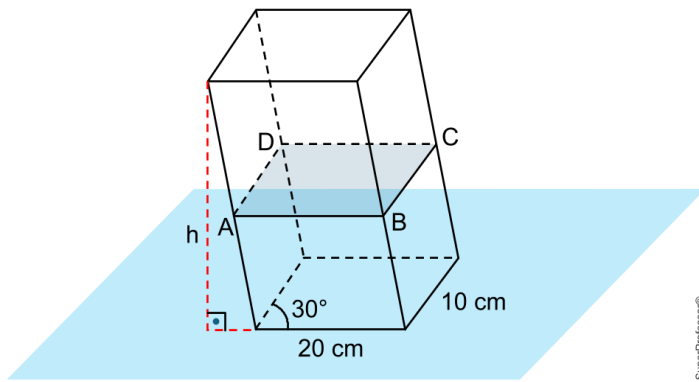
Logo:

$$\begin{aligned} \frac{5h \cdot h}{2} \cdot 100 &= 16000 \\ h^2 &= 64 \\ \therefore h &= 8m \end{aligned}$$

Resposta da questão 5:

[B]

De acordo com as informações do problema, podemos representar o prisma da seguinte forma:



Calculando, inicialmente, a área da base, temos:

$$A_b = 20 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow A_b = 200 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A_b = 100 \text{ cm}^2$$

A altura será dois terços do perímetro da base:

$$h = \frac{2}{3} \cdot (20 + 20 + 10 + 10) \Rightarrow h = 40 \text{ cm}$$

Logo, o volume será dado por:

$$\begin{aligned} V &= A_b \cdot h \\ V &= 100 \cdot 40 \\ V &= 4000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Resposta da questão 6:

[A]

Da igualdade entre os volumes do prisma e da pirâmide, obtemos:

$$\begin{aligned} V_{ABCDEFGH} &= V_{BCDL} \\ 2A_{BCD} \cdot CG &= \frac{1}{3} \cdot A_{BCD} \cdot CL \\ CL &= 6CG \end{aligned}$$

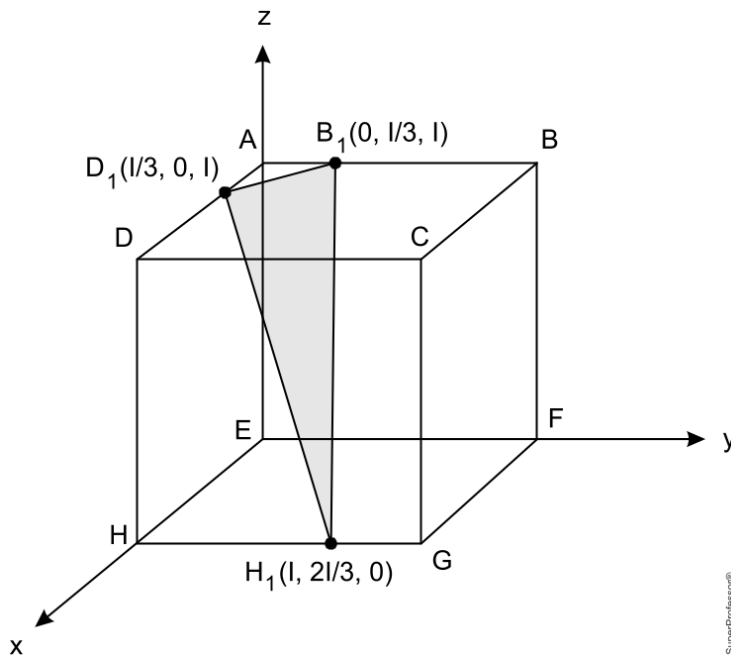
Por semelhança de volumes, obtemos a relação procurada:

$$\begin{aligned} \frac{V_{GJKL}}{V_{BCDL}} &= \left(\frac{\overline{GL}}{\overline{CL}} \right)^3 = \left(\frac{6\overline{CG} - \overline{CG}}{6\overline{CG}} \right)^3 = \left(\frac{5}{6} \right)^3 \\ \therefore \frac{V_{GJKL}}{V_{BCDL}} &= \frac{125}{216} \end{aligned}$$

Resposta da questão 7:

[E]

Adotando os eixos coordenados como na figura abaixo, temos:



$$D_1B_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + (1 - 1)^2} = \frac{1\sqrt{2}}{3}$$

$$D_1H_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(0 - \frac{21}{3}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \frac{1\sqrt{17}}{3}$$

$$B_1H_1 = \sqrt{(0 - 1)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{21}{3}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \frac{1\sqrt{19}}{3}$$

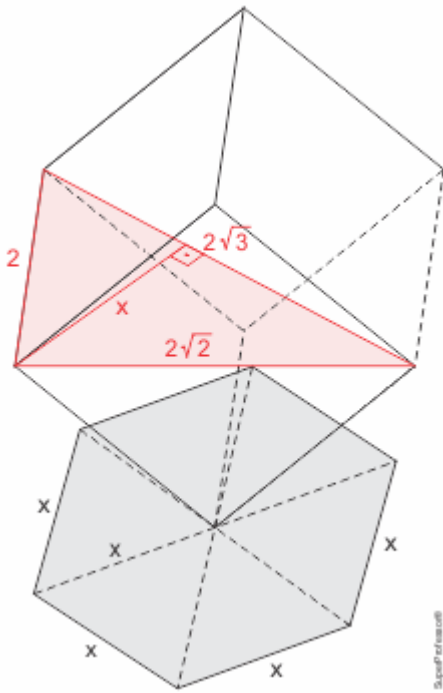
Como $B_1H_1^2 = D_1B_1^2 + D_1H_1^2$, o triângulo $D_1B_1H_1$ é retângulo em D_1 . Portanto, a sua área vale:

$$A_{B_1D_1H_1} = \frac{D_1B_1 \cdot D_1H_1}{2} = \frac{\frac{1\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1\sqrt{17}}{3}}{2}$$

$$\therefore A_{B_1D_1H_1} = \frac{I^2\sqrt{34}}{18} \text{ u. a.}$$

Resposta da questão 8:

Da figura abaixo, obtemos:



$$x \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

E a área da projeção ortogonal (hexágono regular) vale:

$$A = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore A = 4\sqrt{3}u.a.$$

Resposta da questão 9:

[A]

Como as medidas dos lados das bases e a altura do tronco da pirâmide formam uma PG, então, $\{a, aq, aq^2\}$ com $q \in \mathbb{N} \rightarrow q \in \{1, 2, 3, \dots\}$ e $a \in]\frac{3}{2}, 2[\rightarrow 1,5 < a < 2$. O volume do tronco de pirâmide é dado por $V = \frac{h}{3} \cdot (A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)$ e a área de um hexágono regular é $A_6 = \frac{3 \cdot L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$. Calculando as áreas das bases e substituindo o valor do volume fornecido pelo enunciado, temos $126 = \frac{a^3 \cdot q^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot (q^2 + q + 1)$. Com isso, vamos isolar a^3 na equação obtida e analisar possíveis valores para 'q' que respeitem a condição imposta ao valor de 'a', assim, $a^3 = \frac{252}{\sqrt{3} \cdot q^2 \cdot (q^2 + q + 1)}$. Testando $q = 1$, temos $a^3 = \frac{252}{\sqrt{3} \cdot 1^2 \cdot (1^2 + 1 + 1)} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{84}{\sqrt{3}}} \approx 3,63\dots$

o que não satisfaz a condição inicial. Testando $q = 2$, temos $a^3 = \frac{252}{\sqrt{3} \cdot 2^2 \cdot (2^2 + 2 + 1)} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{9}{\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{3} \approx 1,73\dots$ o que satisfaz a condição inicial.

Assim, a sequência das medidas dos lados é dada por Para obter a medida do ângulo, devemos relacionar o cateto adjacente ao ângulo desejado, que é formado pelo apótema da base maior com o lado da pirâmide e o cateto oposto, que é a medida da altura do tronco. Considerando M a medida do apótema da base maior e 'm' a medida do apótema da base menor, temos $\{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\}$. Para obter a medida do ângulo, devemos relacionar o cateto adjacente ao ângulo desejado, que é formado pelo apótema da base maior com o lado da pirâmide e o cateto oposto, que é a medida da altura do tronco. Considerando M a medida do apótema da base maior e 'm' a medida do apótema da base menor, temos M –

$m = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$, que é a medida do cateto adjacente. Utilizando a relação de tangente de θ , temos $tg(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, portanto, $\theta = arctg\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$.

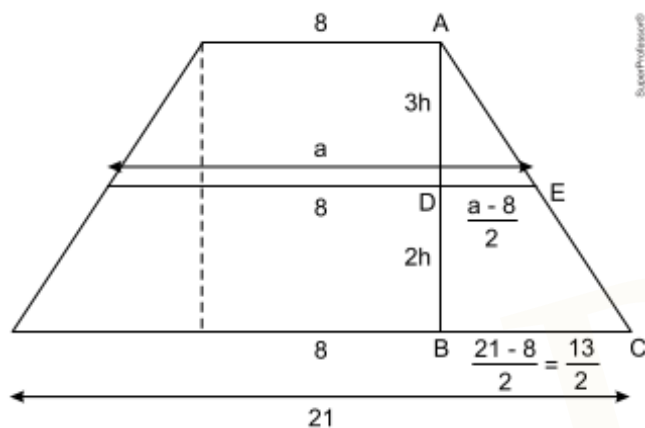
Resposta da questão 10:

[C]

Sendo m e n , respectivamente, os lados dos quadrados da base maior e menor, temos:

$$\begin{aligned} m^2 &= 441 \Rightarrow m = 21\text{cm} \\ n^2 &= 64 \Rightarrow n = 8\text{cm} \end{aligned}$$

Vista lateral do tronco de pirâmide, com a sendo o valor do lado do quadrilátero formado:



Fazendo semelhança entre os triângulos ABC e ADE, chegamos a:

$$\frac{\frac{a-8}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{3h}{5h} \Rightarrow \frac{a-8}{13} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5a - 40 = 39 \Rightarrow a = \frac{79}{5} \text{ cm}$$

Portanto, a área x vale:

$$x = \left(\frac{79}{5} \text{ cm}\right)^2 = \frac{6241}{25} \text{ cm}^2$$

Resposta da questão 11:

[D]

Lado do cubo:

$$6L^2 = 96$$

$$L = \sqrt{16}$$

$$L = 4cm$$

Raio da esfera:

$$2R = 4$$

$$R = 2cm$$

Portanto, o volume da esfera vale:

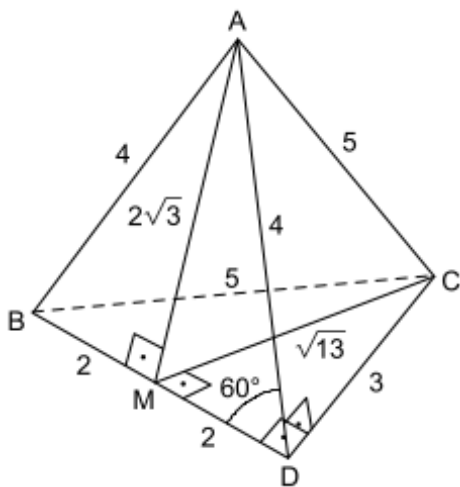
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$$

$$\therefore V = \frac{32}{3}\pi cm^3$$

Resposta da questão 12:

[A]

Do tetraedro descrito, podemos concluir que:



$$\overline{AD} = \overline{BD} = 4cm \text{ e } \widehat{ADC} = 60^\circ \Rightarrow \overline{AB} = 4cm$$

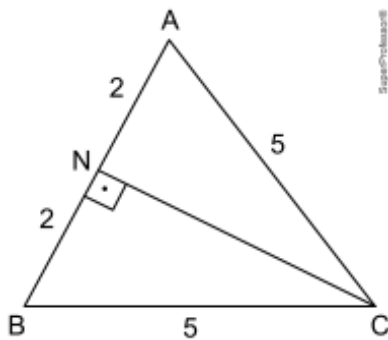
$$4^2 = \overline{AM}^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AM} = 2\sqrt{3}cm$$

$$\overline{CM}^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{CM} = \sqrt{13}cm$$

Volume do tetraedro:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{BD} \cdot \overline{DC}}{2} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD} = 4\sqrt{3}cm^3$$

Área do triângulo ABC:



$$5^2 = \overline{CN}^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{CN} = \sqrt{21} \text{ cm}$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CN}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{21}}{2} \Rightarrow A_{ABC} = 2\sqrt{21} \text{ cm}^2$$

Sendo d a distância procurada, devemos ter que:

$$\frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot d = V_{ABCD} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{21} \cdot d = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore d = \frac{6\sqrt{7}}{7} \text{ cm}$$

Resposta da questão 13:

[D]

Arestas das caixas A e B:

$$a_A^3 = V \Rightarrow a_A = \sqrt[3]{V} \text{ dm}$$

$$a_B^3 = 4V \Rightarrow a_B = \sqrt[3]{4V} \text{ dm}$$

Razão entre as áreas das bases das caixas B e A:

$$\frac{A_B}{A_A} = \left(\frac{a_B}{a_A} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{V}} \right)^2 = \sqrt[3]{2^4}$$

$$\therefore \frac{A_B}{A_A} = 2\sqrt[3]{2}$$

Resposta da questão 14:

[C]

Temos que:

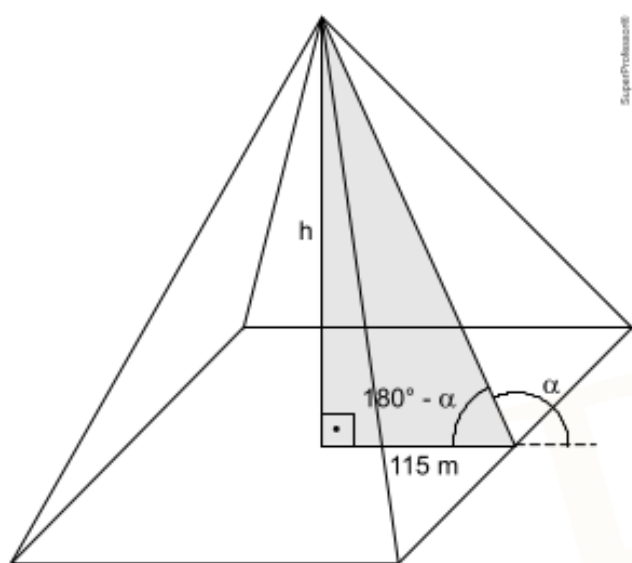
$$\cos \alpha = -0,6 (90^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

A altura h da pirâmide é dada por:



$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{115}$$

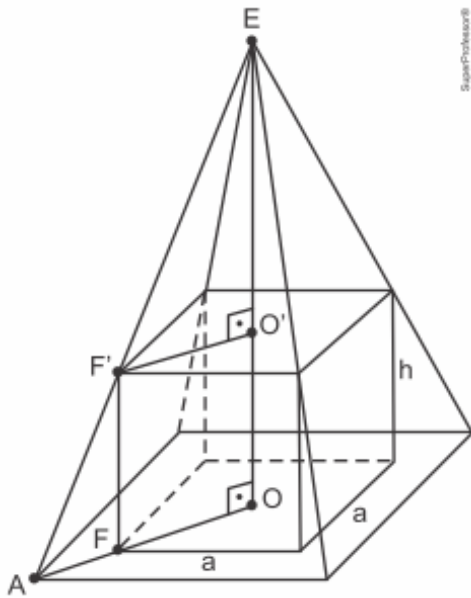
$$\frac{4}{3} = \frac{h}{115}$$

$$\therefore h \cong 153m$$

Resposta da questão 15:

[A]

Da figura abaixo, obtemos:



$$\overline{AO} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 4$$

$$\overline{EO} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{FO} = \overline{F'O'} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AF} = 4 - \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Por semelhança entre os triângulos $AF'F$ e AEO , vem:

$$\overline{F'F} \cdot \overline{AF} = \overline{EO} \cdot \overline{AO} \Rightarrow h(4 - \frac{a\sqrt{2}}{2}) = 4 \cdot 4\sqrt{3}$$

Volume do prisma:

$$V = a^2 h = a^2 \left(4\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{6}}{2} \right) = 4\sqrt{3}a^2 - \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Para que tenhamos o volume máximo:

$$\left(4\sqrt{3}a^2 - \frac{a^3\sqrt{6}}{2} \right)' = 0$$

$$8\sqrt{3}a - \frac{3a^2\sqrt{6}}{2} = 0$$

$$a = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

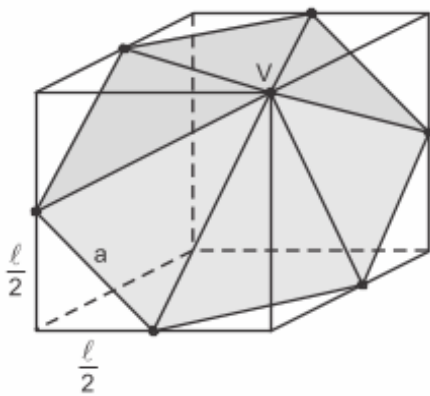
Logo:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{máx}} &= 4\sqrt{3} \cdot \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 V_{\text{máx}} &= 4\sqrt{3} \cdot \frac{128}{9} - \frac{1024\sqrt{2}}{27} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 V_{\text{máx}} &= \frac{512\sqrt{3}}{9} - \frac{1024\sqrt{3}}{27} \\
 \therefore V_{\text{máx}} &= \frac{512\sqrt{3}}{27}
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 16:

[D]

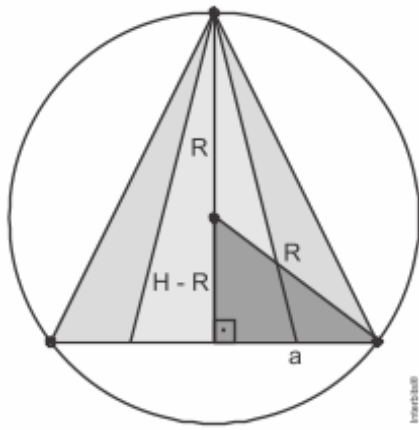
Aresta da base da pirâmide:



A altura da pirâmide equivale à metade da diagonal do cubo. Logo:

$$H = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Através da vista lateral da pirâmide inscrita na esfera, temos que:

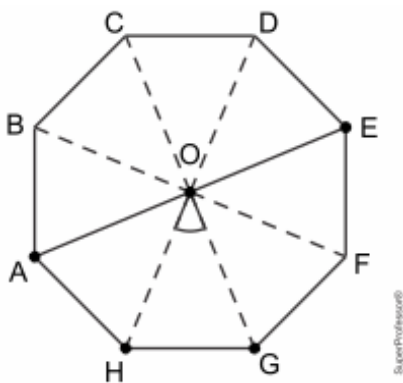


$$\begin{aligned}
 R^2 &= (H - R)^2 + a^2 \\
 R^2 &= \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{2\ell\sqrt{3}R}{2} + R^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
 0 &= \frac{3\ell^2}{4} - \ell\sqrt{3}R + \frac{\ell^2}{2} \\
 \ell\sqrt{3}R &= \frac{5\ell^2}{4} \\
 \therefore R &= \frac{5\sqrt{3}\ell}{12}
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 17:

[E]

Considere a figura.



Tem-se que o ponto médio de AE é o centro do círculo circunscrito ao octógono $ABCDEFGH$. Assim, temos $\overline{GO} = \overline{HO} = \frac{32}{2} = 16\text{cm}$ e $\angle GOH = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

A área do octógono $ABCDEFGH$ é dada por

$$\begin{aligned}
 8 \cdot (GOH) &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{GO} \cdot \overline{HO} \cdot \text{sen} \hat{GOH} \\
 &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 512\sqrt{2} \text{ cm}^2.
 \end{aligned}$$

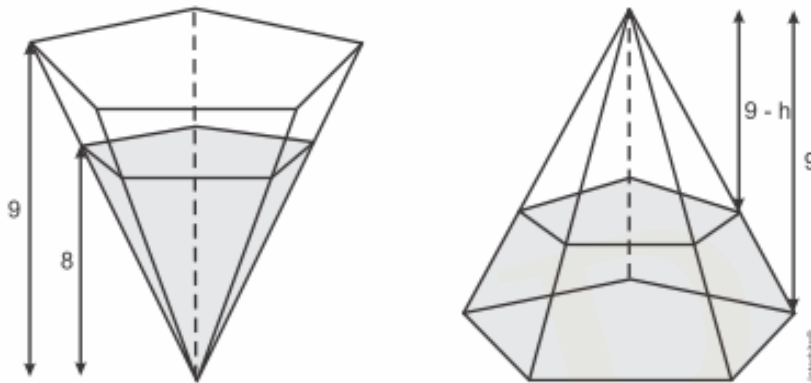
Em consequência, o volume da embalagem é igual a

$$512\sqrt{2} \cdot 4 = 2048\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

Resposta da questão 18:

[A]

Do enunciado, temos:



Sendo V_b e V_c , respectivamente, o volume da bebida e do copo, por semelhança, vem:

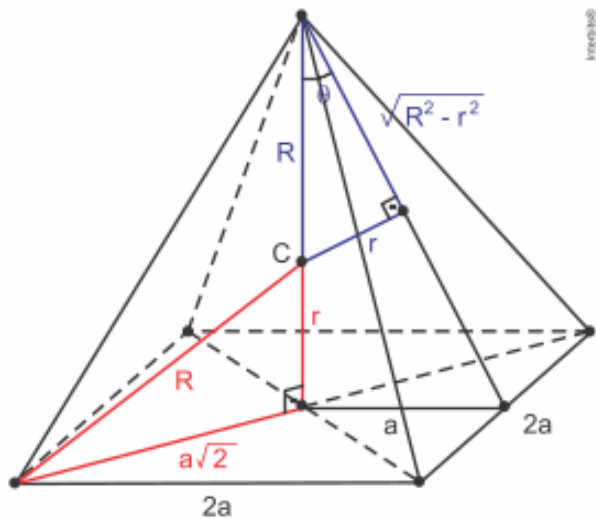
$$\begin{cases} \frac{V_b}{V_c} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \\ \frac{V_c - V_b}{V_c} = \left(\frac{9-h}{9}\right)^3 \end{cases} \Rightarrow 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{9-h}{9}\right)^3 \Rightarrow h = 9 - \sqrt[3]{217} \cong 2,99$$

Sendo assim:

$$2,9 \leq h \leq 3,0$$

Resposta da questão 19:

Da figura abaixo, com C sendo o centro da esfera, obtemos:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{a}{R + r} \Rightarrow a = \frac{r(R + r)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (I)$$

$$R^2 = r^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{2}} \quad (II)$$

Fazendo $(I) = (II)$:

$$\left(\frac{r(R + r)}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{r^2(R + r)^2}{(R + r)(R - r)} = \frac{(R + r)(R - r)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R - r)^2 = 2r^2 \Rightarrow R - r = r\sqrt{2} \Rightarrow R = r(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow \frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$$

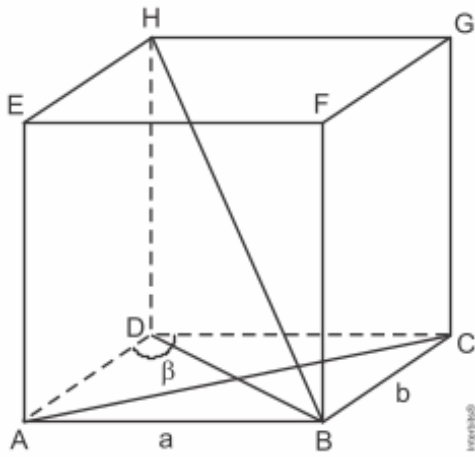
Sendo assim, a razão pedida vale:

$$\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Resposta da questão 20:

[A]

Do enunciado, temos:



Aplicando a lei dos cossenos dos triângulos ACD e ABD, obtemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \cos\beta$$

$$\overline{AC}^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\beta$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + a^2 + 2ab\cos\beta$$

Como $\overline{AC} = \overline{BH}$, temos que:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2$$

$$b^2 + a^2 - 2ab\cos\beta = b^2 + a^2 + 2ab\cos\beta + \overline{DH}^2$$

$$\overline{DH} = 2\sqrt{-ab\cos\beta}$$

Sendo assim, o volume do paralelepípedo é dado por:

$$V = A_{ABCD} \cdot \overline{DH}$$

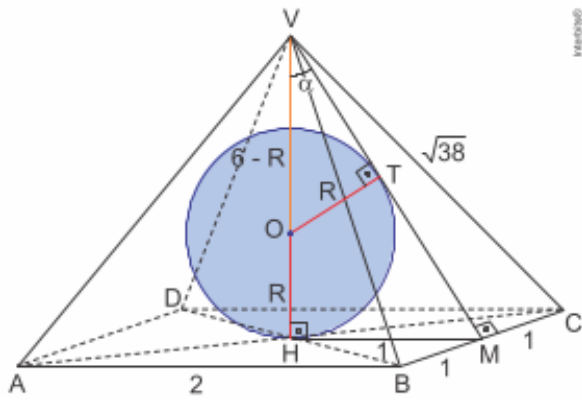
$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab\sin\beta \cdot 2\sqrt{-ab\cos\beta}$$

$$\therefore V = 2ab\sin\beta\sqrt{-ab\cos\beta}$$

Resposta da questão 21:

[D]

Do enunciado, temos a seguinte figura:



No triângulo VMC,

$$\sqrt{38}^2 = 1^2 + (VM)^2$$

$$VM = \sqrt{37}$$

No triângulo VHM,

$$\sqrt{37}^2 = (VH)^2 + 1^2$$

$$VH = 6$$

Note que:

$$TVO = MVH = \alpha$$

$$V^{\perp}TO = VHM = 90^{\circ}$$

Logo, VTO e VHM são triângulos semelhantes.

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{R}{1} &= \frac{6-R}{\sqrt{37}} \\ \sqrt{37} \cdot R &= 6-R \\ R \cdot (\sqrt{37} + 1) &= 6 \\ R &= \frac{6}{\sqrt{37} + 1} \\ R &= \frac{6}{\sqrt{37} + 1} \cdot \frac{\sqrt{37} - 1}{\sqrt{37} - 1} \\ R &= \frac{6 \cdot (\sqrt{37} - 1)^2}{\sqrt{37}} - 1^2 \\ R &= \frac{6 \cdot (\sqrt{37}^2 - 1)}{36} \\ R &= \frac{\sqrt{37}^3 - 1}{6} \end{aligned}$$

Resposta da questão 22:

[C]

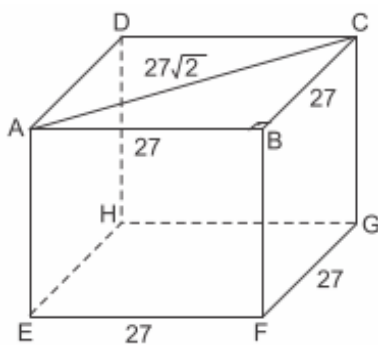
Sendo x , em cm , a medida da aresta do cubo cujo volume é igual a $19.683cm^3$, tem-se que:

$$x^3 = 19683$$

$$x^3 = 27^3$$

$$x = 27\text{cm}$$

Daí, o cubo que gerou o objeto de decoração, é o cubo abaixo:

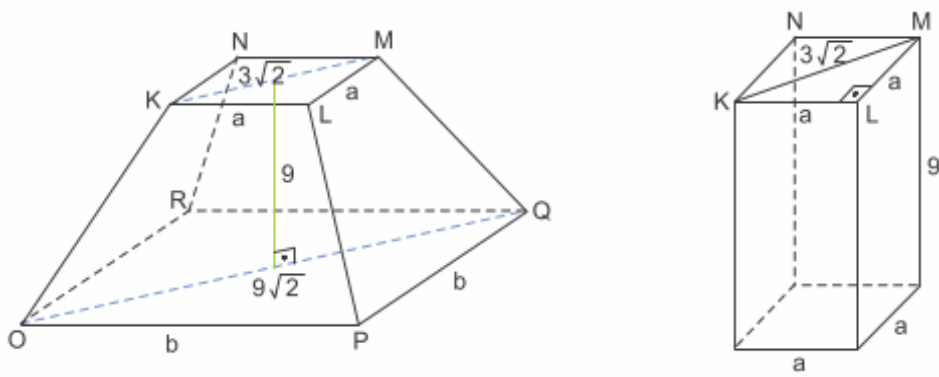


No triângulo ABC,

$$(AC)^2 = 27^2 + 27^2$$

$$AC = 27\sqrt{2}cm$$

Vamos analisar o tronco e o paralelepípedo reto-retângulo abaixo.



No triângulo KLM, segue que:

$$\begin{aligned}(3\sqrt{2})^2 &= a^2 + a^2 \\ 2a^2 &= 18 \\ a &= 3\text{cm}\end{aligned}$$

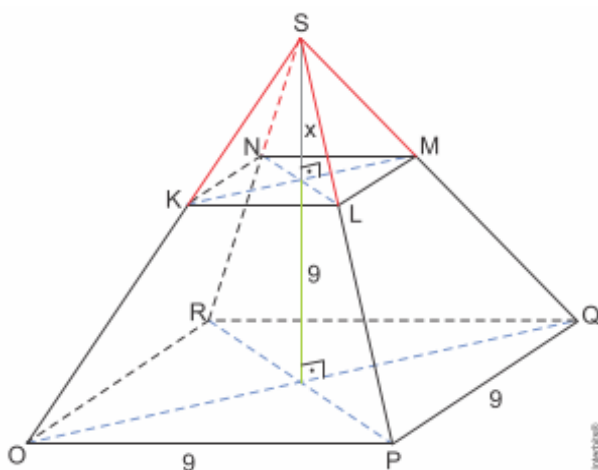
Assim, o volume do paralelepípedo é:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 3^2 \cdot 9 = 81\text{cm}^3$$

No triângulo OPQ, segue que:

$$\begin{aligned}(9\sqrt{2})^2 &= b^2 + b^2 \\ 81 \cdot 2 &= 2b^2 \\ b &= 9\text{cm}\end{aligned}$$

O tronco foi gerado pela seguinte pirâmide:



Os triângulos SKM e SOQ são semelhantes, logo,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+9} &= \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} \\ \frac{x}{x+9} &= \frac{1}{3} \\ 3x &= x+9 \\ x &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Então, o volume do tronco é dado por:

$$\begin{aligned}V_{\text{tronco}} &= \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot \left(9 + \frac{9}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{9}{2} \\ V_{\text{tronco}} &= \frac{729}{2} - \frac{27}{2} \\ V_{\text{tronco}} &= 351\text{cm}^3\end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido retirado é:

$$\begin{aligned}V_{\text{sólido retirado}} &= 2 \cdot V_{\text{tronco}} + V_{\text{paralelepipedo}} \\ V_{\text{sólido retirado}} &= 2 \cdot 351 + 81 \\ V_{\text{sólido retirado}} &= 783\text{cm}^3\end{aligned}$$

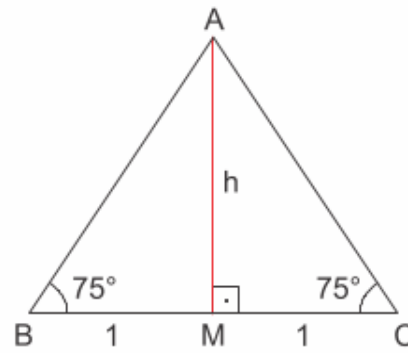
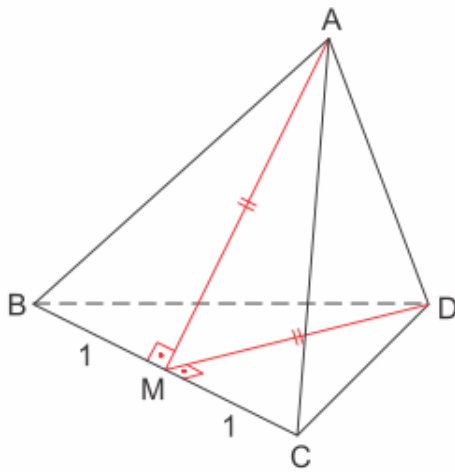
Finalmente, o volume do objeto de decoração é dado por V , onde V é igual a:

$$\begin{aligned}V &= 19683 - 783 \\ V &= 18900\text{cm}^3 \\ 18900 &\in]18.400, 19.000]\end{aligned}$$

Resposta da questão 23:

[D]

Do enunciado, seguem as figuras:



No triângulo AMC,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 75^{\circ} &= \frac{h}{1} \\ \operatorname{tg}(30^{\circ} + 45^{\circ}) &= h \\ \frac{\operatorname{tg} 30^{\circ} + \operatorname{tg} 45^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 30^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 45^{\circ}} &= h \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} &= h \\ 2 + \sqrt{3} &= h \end{aligned}$$

Note que os triângulos BMD e CMD são congruentes (caso LAL), logo, $BD = CD$.

Dessa forma, os triângulos ABD e ACD são congruentes (caso LLL).

Portanto, a área total do tetraedro é dada por:

$S_{\text{tetraedro}} = 4 \cdot S_{ABC}$, onde S_{ABC} é a medida da área do triângulo ABC.

Então,

$$\begin{aligned} S_{\text{tetraedro}} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 + \sqrt{3}) \\ S_{\text{tetraedro}} &= 4 \cdot (2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Resposta da questão 24:

[C]

Considerando que x e y são as medidas das arestas destes cubos podemos escrever que:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \\ y^2 &= 9 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre os volumes será dada por:

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{\sqrt{3}^3}{3^3} = 3^{\frac{3}{2}-3} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

Resposta da questão 25:

[C]

As medidas das arestas do prisma são, em centímetros,
 x , $2x$ e $4x$

Daí, como sua área total é 28cm^2 ,

$$\begin{aligned} 2(4x^2 + 2x^2 + 8x^2) &= 28 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

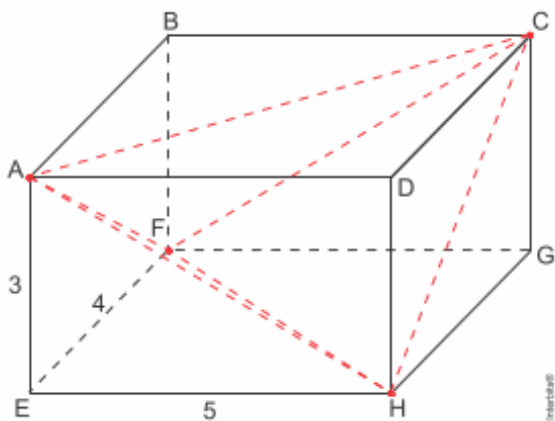
Logo, as arestas do prisma têm medidas iguais a 1cm , 2cm e 4cm , logo a medida (d) de sua diagonal é:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \\ d &= \sqrt{21}\text{cm} \end{aligned}$$

Resposta da questão 26:

[D]

Do enunciado, temos:



Como ABCDEFGH é um paralelepípedo retângulo, $AFEH$, $HADC$, $CGFH$ e $FABC$ são tetraedros trirretangulares.

$$V_{AFEH} = V_{HADC} = V_{CGFH} = V_{FABC} = V_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 10$$

Sendo V_0 volume do tetraedro $ACFH$ e V_2 o volume do paralelepípedo.

$$V = V_2 - 4 \cdot V_1$$

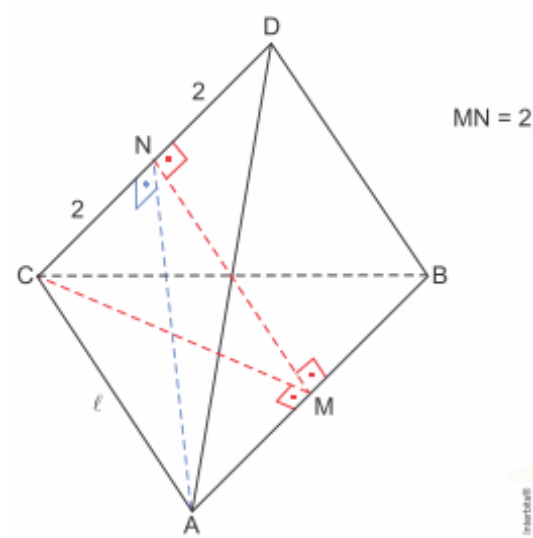
$$V = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 10$$

$$V = 20 \text{ cm}^3$$

Resposta da questão 27:

[A]

Do enunciado, temos:



No triângulo CNM,

$$(CM)^2 = 2^2 + 2^2$$

$$CM = 2\sqrt{2}$$

No triângulo CMA,

$$\text{sen} 60^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{\ell}$$

$$\ell = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

No triângulo ACN,

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 &= 2^2 + (AN)^2 \\ \frac{32}{3} - 4 &= (AN)^2 \\ (AN)^2 &= \frac{20}{3} \\ AN &= \sqrt{\frac{20}{3}} \\ AN &= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}} \\ AN &= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ AN &= \frac{\sqrt{60}}{3} \end{aligned}$$

Resposta da questão 28:

a) Dos triângulos retângulos ACO , BCO e ABO obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, respectivamente, $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$, $\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2$ e $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$.

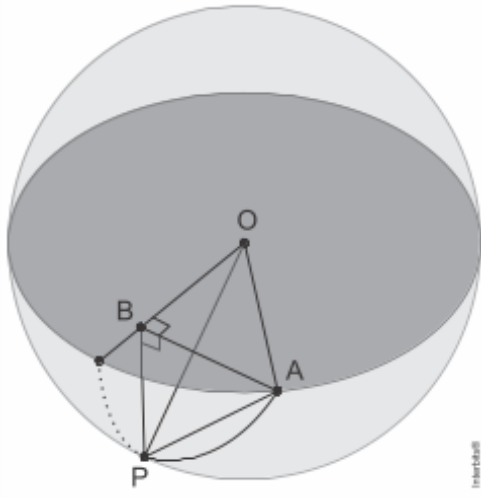
Além disso, temos

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CO}}{\cos\alpha} \text{ e } \overline{BC} = \frac{\overline{CO}}{\cos\beta}.$$

Em consequência, do triângulo ABC , pela Lei dos Cossenos, vem

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos ACB \Leftrightarrow \\ \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - 2 \cdot \frac{\overline{CO}}{\cos\alpha} \cdot \frac{\overline{CO}}{\cos\beta} \cdot \cos ACB \Leftrightarrow \\ \cos ACB &= \cos\alpha \cdot \cos\beta. \end{aligned}$$

b) Considere a figura, em que O é o centro da Terra, A é o ponto de latitude 0° e longitude 0° , B é a projeção ortogonal de A sobre a reta que passa por O e pelo ponto de latitude 0° e longitude 45° oeste e P é o ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste.



Como B também é projeção ortogonal de P sobre a reta que passa por O e pelo ponto de latitude 0° e longitude 45° oeste, segue que o tetraedro OBPA corresponde ao tetraedro do item (a). Logo, sendo $B\hat{O}P = 45^\circ$ e $B\hat{O}A = 45^\circ$, temos

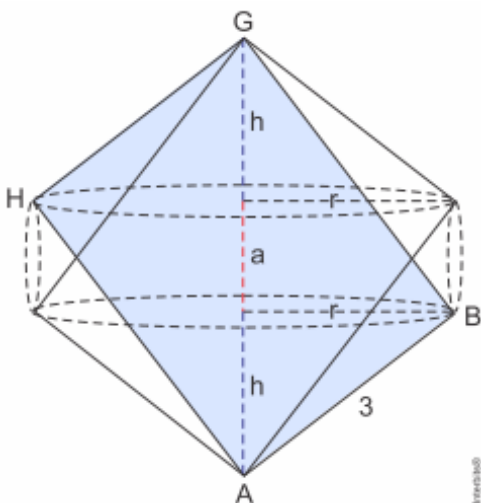
$$\cos AOP = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}.$$

Portanto, vem $AOP = 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad$ e, assim, o resultado é dado por $\frac{\pi}{3} \cdot 6000 = 2000\pi km$.

Resposta da questão 29:

[C]

Do enunciado, temos a seguinte figura:



$$BG = 3\sqrt{2}$$

$$AG = 3\sqrt{3}$$

O sólido pode ser aproximado por dois cones retos e um cilindro reto.

Note que $ABGH$ é um retângulo. Daí, no triângulo retângulo AGB , segue que:

$$3\sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \cdot r$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot r$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{3\sqrt{6}}{3}$$

$$r = \sqrt{6}$$

Daí,

$$3^2 = h^2 + \sqrt{6}^2$$

$$9 = h^2 + 6$$

$$h^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

$$2h + a = 3\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} + a = 3\sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3}$$

Logo,

$$V \cong 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot a$$

$$V \cong 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{6}^2 \cdot \sqrt{3} + \pi \cdot \sqrt{6}^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$V \cong 4\sqrt{3}\pi + 6\sqrt{3}\pi$$

$$V \cong 10\sqrt{3}\pi$$

$$V \cong 54,4cm^3$$

$$36 < V < 55$$

Resposta da questão 30:

[A]

Calculando:

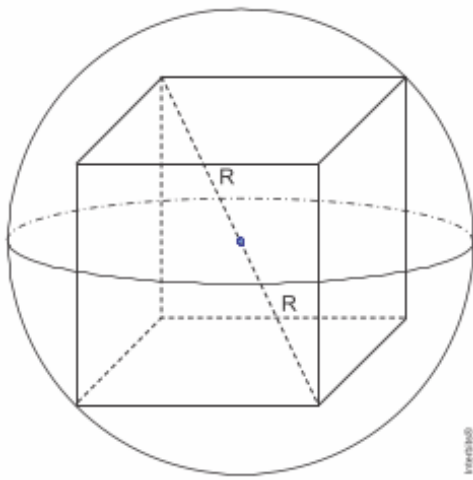
$$\text{Cone} \rightarrow \frac{10\pi\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{10}{7} = \frac{1}{3} \cdot R^3 \rightarrow R^3 = \frac{30}{7}$$

$$\text{Pirâmide} \rightarrow \begin{cases} \ell = R(\text{hexágono regular}) \\ h = R\sqrt{3}(\text{cone equilátero}) \\ V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \cdot R\sqrt{3} = \frac{18}{12} \cdot \frac{30}{7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{7} = \frac{90}{14} \rightarrow V = \frac{45}{7}$$

Resposta da questão 31:

[B]



O raio da esfera será a metade da diagonal do cubo:

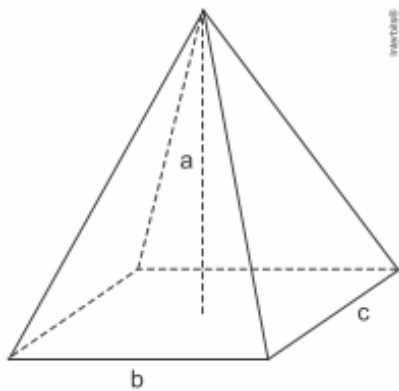
$$R = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a \cdot \sqrt{3}$$

A probabilidade será dada pela razão entre o volume do cubo e o volume da esfera.

$$P = \frac{(2 \cdot a)^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{8 \cdot a^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (a\sqrt{3})^3} = \frac{2a^3}{\pi \cdot a^3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\pi \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \pi}$$

Resposta da questão 32:

[D]



$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = k \Rightarrow \begin{aligned} a &= 6k \\ b &= 4k \\ c &= 2k \end{aligned}$$

Portanto,

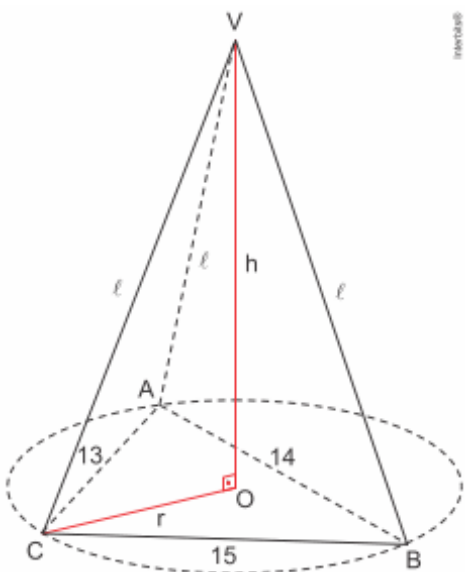
$$6k + 4k + 2k = 36 \Rightarrow k = 3.$$

O volume da pirâmide será dada por:

$$V = \frac{b \cdot c \cdot a}{3} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 18}{3} = 432$$

Resposta da questão 33:

[A]



No triângulo ABC,

$$2p = 13 + 14 + 15$$

$$2p = 42$$

$$p = 21$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 15)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

$$S_{ABC} = 84cm^2$$

Por outro lado,

$$S_{ABC} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4r}, \text{ logo,}$$

$$84 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4r}$$

$$4r = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{84}$$

$$4r = \frac{13 \cdot 1 \cdot 15}{6}$$

$$4r = \frac{13 \cdot 5}{2}$$

$$r = \frac{65}{8}$$

Como o volume da pirâmide é $105\sqrt{22}cm^3$,

$$105\sqrt{22} = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot h$$

$$105\sqrt{22} = 28h$$

$$h = \frac{105\sqrt{22}}{28}$$

$$h = \frac{15\sqrt{22}}{4}$$

No triângulo VOC,

$$\begin{aligned}
 \ell^2 &= r^2 + h^2 \\
 \ell^2 &= \left(\frac{65}{8}\right)^2 + \left(\frac{15\sqrt{22}}{4}\right)^2 \\
 \ell^2 &= \left(\frac{5 \cdot 13}{4 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{5 \cdot 3\sqrt{22}}{4}\right)^2 \\
 \ell^2 &= \frac{5^2 \cdot 13^2}{4^2 \cdot 2^2} + \frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{22}^2}{4^2} \\
 \ell^2 &= \frac{5^2 \cdot 13^2 + 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 22}{4^2 \cdot 2^2} \\
 \ell^2 &= \frac{5^2 \cdot (13^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 22)}{4^2 \cdot 2^2} \\
 \ell^2 &= \frac{5^2 \cdot 961}{4^2 \cdot 2^2} \\
 \ell^2 &= \frac{5^2 \cdot 31^2}{4^2 \cdot 2^2}
 \end{aligned}$$

Como $\ell > 0$,

$$\begin{aligned}
 \ell &= \sqrt{\frac{5^2 \cdot 31^2}{4^2 \cdot 2^2}} \\
 \ell &= \frac{5 \cdot 31}{4 \cdot 2} \\
 \ell &= \frac{155}{8} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Resposta da questão 34:

[E]

Sejam a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 3k, b = 4k \text{ e } c = 5k.$$

$$3k + 4k + 5k = 48 \Rightarrow 12k = 48 \Rightarrow k = 4$$

Portanto, $a = 12\text{cm}$, $b = 16\text{cm}$ e $c = 20\text{cm}$.

Então, a área total será dada por:

$$A_T = 2 \cdot (12 \cdot 16 + 12 \cdot 20 + 16 \cdot 20) = 1504\text{cm}^2$$

Resposta da questão 35:

[B]

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot 1 - \sec^2 x \cdot \cos^2 x \cdot 1 - 1 = -\frac{31}{16}$$

$$(\sin x \cdot \cos x)^2 - (\sec x \cdot \cos x)^2 = -\frac{31}{16} + \frac{16}{16} \rightarrow \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{16} + \frac{16}{16}$$

$$\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = -\frac{31}{16} + \frac{16}{16} + \frac{16}{16} \rightarrow (\sin 2x)^2 = \frac{4}{16} \rightarrow \sin 2x = \frac{2}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = 30^\circ \rightarrow x = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{12} \rightarrow \frac{6 \cdot \ell^2}{4} = \frac{\pi}{12} \rightarrow \ell^2 = \frac{4\pi}{72} \rightarrow \ell = \sqrt{\frac{\pi}{18}}$$

Observação: Seria possível uma segunda solução atendendo a condição de x no primeiro quadrante, que seria $x = 75^\circ$, porém não há alternativa de resposta para esse valor de X .

Resposta da questão 36:

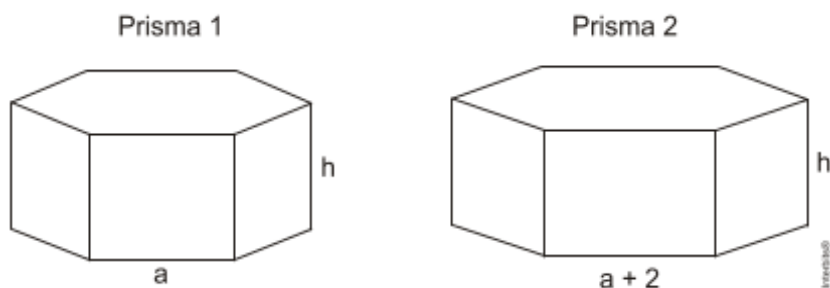
[A]

Desde que $BCA = 30^\circ$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, temos $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Em consequência, vem $\widehat{ABC} = 120^\circ$ e, portanto, a base da pirâmide é um hexágono regular de lado ℓ . Desse modo, sendo $h = 3\ell$ a altura da pirâmide, seu volume é igual a

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} \cdot 3\ell = \frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}.$$

Resposta da questão 37:

[B]



Volume do prisma 1: $\frac{6 \cdot a^2 \sqrt{3} \cdot h}{4}$

Volume do prisma 2: $\frac{6 \cdot (a+2)^2 \sqrt{3} \cdot h}{4}$

Aumento do volume: $V_2 - V_1 = 6\sqrt{3} \cdot (a + 1) \cdot h = 108(I)$

$$\frac{a}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = a\sqrt{3}(II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3} \cdot (a + 1) \cdot a\sqrt{3} &= 108 \\ 18(a^2 + a) &= 108 \\ a^2 + a &= 6 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos $a = -3$ (não convém) ou $a = 2$.

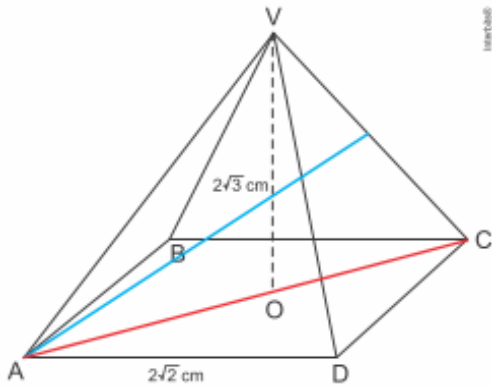
$a = 2\text{cm} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\text{cm}$, portanto, o volume do prisma 1 será dado por:

$$V_1 = \frac{6 \cdot a^2 \sqrt{3} \cdot h}{4} = \frac{6 \cdot 2^2 \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 36\text{cm}^3$$

Resposta da questão 38:

[B]

Com os dados do enunciado, pode-se desenhar:



Analisando o triângulo VOC, pode-se escrever:

$$\overline{VC}^2 = (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{(2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 = 12 + 4 \Rightarrow \overline{VC} = 4$$

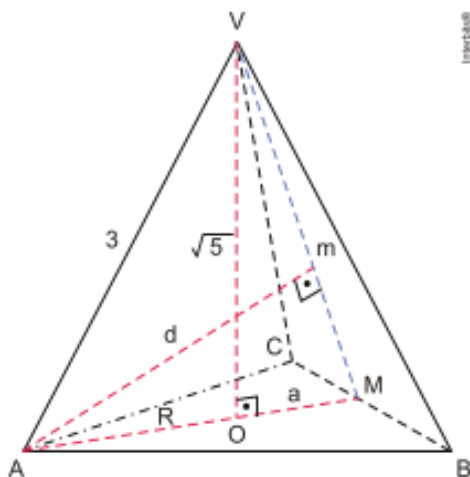
Como o segmento $\overline{AC}$ também é igual a 4, conclui-se que o triângulo ACV é equilátero. Assim, a distância do ponto A à aresta lateral $\overline{VC}$ é igual a altura h de um triângulo equilátero de lado 4 (segmento azul da figura).

Logo,

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3}$$

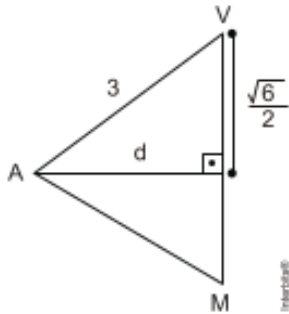
Resposta da questão 39:

[A]



No triângulo VOM: $R^2 + \sqrt{5}^2 = 3^2 \Rightarrow R = \sqrt{4} \Rightarrow R = 2$ e $a = 1$

No triângulo VOM: $m^2 = \sqrt{5}^2 + 1^2 \Rightarrow m = \sqrt{6}$



O triângulo AMV é isósceles de base VM ($AM = AV = 3$)

Logo, $d^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{9 - \frac{6}{4}} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{30}}{2}$

Resposta da questão 40:

[A]

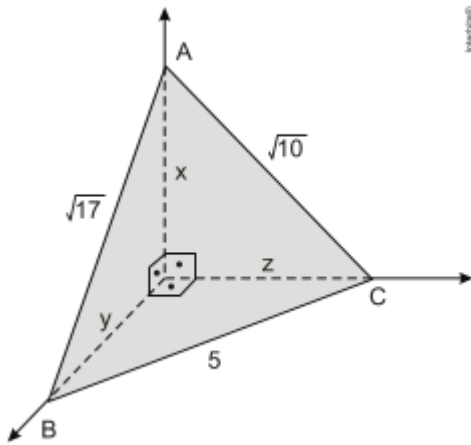
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{10}^2 \\ x^2 + z^2 = \sqrt{17}^2 \\ z^2 + y^2 = 5^2 \end{cases}$$

Fazendo (1) + (2) - (3), temos:

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x = 1, y = 3 \text{ e } z = 4$$

Portanto, o volume do sólido será dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{z \cdot y}{2} \cdot x = \frac{4 \cdot 3 \cdot 1}{6} = 2 \text{ cm}^3$$



Resposta da questão 41:

[B]

Considerando x a medida da aresta da base, y a medida da aresta lateral, temos:

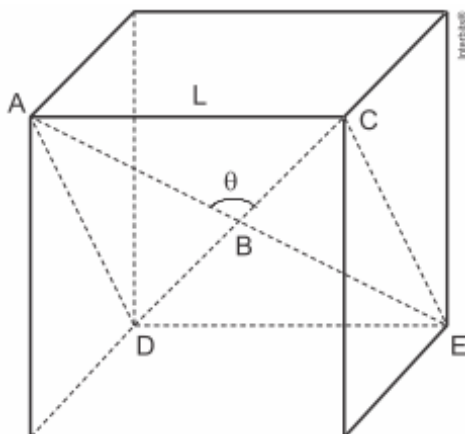
A área lateral é 75% da área total: $6xy = 75\% \cdot A_T$

A área da base é 12,5% da área total: $\frac{6 \cdot x^2 \sqrt{3}}{4} = 12,5\% \cdot A_T$

$$\frac{6xy}{\frac{6 \cdot x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{75\% \cdot A_T}{12,5\% \cdot A_T} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Resposta da questão 42:

[D]



Na figura, temos $AE = CD = L \cdot \sqrt{3}$ (diagonal do cubo) e $AB = BC = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ (metade da diagonal do cubo).

Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo ABC, conseguimos determinar o cosseno do menor ângulo formado pelas diagonais do cubo.

$$L^2 = \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\theta$$

$$L^2 = 2 \cdot \frac{3 \cdot L^2}{4} - 2 \cdot \frac{3 \cdot L^2}{4} \cdot \cos\theta$$

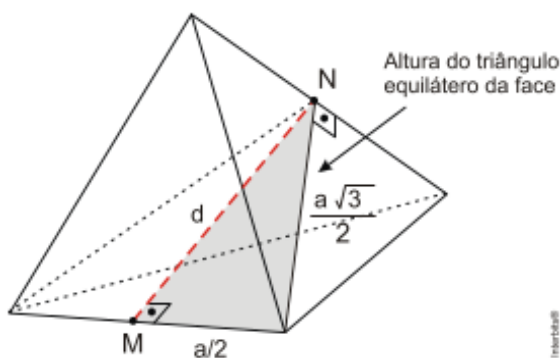
$$4 \cdot L^2 = 6 \cdot L^2 - 6 \cdot L^2 \cdot \cos\theta$$

$$6 \cdot L^2 \cdot \cos\theta = 2 \cdot L^2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{3}$$

Resposta da questão 43:

[D]



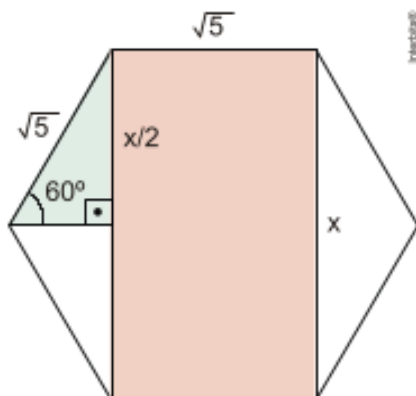
$$d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{2 \cdot a^2}{4}} \Leftrightarrow d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Resposta da questão 44:

[B]

Volume da pirâmide hexagonal: $V_H = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 15\sqrt{3}cm^3$

Lados da base da pirâmide retangular: $\sin 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \sqrt{15}$



Volume da pirâmide retangular: $V_R = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot 3 = 5\sqrt{3}$

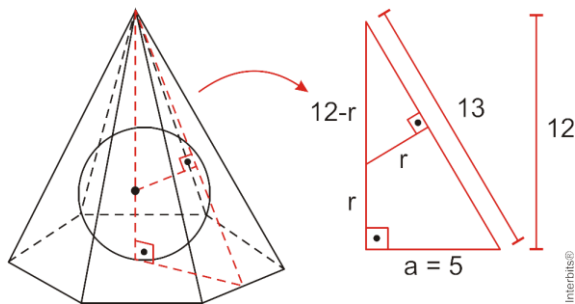
Portanto o volume do sólido todo será $V = 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}cm^3$

Resposta da questão 45:

[E]

$$\text{Aresta da base } a = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5$$

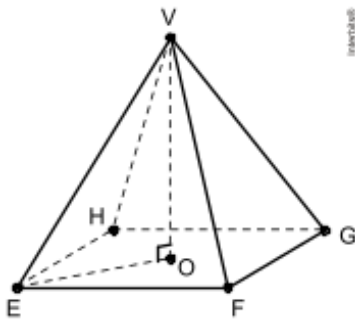
Por semelhança de triângulos, temos $\frac{12-r}{13} = \frac{r}{5} \Leftrightarrow r = 10/3cm$



Resposta da questão 46:

[B]

Considere a figura abaixo, em que O é o centro da base da pirâmide.



Como $\overline{VE} = \overline{EF} = l$, segue que $\overline{OE} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo VOE , obtemos

$$\overline{VO}^2 = \overline{VE}^2 - \overline{OE}^2 \Rightarrow \overline{VO} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Desse modo, a distância do ponto V à face $ABCD$ é

$$\frac{l\sqrt{2}}{2} + l = l \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right).$$

A superfície total do sólido é dada por

$$\begin{aligned} 4 \cdot (\overline{VEF}) + 5 \cdot (\overline{ABCD}) &= 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} + 5 \cdot l^2 \\ &= l^2 (\sqrt{3} + 5). \end{aligned}$$

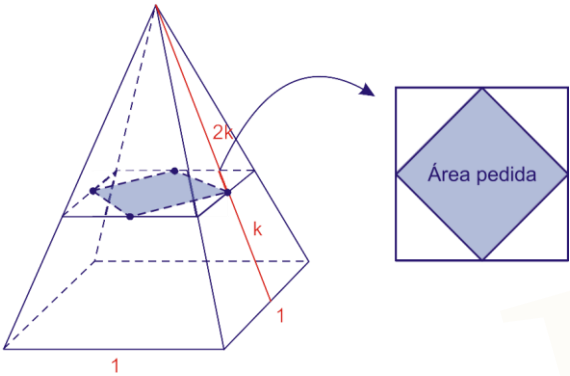
Resposta da questão 47:

[D]

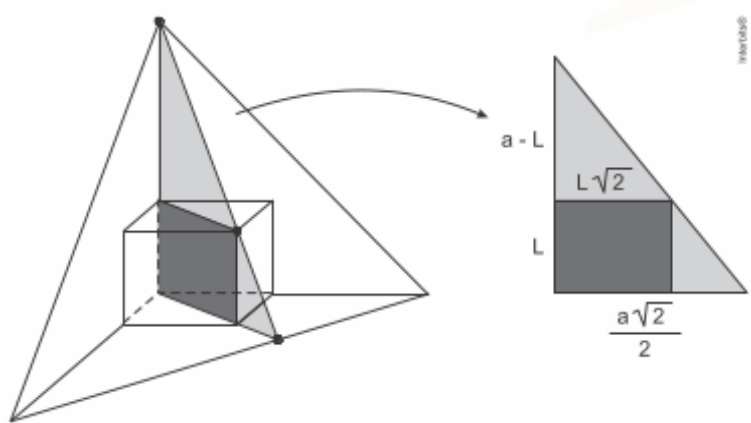
O baricentro divide a mediana na razão 2 para 1
 Secção transversal = quadrado (maior) destacado

$$\frac{A_{sec}}{A_{base}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{A_{sec}}{1} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow A_{sec} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Áreapedida} = \frac{1}{2} A_{sec} = \frac{2}{9}$$



Resposta da questão 48:



$$\frac{a-L}{a} = \frac{L\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{a-L}{a} = \frac{2L}{a} \Leftrightarrow a^2 - a \cdot L = 2aL \Leftrightarrow a^2 - 3aL = 0 \Leftrightarrow L = \frac{a}{3}$$

Resposta da questão 49:

[B]

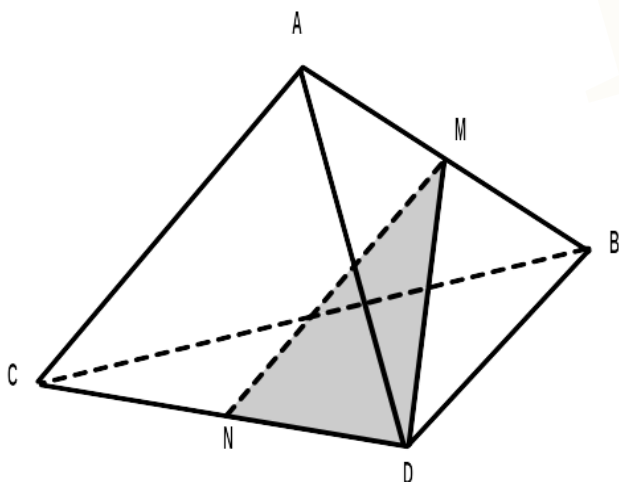
$$MD = MC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ND = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (MN)^2$$

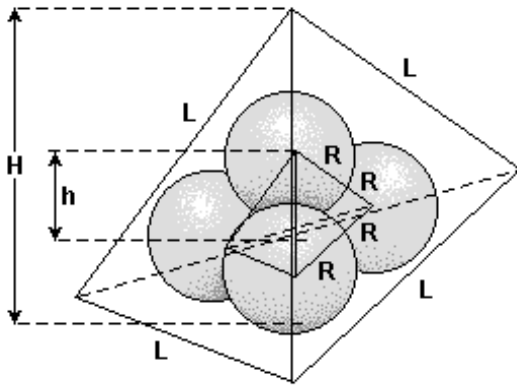
$$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Logo a área pedida é } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$$



Resposta da questão 50:

[B]

Resposta da questão 51:

Sendo h a altura do tetraedro regular t cujos vértices são os centros das quatro esferas, H a altura do tetraedro regular T circunscrito a elas, L a medida de cada aresta de T e V o volume do tetraedro T , têm-se:

$$1^{\circ}.) h = 2R \sqrt{6} / 3$$

$$2^{\circ}.) H/4 = h/4 + R \Leftrightarrow H = h + 4R \text{ Assim: } H = 2R \sqrt{6} / 3 + 4R \Leftrightarrow H = 2R (\sqrt{6} + 6)/3$$

$$3^{\circ}.) H = L \sqrt{6} / 3 \text{ Assim: } 2R (\sqrt{6} + 6)/3 = L \sqrt{6} / 3 \Leftrightarrow L = 2R (1 + \sqrt{6})$$

$$4^{\circ}.) V = L^3 \sqrt{2} / 12 = [2R (1 + \sqrt{6})]^3 \cdot \sqrt{2} / 12 \Leftrightarrow V = 2 \sqrt{2} (1 + \sqrt{6})^3 R^3 / 3$$

Resposta da questão 52:

[C]

Resposta da questão 53:

21 cm

Resposta da questão 54:

[B]

Resposta da questão 55:

[C]