Problemas de Trigonometria

Nível IME · ITA · 15 questões · com gabarito comentado

PROF. YURI POLITANO

1. *JEE (Advanced):* Mostre que

$$\frac{\cot x - 1}{\cot x + 1} = \frac{\cos(2x)}{1 + \sin(2x)}$$

2. Mostre que

(a) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(2\theta)}{1 + \cos\theta + \cos(2\theta)} = \tan\theta$ se $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

(b) Se $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, para qual(is) valor(es) de θ a identidade na questão a) não é verdadeira?

3. *College Trigonometry, Aufmann:* Prove a identidade

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \operatorname{tg} x} = \sec x \operatorname{cosec} x + 1$$

4. Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = \operatorname{tg} 3x$ para todo x para o qual $\operatorname{tg}(3x)$ é definida e $1 + 2\cos(2x) \neq 0$.

5. Se $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0, 1$, e $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, então encontre $f(\sec^2\theta)$.

6. *Liga de Matemática de Nova Iorque:* Encontre A tal que $0° < A < 90°$ e $\cos 41° + \sin 41° = \sqrt{2}\sin A$.

7. Determine a soma dos ângulos A e B, onde $0° \leq A, B \leq 180°$, e

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad \cos A + \cos B = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

8. *AIME:* Se $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 25$ e $\cot x + \cot y = 30$, então calcule $\operatorname{tg}(x + y)$.

9. *Torneio de Matemática de Harvard-MIT:* Encontre a imagem da função

$$f(A) = \frac{\operatorname{sen} A(3\cos^2 A + \cos^4 A + 3\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 A \cos^2 A)}{\operatorname{tg} A(\sec A - \operatorname{sen} A \operatorname{tg} A)}$$

onde A não é um múltiplo inteiro de $\frac{\pi}{2}$.

10. *IME*

Quando os arcos x e y verificam a relação $4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y + 5 \cdot \cos x \cdot \cos y = 0$. O valor da expressão

$$\frac{1}{4\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x} + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2 y + 5\cos^2 y}$$

é igual a k. Calcule o valor numérico de $20k$.

11. *Olimpiada Cearense de Matematica:*

(a) Para todo real $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, k inteiro, prove que $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}\alpha$

(b) Demonstre, utilizando o resultado anterior, que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} 4\alpha} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{sen} 2^n\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg} 2^n\alpha$$

para todo α com $\operatorname{sen}(2^j\alpha) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

12. *Olimpíada de Matemática dos EUA:* Encontre o valor de

$$\frac{\operatorname{tg} 1^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 2^\circ}{1 + \operatorname{tg} 2^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 3^\circ}{1 + \operatorname{tg} 3^\circ} + \ldots + \frac{\operatorname{tg} 89^\circ}{1 + \operatorname{tg} 89^\circ}$$

13. *Olimpíada de Matemática da Índia:*

Se $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$, então prove que $\frac{\operatorname{sen}^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3}$ é igual a $\frac{1}{(a+b)^3}$.

14. Calcule o valor de

$$\sum_{x=1}^{44} \cos^2(4x^\circ)$$

15. Seja

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2 \\ \sec\alpha + \sec\beta = 3 \end{cases}$$

Calcule $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$

Gabarito comentado

Nos problemas 4, 9, 10, 11 e 13, os enunciados foram ajustados em relação à fonte original, a pedido do Prof. Yuri Politano. Os comentários indicam o que mudou e por quê.

1. No domínio comum, $\sin x \neq 0$ e $\cos x + \sin x \neq 0$. Assim,

$$\frac{\cot x - 1}{\cot x + 1} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$$

Por outro lado, $\cos(2x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ e $1 + \sin(2x) = (\cos x + \sin x)^2$. Portanto,

$$\frac{\cos(2x)}{1 + \sin(2x)} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x},$$

o que demonstra a identidade onde ambos os membros estão definidos.

2. (a) Pelas fórmulas do arco duplo,

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen}\theta(1 + 2\cos\theta), \qquad 1 + \cos\theta + \cos(2\theta) = \cos\theta(1 + 2\cos\theta).$$

No intervalo dado, $\cos\theta > 0$ e $1 + 2\cos\theta > 0$. O quociente é, então, $\tan\theta$.

(b) Para $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, o único zero do denominador ocorre quando $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, isto é, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Nesse ponto, o quociente original é indefinido, embora $\tan\theta$ exista. Nos demais pontos do intervalo, a igualdade vale.

3. Faça $t = \operatorname{tg} x$. No domínio da identidade, $\sin x \cos x \neq 0$ e $t \neq 1$. Logo,

$$\frac{t}{1 - \frac{1}{t}} + \frac{\frac{1}{t}}{1 - t} = \frac{t^3 - 1}{t(t-1)} = \frac{t^2 + t + 1}{t} = t + 1 + \frac{1}{t}.$$

Como $\operatorname{tg} x + \cot x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \sec x \operatorname{cosec} x$, segue o resultado.

4. As fórmulas de soma dão

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}(3x)(1 + 2\cos 2x),$$

$$\cos x + \cos(3x) + \cos(5x) = \cos(3x)(1 + 2\cos 2x).$$

Como $1 + 2\cos 2x \neq 0$ e $\cos(3x) \neq 0$, o quociente é $\operatorname{tg} 3x$.

Observação: a fonte pedia a identidade para todo x com $\operatorname{tg}(3x)$ definida, mas em $x = \frac{\pi}{3}$ o quociente é $\frac{0}{0}$. O enunciado foi ajustado exigindo $1 + 2\cos 2x \neq 0$.

5. Ponha $t = \dfrac{x}{x-1}$. Então $x = \dfrac{t}{t-1}$ e

$$f(t) = \frac{t-1}{t} \qquad (t \neq 0, 1).$$

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos $\sec^2\theta > 1$ e podemos substituir:

$$\boxed{f(\sec^2\theta) = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = \sin^2\theta}.$$

6. A fórmula de adição fornece

$$\cos 41^\circ + \sin 41^\circ = \sqrt{2}\sin(41^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2}\sin 86^\circ.$$

Logo $\sin A = \sin 86^\circ$. Como o seno é estritamente crescente entre 0° e 90°, a única solução permitida é $\boxed{A = 86^\circ}$.

7. Defina $S = \frac{A+B}{2}$ e $D = \frac{A-B}{2}$. As somas dadas tornam-se

$$2\sin S\cos D = \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad 2\cos S\cos D = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

A segunda igualdade é positiva, portanto a divisão é válida e $\tan S = \sqrt{3}$. Temos $0^\circ \leq S \leq 180^\circ$; além disso, $\cos D \geq 0$ e a segunda igualdade implica $\cos S > 0$. Assim $S = 60^\circ$ e $\boxed{A + B = 120^\circ}$.

8. Sejam $u = \operatorname{tg} x$ e $v = \operatorname{tg} y$. As cotangentes dadas exigem $uv \neq 0$, e

$$30 = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{25}{uv} \quad \Longrightarrow \quad uv = \frac{5}{6}.$$

Como $1 - uv = \frac{1}{6} \neq 0$, a tangente da soma está definida e

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y) = \frac{u+v}{1-uv} = \frac{25}{\frac{1}{6}} = 150}.$$

9. A exclusão dos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ garante $\sin A \neq 0$ e $\cos A \neq 0$. Usando $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

$$3\cos^2 A + 3\sin^2 A + \cos^4 A + \sin^2 A\cos^2 A = 3 + \cos^2 A,$$

$$\operatorname{tg} A(\sec A - \operatorname{sen} A \operatorname{tg} A) = \frac{\sin A}{\cos A}\,\frac{1-\sin^2 A}{\cos A} = \sin A.$$

Logo $f(A) = 3 + \cos^2 A$. No domínio dado, $0 < \cos^2 A < 1$, e todos os valores desse intervalo são atingidos. Portanto, a imagem é $\boxed{(3, 4)}$.

Observação: na fonte, a função aparecia como $f(a)$ e pedia-se o "intervalo de $f(a)$". O enunciado foi ajustado para $f(A)$ e imagem da função.

10. Elevando ao quadrado a relação $4\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -5\cos x \cos y$, obtemos

$$16\operatorname{sen}^2 x\ \operatorname{sen}^2 y = 25\cos^2 x\ \cos^2 y.$$

Sejam $a = \operatorname{sen}^2 x$ e $b = \operatorname{sen}^2 y$. Como $\cos^2 x = 1 - a$ e $\cos^2 y = 1 - b$,

$$16ab = 25(1-a)(1-b) \quad\Longrightarrow\quad a + b = 1 + \frac{9ab}{25}.$$

Agora,

$$k = \frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} = \frac{10-(a+b)}{25-5(a+b)+ab}.$$

Substituindo $a + b = 1 + \frac{9ab}{25}$,

$$k = \frac{9 - \frac{9ab}{25}}{20 - \frac{4ab}{5}} = \frac{9(25-ab)}{20(25-ab)} = \frac{9}{20}.$$

Portanto, $\boxed{20k = 9}$.

Observação: o enunciado desta fonte trazia a relação $4\operatorname{sen} y + 5\cos x \cos y = 0$, que não determina k (há exemplos com $20k = 9$ e $20k = \frac{77}{9}$). O enunciado foi ajustado, incluindo o fator $\operatorname{sen} x$ no primeiro termo, a pedido do Prof. Yuri Politano; sem esse ajuste, o problema não tem resposta única.

11. (a) Para $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \neq 0$ e $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, e

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

(b) Supondo $\operatorname{sen}(2^j\alpha) \neq 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n$, aplicamos o item (a) a $2^j\alpha$, de $j = 0$ até $j = n$, e a soma é telescópica:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{sen}(2^j\alpha)} = \sum_{j=0}^{n} \Big(\operatorname{cotg}(2^{j-1}\alpha) - \operatorname{cotg}(2^j\alpha)\Big) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}(2^n\alpha).$$

Observação: a fonte trazia senos no lugar das cotangentes nos dois itens, o que torna as afirmações falsas (em (a), $\alpha = \frac{\pi}{3}$ dá $\frac{2}{\sqrt{3}}$ à esquerda e $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ à direita). O enunciado foi ajustado a pedido do Prof. Yuri Politano.

12. Para $1^\circ \leq t \leq 89^\circ$, o termo de ângulo $90^\circ - t$ é

$$\frac{\operatorname{tg}(90^\circ - t)}{1 + \operatorname{tg}(90^\circ - t)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} t}.$$

Ele soma 1 com $\frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$. Há 44 pares, de $(1^\circ, 89^\circ)$ até $(44^\circ, 46^\circ)$, e o termo central, de 45°, vale $\frac{1}{2}$. Logo a soma é $\boxed{\frac{89}{2}}$.

13. Considere $u = \sin^2 x$ e $v = \cos^2 x$, com $u + v = 1$ e $a, b, a+b \neq 0$. A hipótese implica

$$(a+b)(bu^2 + av^2) = ab(u+v)^2 \quad \Longrightarrow \quad (bu - av)^2 = 0.$$

Assim, $bu = av$ e, como $u + v = 1$, temos $u = \frac{a}{a+b}$ e $v = \frac{b}{a+b}$. Portanto,

$$\frac{\operatorname{sen}^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{u^4}{a^3} + \frac{v^4}{b^3} = \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

Observação: a fonte trazia a^8 no denominador, o que torna a conclusão falsa (com $a = b = 2$ e $x = \frac{\pi}{4}$, o lado esquerdo vale $\frac{33}{4096} \neq \frac{1}{64}$). O enunciado foi ajustado para a^3 a pedido do Prof. Yuri Politano.

14. Pela fórmula do arco duplo,

$$\sum_{x=1}^{44} \cos^2(4x^\circ) = 22 + \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{44} \cos(8x^\circ).$$

Seja $z = \cos 8^\circ + i \sin 8^\circ$. Como $z^{45} = 1$ e $z \neq 1$, a soma geométrica $1 + z + \cdots + z^{44} = 0$. Tomando partes reais, segue $\sum_{x=1}^{44} \cos(8x^\circ) = -1$. Logo o valor pedido é $\boxed{\frac{43}{2}}$.

15. Escreva $p = \sec\alpha$, $q = \sec\beta$, $u = \operatorname{tg}\alpha$ e $v = \operatorname{tg}\beta$. Então $p + q = 3$, $u + v = 2$, $p^2 - u^2 = q^2 - v^2 = 1$. Definindo $d = p - q$ e $e = u - v$, a diferença das duas últimas igualdades fornece $3d = 2e$.

Além disso,

$$d^2 - e^2 = 2(p^2 + q^2 - u^2 - v^2) - \big((p+q)^2 - (u+v)^2\big) = 4 - 5 = -1.$$

Assim, $e^2 = \frac{9}{5}$, $d^2 = \frac{4}{5}$ e $de = \frac{6}{5}$. Segue que

$$pq = \frac{(p+q)^2 - d^2}{4} = \frac{41}{20}, \qquad uq + vp = \frac{(u+v)(p+q) - ed}{2} = \frac{12}{5}.$$

Como $p, q \neq 0$,

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \frac{u}{p} + \frac{v}{q} = \frac{uq + vp}{pq} = \frac{48}{41}}.$$