

-TEORIA-

1) Condição de existência de um quadrilátero convexo

Para que quatro segmentos de comprimentos a , b , c e d possam formar um quadrilátero convexo, é necessário e suficiente que o comprimento de qualquer lado seja menor que a soma dos outros três.

Em termos algébricos, devem ser satisfeitas simultaneamente as seguintes desigualdades:

$$a < b + c + d$$

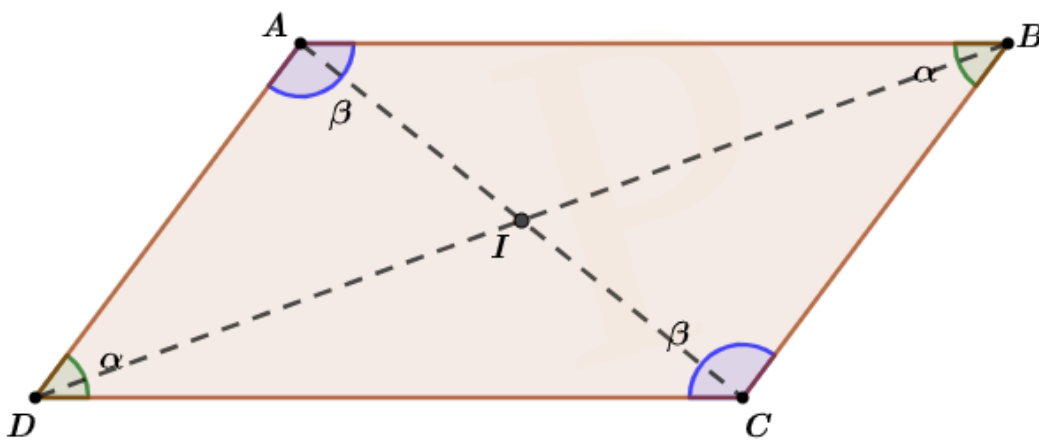
$$b < a + c + d$$

$$c < a + b + d$$

$$d < a + b + c$$

2) Paralelogramos

Um quadrilátero convexo é denominado paralelogramo se, e somente se, possuir os lados opostos paralelos.



$$\rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \text{ (ângulos colaterais)}$$

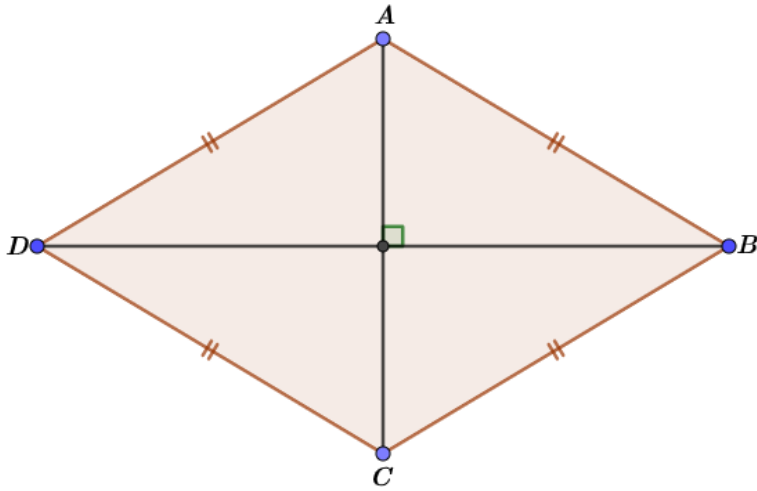
$$\rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC}; \widehat{DAB} = \widehat{BCD}$$

$$\rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}; \overline{AD} = \overline{BC}$$

$$\rightarrow I: \text{centro}$$

$$\rightarrow \Delta(ABI) \equiv \Delta(DIC); \Delta(AID) \equiv \Delta(BIC)$$

2.1 Losango

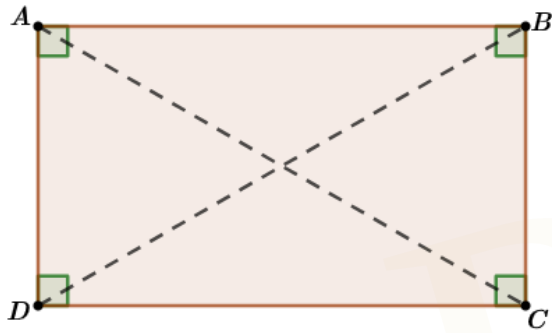


→ *Equilátero*

→ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

→ $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$: Bissetrizes

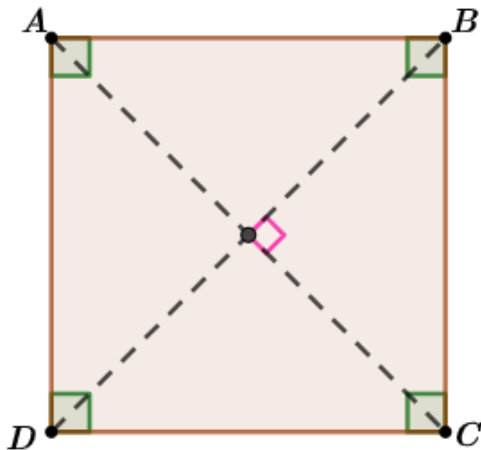
2.2 Retângulo



→ *Equiângulo;*

→ $\overline{AC} = \overline{BD}$

2.3 Quadrado



→ *Equilátero;*

$$\rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD};$$

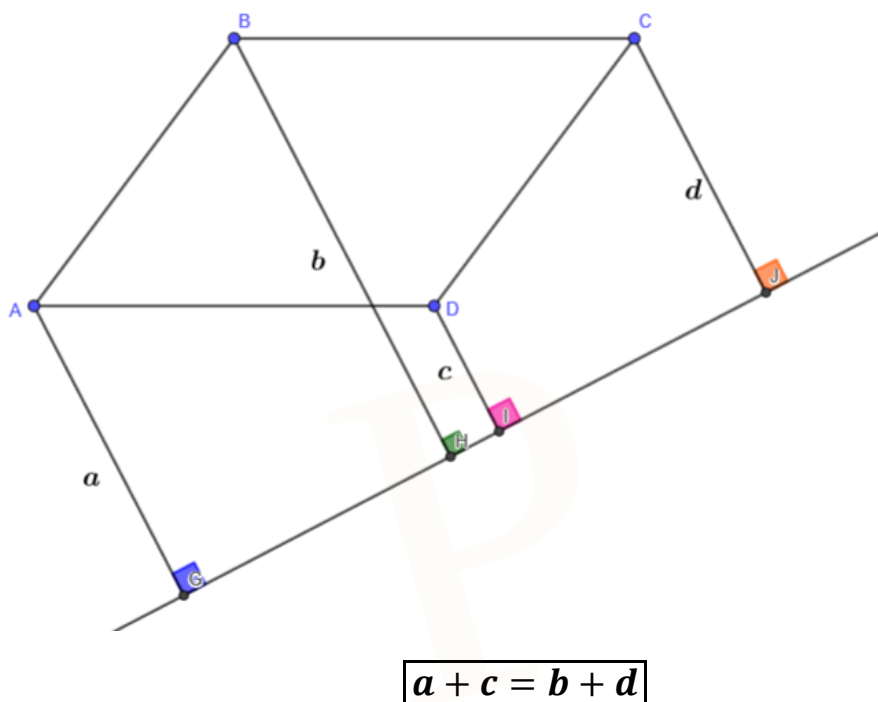
$$\rightarrow \text{Equiângulo};$$

$$\rightarrow \overline{AC} = \overline{BD};$$

$$\rightarrow \overline{AC} \text{ e } \overline{BD} : \text{Bissetrizes}$$

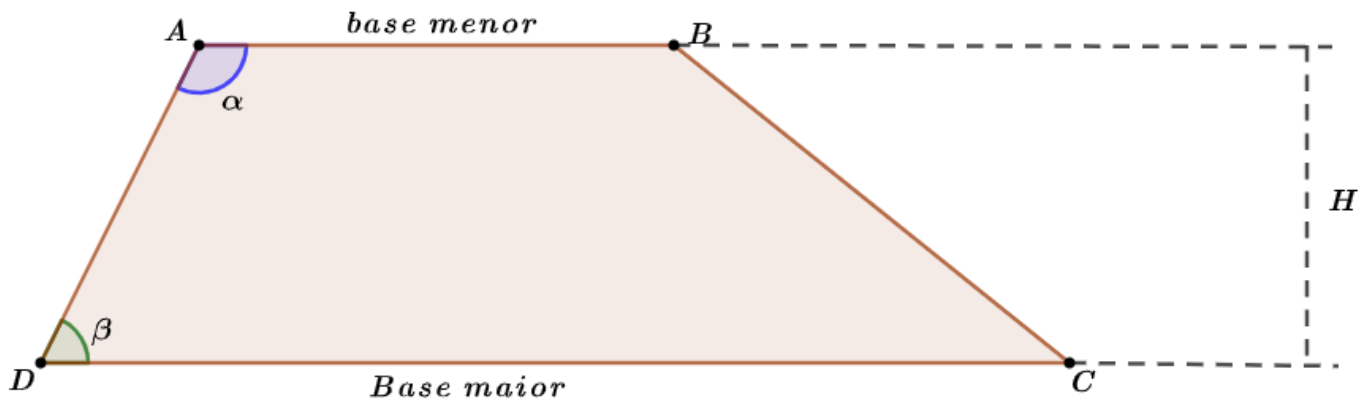
O quadrado pode ser considerado um **losango equiângulo** ou um **retângulo equilátero**.

Tome nota: Projeções ortogonais dos vértices de um paralelogramo sobre uma reta suporte.



3) Trapézio

Um quadrilátero convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos.



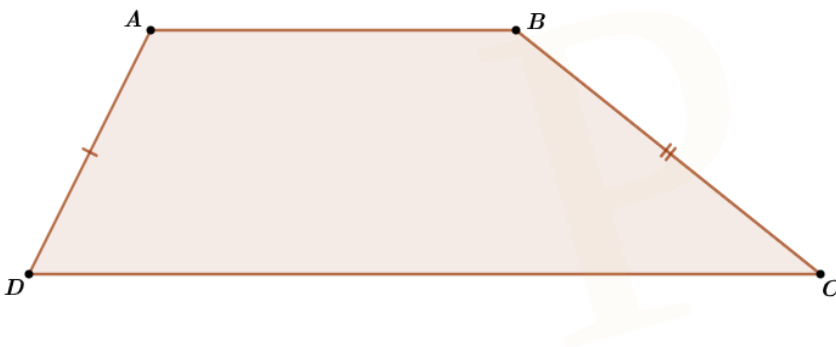
$$\rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

$\rightarrow H$: Altura

3.1) Classificações de Trapézios

TRAPÉZIO ESCALENO

Lados não paralelos com medidas distintas.



TRAPÉZIO ISÓSCELES

Lados não paralelos congruentes.

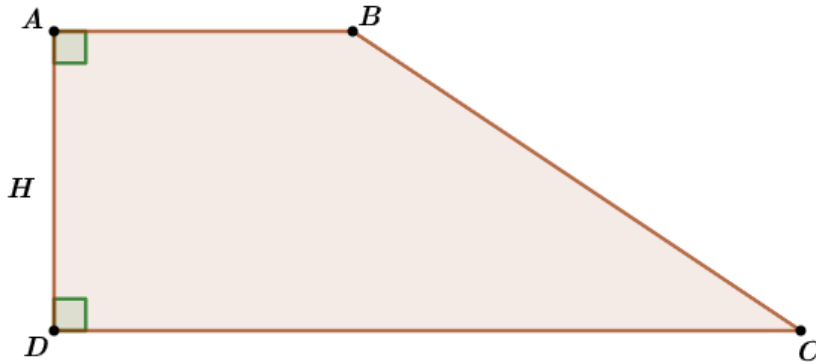


→ Ângulos adjacentes das bases congruentes;

$$\rightarrow \overline{DE} = \overline{FC} = \frac{B-b}{2}$$

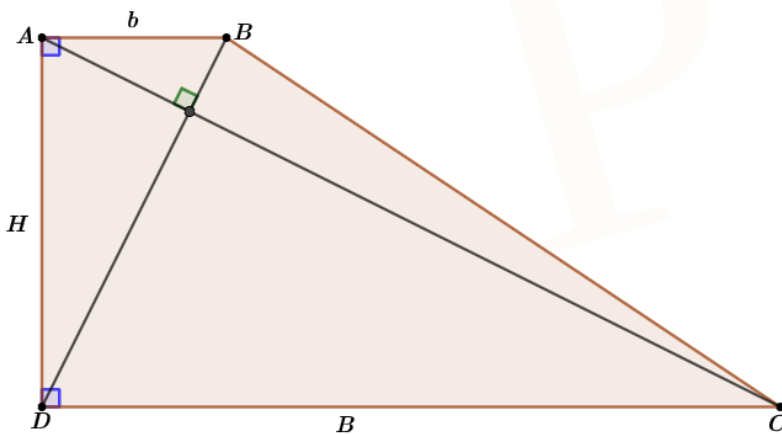
TRAPÉZIO RETÂNGULO

Um dos lados não paralelos coincide com a altura do trapézio.



$$\rightarrow \overline{AD} = H$$

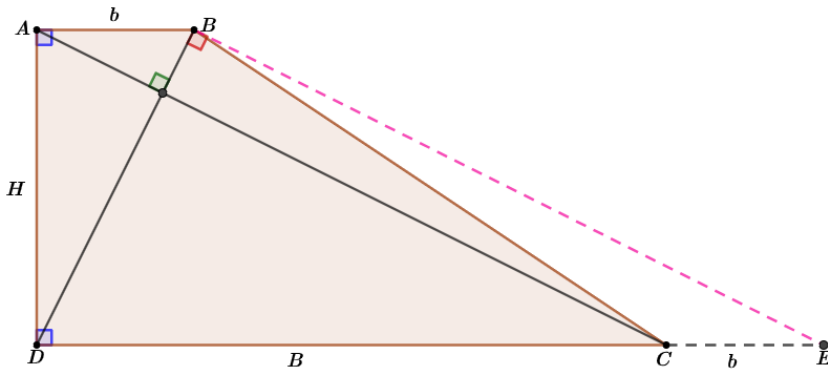
OBS: Num trapézio retângulo cujas diagonais são perpendiculares, a altura é a média geométrica das bases.



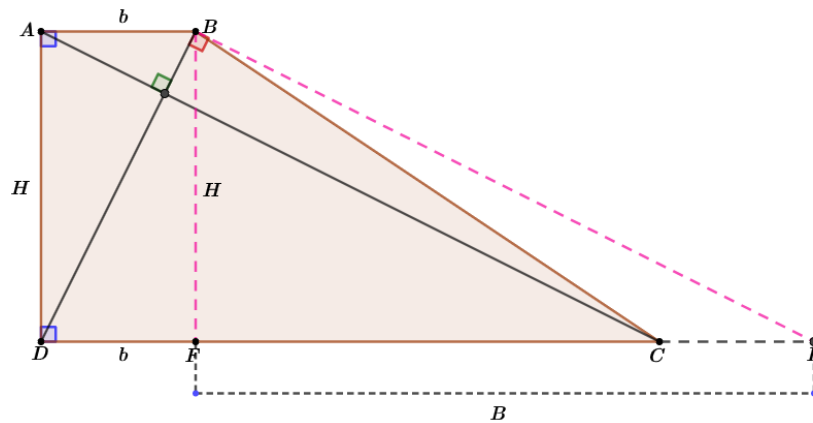
$$H^2 = B \cdot b$$

(Demonstração)

Vamos construir $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$.

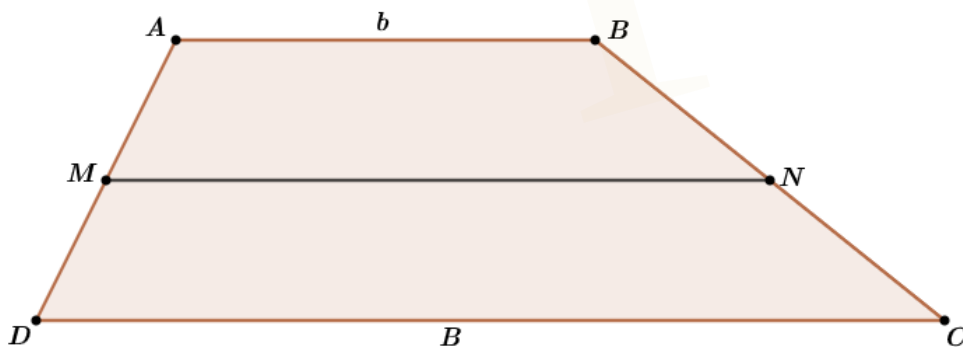


No triângulo BDE retângulo, temos que a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos.



3.2) Propriedades

BASE MÉDIA

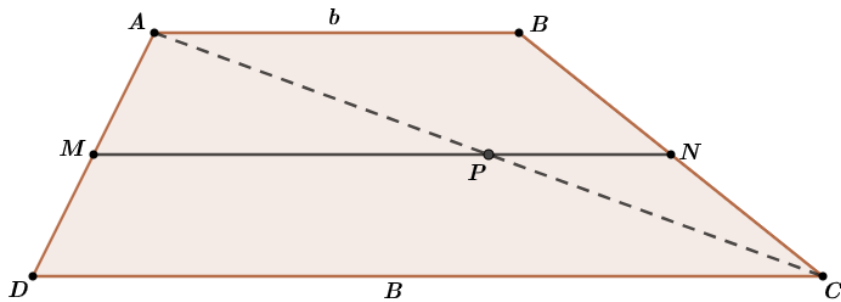


Sejam M e N pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ respectivamente.

$$\overline{MN} = \frac{B + b}{2}$$

(Demonstração)

Tracemos uma das diagonais do trapézio e chamemos de P a intersecção desta diagonal com a base média MN.



Com efeito, MP é base média do triângulo ACD e, portanto, $\overline{MP} = \frac{B}{2}$.

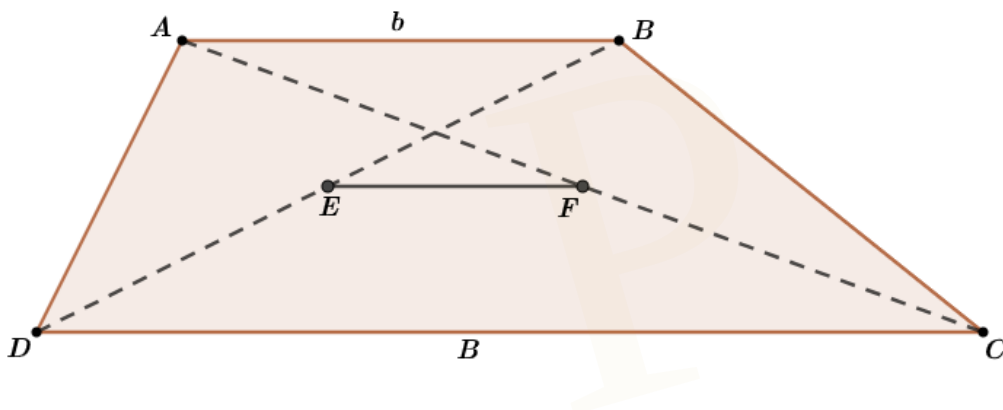
Analogamente PN é base média do triângulo ABC e, portanto, $\overline{NP} = \frac{b}{2}$.

Como $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{NP}$, concluímos que $\overline{MN} = \frac{B+b}{2}$.

■

MEDIANA DE EULER

É o segmento que conecta os pontos médios das diagonais.

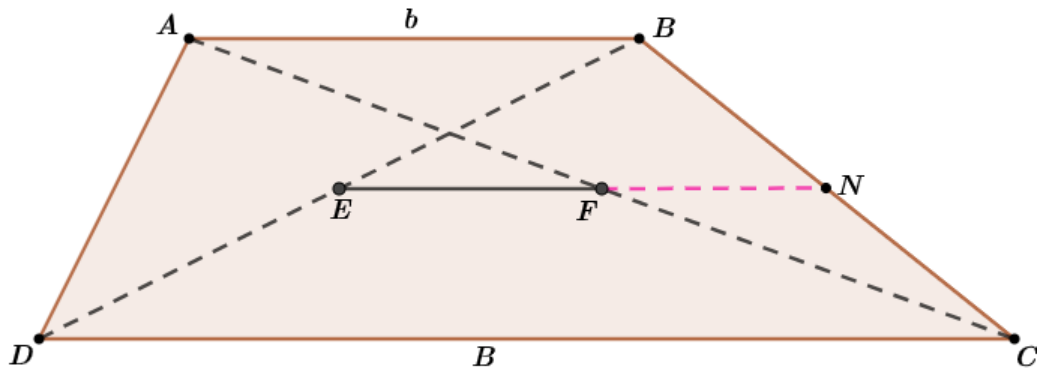


Sejam E e F pontos médios das diagonais BD e AC, respectivamente.

$$\boxed{\overline{EF} = \frac{B - b}{2}}$$

(Demonstração)

Vamos prolongar EF até encontrar o lado não paralelo BC em N (médio).



Com efeito, EM é base média do triângulo BDC e, portanto, $\overline{EN} = \frac{B}{2}$.

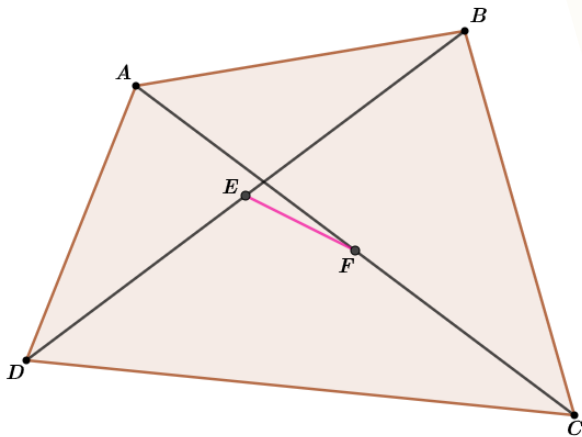
Analogamente FN é base média do triângulo ABC e, portanto, $\overline{FN} = \frac{b}{2}$.

Como $\overline{EF} = \overline{EN} - \overline{FN}$, concluímos que $\overline{EF} = \frac{B-b}{2}$.

■

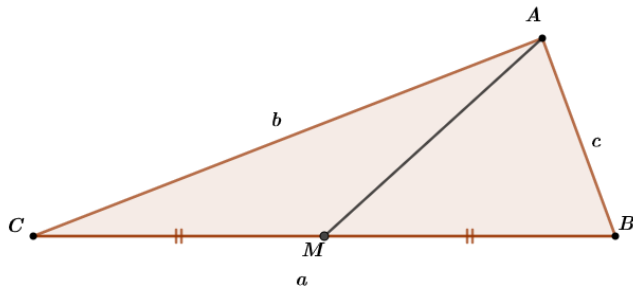
MEDIANA DE EULER PARA QUADRILÁTEROS CONVEXOS

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Os pontos E e F são médios das diagonais AC e BD , respectivamente.



$$4 \cdot EF^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

A ideia da demonstração consiste em traçar B e D em F , e utilizar a relação de mediana que segue:



$\overline{AM}$: mediana relativa ao lado a

M : ponto médio de BC

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

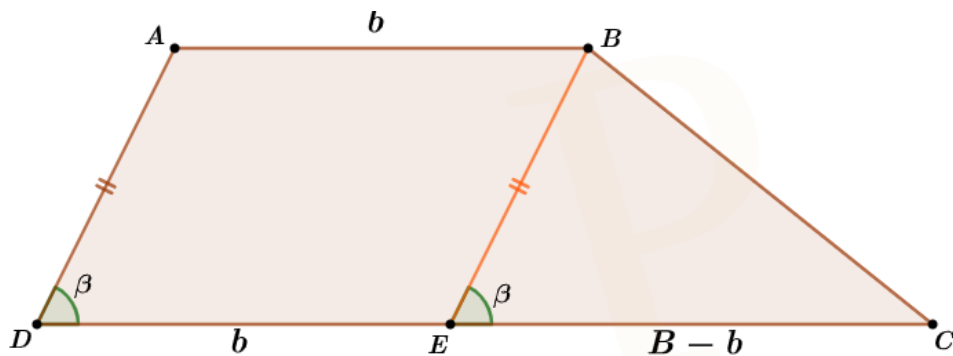
Ou ainda,

$$4 \cdot AM^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

4) Estratégias de construção

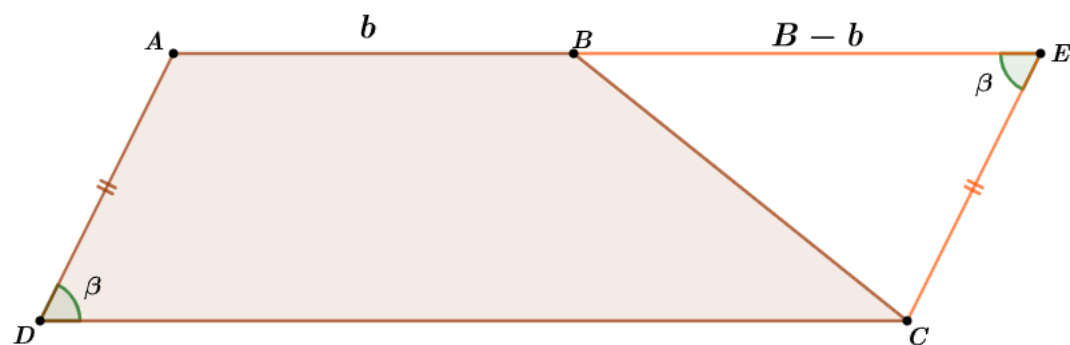
Abaixo, vamos expor alguns movimentos auxiliares para a resolução de problemas.

4.1) Construção interna

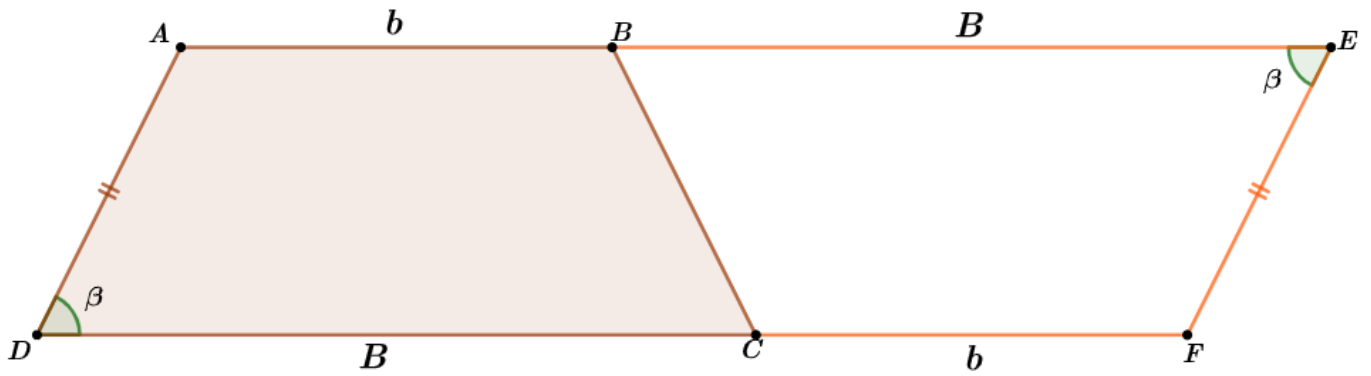


Traçar BE paralelo a AD. ABED é um paralelogramo.

4.2 Construção externa

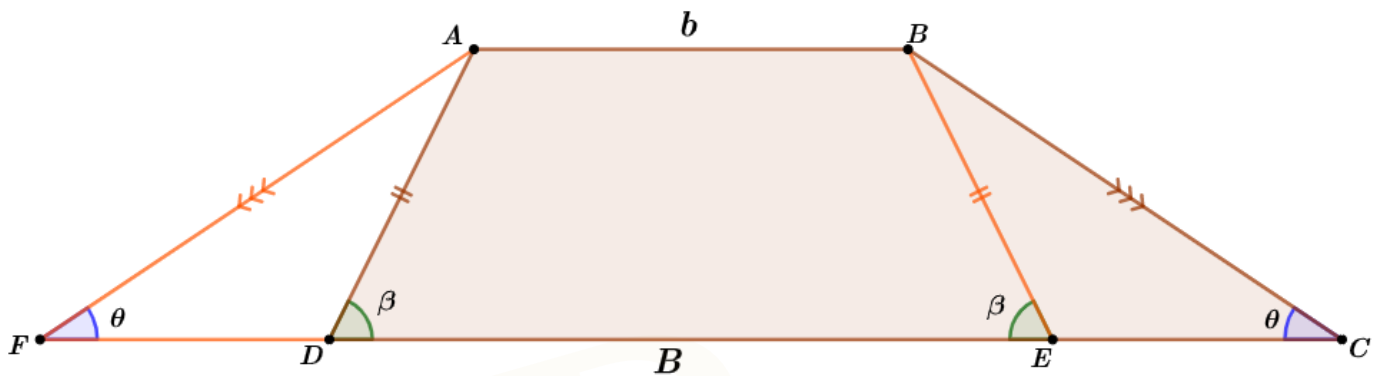


Traçar CE paralelo a AD. AECD é um paralelogramo.



Prolongar B até F, de modo que CF seja igual a b.

Prolongar b até E, de modo que BE seja igual a B.



Construir AF de modo que o trapézio ABCF seja isósceles.

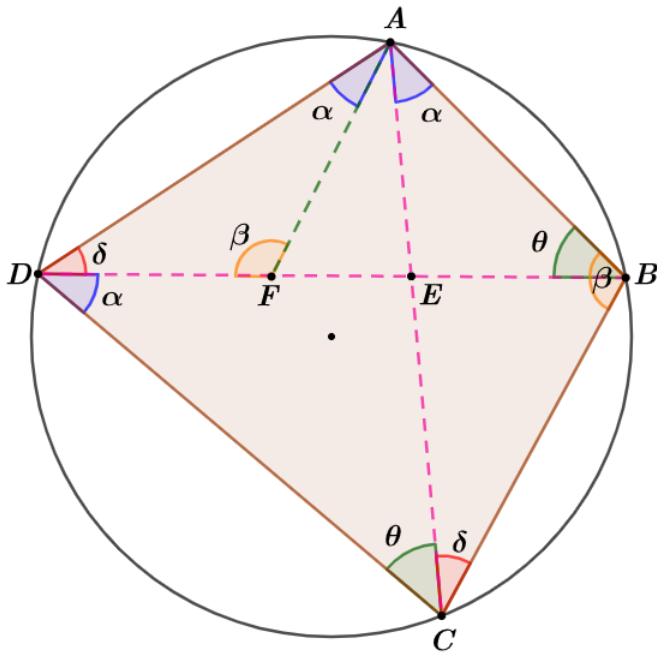
Construir BE de modo que o trapézio ABED seja isósceles.

5) O teorema de Ptolomeu

Num quadrilátero ABCD inscritível, vale:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$$

(Demonstração)



Tracemos AF (isogonal de AC em relação a AB e AD). Note que os triângulos AFD e ABC são **semelhantes**. Com efeito,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BC}} \quad (i)$$

Temos ainda AFB semelhante a ADC. Logo,

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (ii)$$

Isolando DF e FB e, somando ambas as equações temos:

$$\overline{DF} + \overline{FB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$$

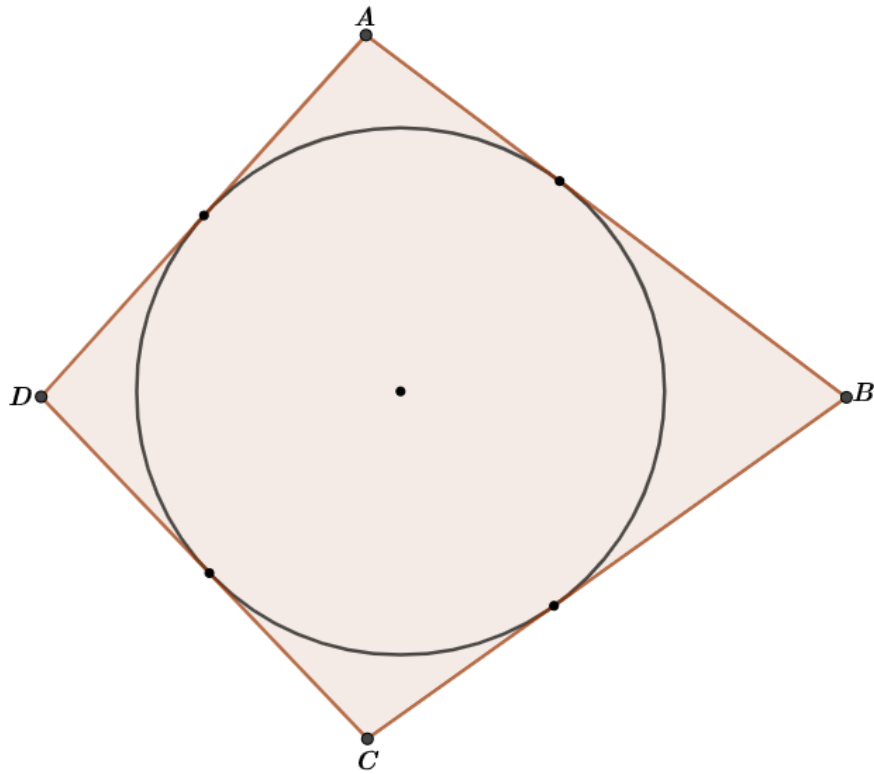
■

6) Teorema de Pitot

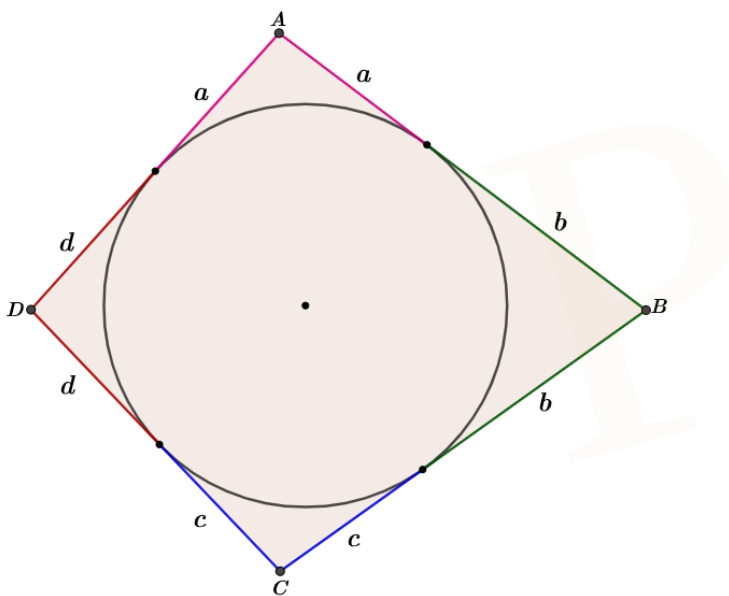
Em um quadrilátero tangencial — isto é, um quadrilátero cujos lados são tangentes a uma mesma circunferência inscrita — a soma dos comprimentos de dois lados opostos é igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados opostos.

Em termos algébricos, se $ABCD$ é um quadrilátero tangencial, então:

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}}$$



(Demonstração)



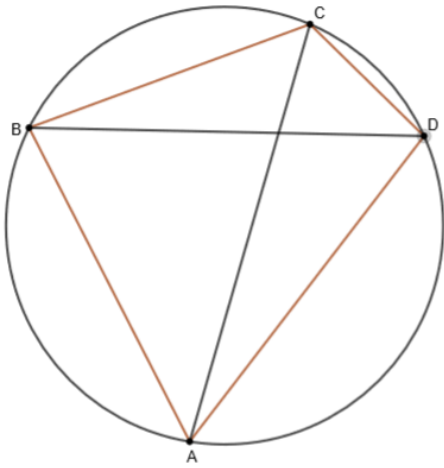
Pelo teorema dos segmentos tangentes, a demonstração é imediata.

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

■

7) Teorema de Hiparco

A razão das diagonais de um quadrilátero inscrito é a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais.



$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC \cdot CD + AB \cdot AD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}$$

(Demonstração)

A área do quadrilátero inscrito ABCD pode ser obtida da seguinte forma

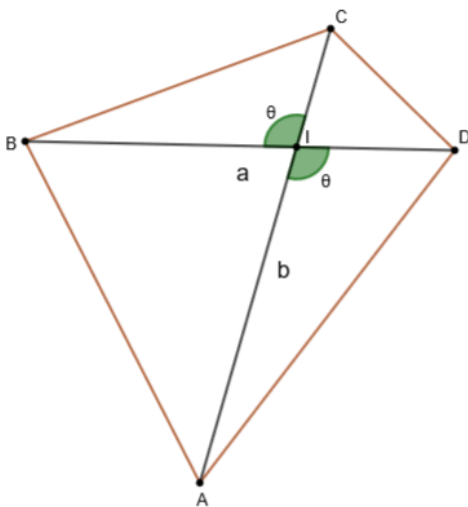
$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} + \frac{AC \cdot CD \cdot AD}{4R} &= \frac{BC \cdot CD \cdot BD}{4R} + \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4R} \Rightarrow \\ AC(AB \cdot BC + CD \cdot AD) &= BD \cdot (BC \cdot CD + AB \cdot AD) \Rightarrow \\ \therefore \frac{AC}{BD} &= \frac{BC \cdot CD + AB \cdot AD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD} \end{aligned}$$

■

8) Relações de áreas

8.1) Quadriláteros Convexos

Num quadrilátero convexo ABCD de diagonais $\overline{AC} = a$ e $\overline{BD} = b$, vale a seguinte relação.



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\theta)}{2}$$

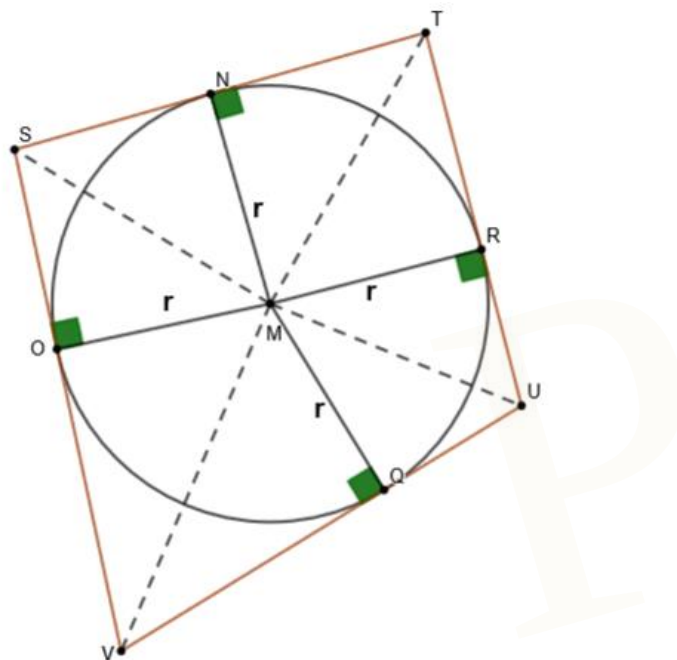
(Demonstração)

A área do quadrilátero pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{IB \cdot IC \cdot \text{Sen}(\theta)}{2} + \frac{IC \cdot ID \cdot \text{Sen}(\theta)}{2} + \frac{ID \cdot IA \cdot \text{Sen}(\theta)}{2} + \frac{IA \cdot IB \cdot \text{Sen}(\theta)}{2} \\
 &= \frac{\text{Sen}(\theta)}{2} \cdot (IB \cdot IC + IC \cdot ID + ID \cdot IA + IA \cdot IB) \\
 &= \frac{\text{Sen}(\theta)}{2} \cdot (IC(IB + ID) + IA(IB + ID)) \\
 &= \frac{\text{Sen}(\theta)}{2} \cdot (IC + IA)(IB + ID) \\
 &= \frac{\text{Sen}(\theta)}{2} \cdot (IB + ID) \cdot (IC + IA) \\
 \therefore S &= \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\theta)}{2}
 \end{aligned}$$

■

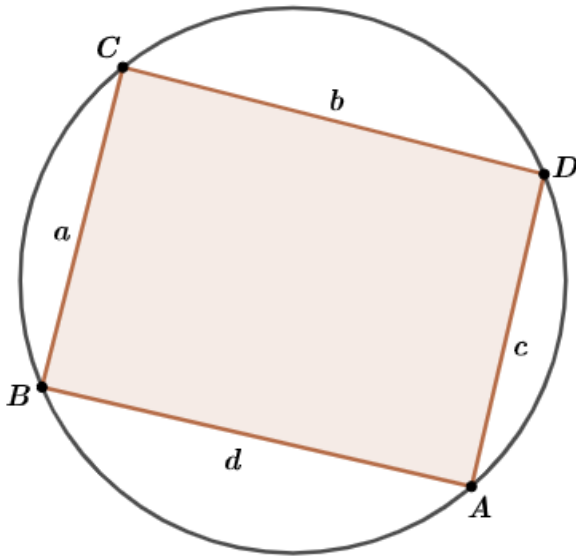
8.2 Quadrilátero Convexo Circunscritível



$$S = p \cdot r$$

Onde, p é o semiperímetro do quadrilátero

8.3 Quadrilátero Convexo inscritível



$$S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}$$

(Demonstração)

Tracemos a diagonal BD e apliquemos a lei dos cossenos em ABD e CBD.

$$\begin{cases} BD^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos(C) \\ BD^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot cd \cdot \cos(A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos(A) = c^2 + d^2 - 2 \cdot cd \cdot \cos(A)$$

Note que $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \cos(\hat{C}) = -\cos(\hat{A})$

$$\therefore \cos(A) = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)}$$

Somando uma unidade em cada membro da equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(A) &= \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)} + 1 = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab + 2cd}{2(ab + cd)} = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)} \\ &= \frac{(c + d + a - b)(c + d + b - a)}{2(ab + cd)} = \frac{(2p - 2b) \cdot (2p - 2a)}{2(ab + cd)} = \frac{2(p - b) \cdot (p - a)}{ab + cd} \\ \Rightarrow 1 + \cos(A) &= \frac{2(p - b) \cdot (p - a)}{ab + cd} \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p - b) \cdot (p - a)}{ab + cd}}$$

Como $1 - \cos(A) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$, temos:

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p - c) \cdot (p - d)}{ab + cd}}$$

A área do quadrilátero ABCD é igual a soma das áreas dos triângulos BCD e ABD:

$$S_{ABCD} = \frac{ab \cdot \text{Sen}(C)}{2} + \frac{cd \cdot \text{Sen}(A)}{2}$$

Como A e C são suplementares:

$$S_{ABCD} = \frac{(ab + cd) \cdot \text{Sen}(A)}{2}$$

Mas,

$$\text{Sen}(A) = 2 \cdot \text{Sen}\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\text{Logo, } S_{ABCD} = (ab + cd) \cdot \sqrt{\frac{(p-c) \cdot (p-d)}{ab+cd}} \cdot \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-a)}{ab+cd}}$$

$$\therefore S_{ABCD} = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}$$

■

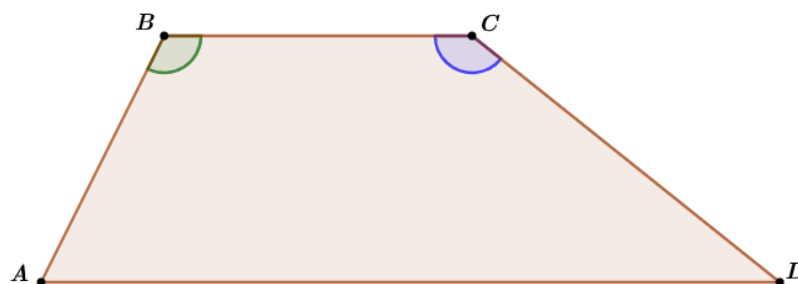
8.4 Quadrilátero Convexo inscrito e circunscritível

$$S_{ABCD} = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$

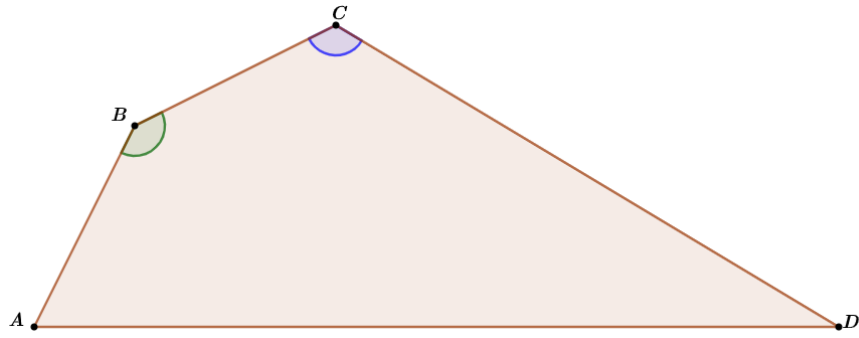
A demonstração do resultado acima pode ser obtida pelo teorema de Pitot.

-PROBLEMAS-

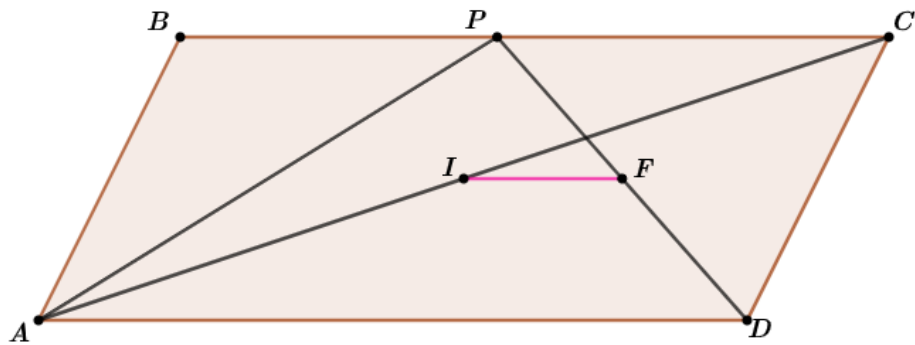
Problema 1. Em um trapézio os ângulos adjacentes à base menor medem $\hat{B} = 110^\circ$ e $\hat{C} = 140^\circ$, o comprimento entre as bases diferenciam-se em 10 cm. Calcule o comprimento de um dos lados não paralelos.



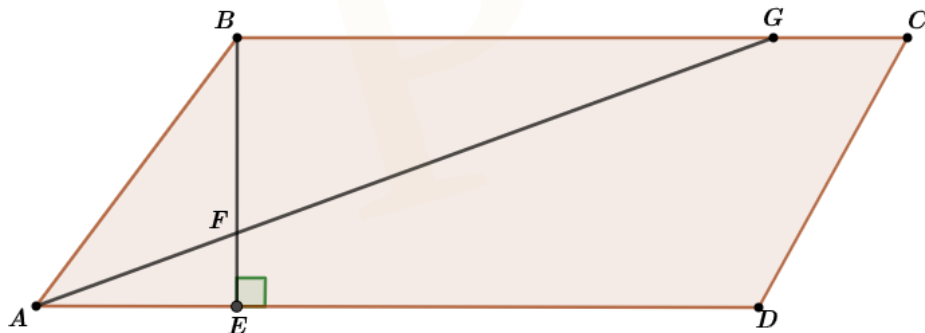
Problema 2. Considere um quadrilátero ABCD. Sabe-se que $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 150^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 14$. Determine o valor de $\overline{BC}$.



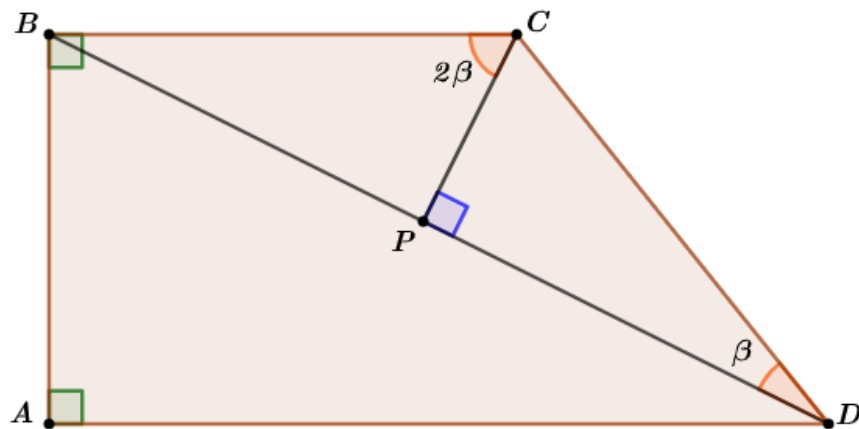
Problema 3. Se ABCD é um Paralelogramo, $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo A, $\overline{DF} = \overline{FP}$, $\overline{CI} = \overline{IA}$, $\overline{AB} = 9$. Determine o valor de $\overline{IF}$.



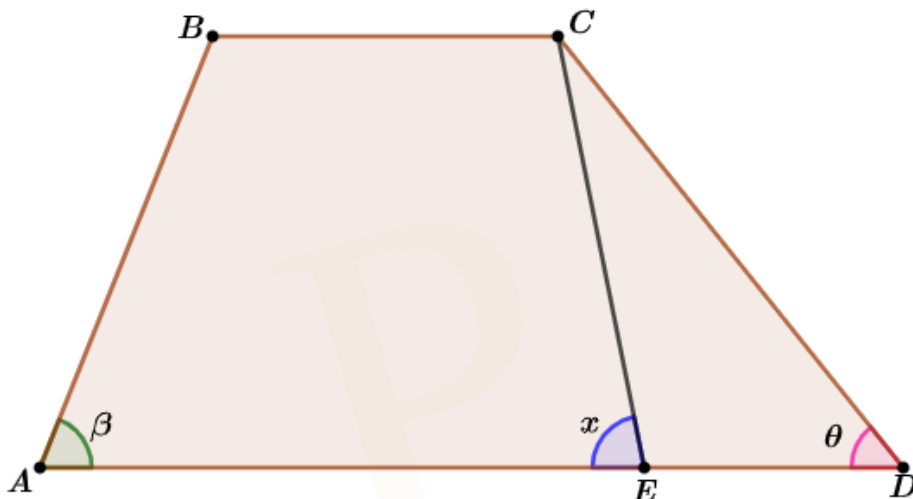
Problema 4. Num Paralelogramo ABCD: $B\hat{A}F = 2.F\hat{A}E$; $\overline{CD} = 6$; $\overline{BE} \perp \overline{AD}$. Determine a medida de $\overline{FG}$.



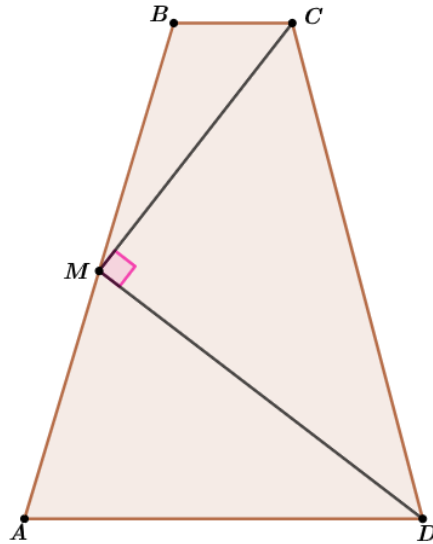
Problema 5. No trapézio abaixo, considere $\overline{AD} = 6$; $\overline{BC} = 4$ e $B\hat{C}P = 2.C\hat{D}P$. Diante dessas condições, determine o valor de $\overline{PC}$.



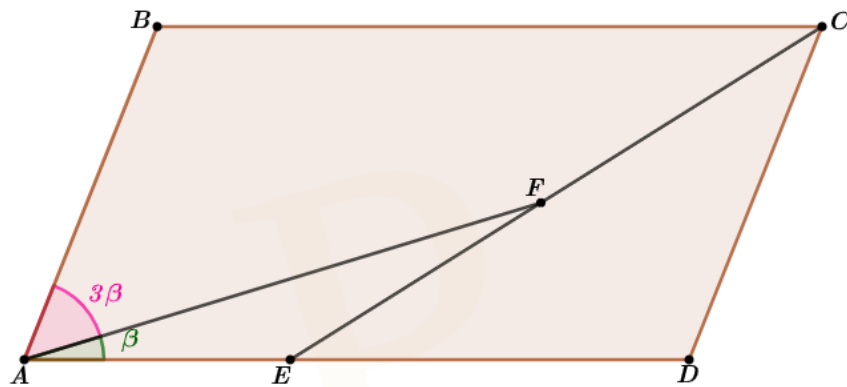
Problema 6. Determine o valor de x , sabendo que ABCD é um trapézio e que $\beta + \theta = 90^\circ$. São dados $\overline{AE} = 13$, $\overline{ED} = 1$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{EC} = 5$.



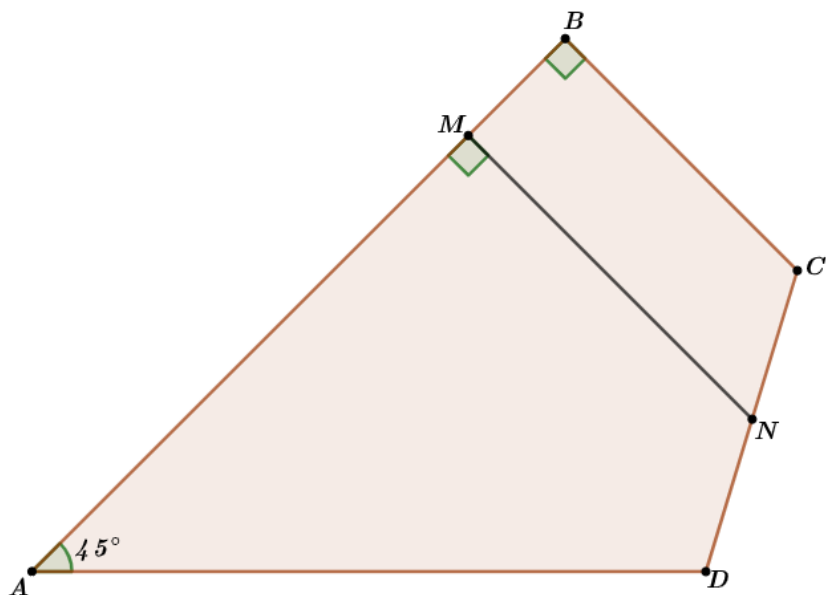
Problema 7. Considere o trapézio isósceles ABCD abaixo. Munido de: $\overline{CD} = 4$ e M ponto médio de $\overline{AB}$, determine o perímetro deste trapézio.



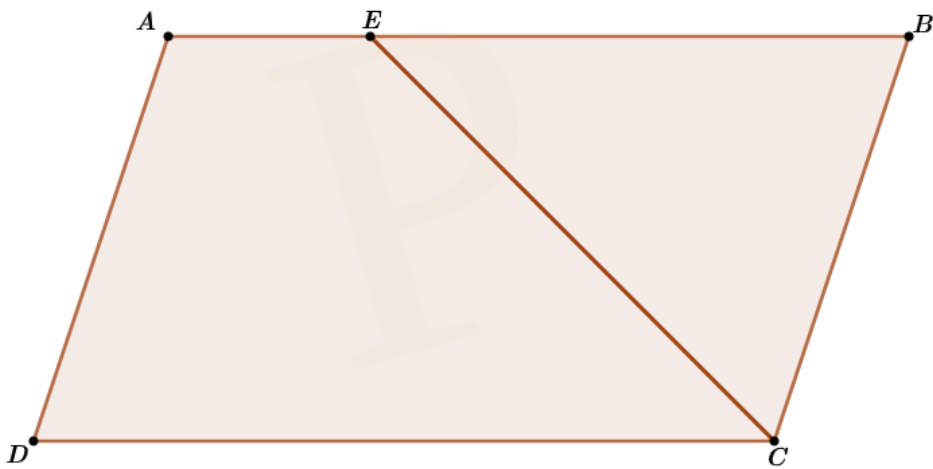
Problema 8. Seja $ABCD$ um paralelogramo, onde $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{CD} = \overline{ED}$ e $\widehat{FAB} = 3 \cdot \widehat{EAF}$. Encontre $\overline{EF}$.



Problema 9. Na figura mostrada, se $\overline{AB} = 20$, $\overline{MB} = 5$, $\overline{BC} = 6$, $\hat{A} = 45^\circ$ e N é médio de $\overline{CD}$, calcule o valor de $\overline{MN}$.



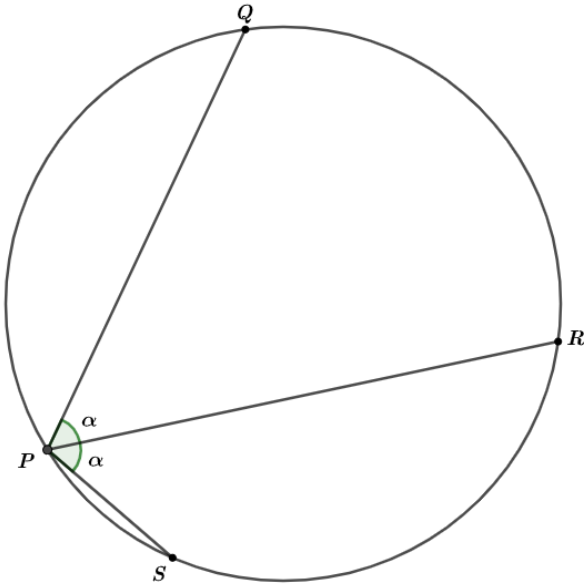
Problema 10. Considere o paralelogramo ABCD abaixo com as seguintes propriedades: $\overline{CE}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$, $\overline{AE} = 2$ e $\overline{AD} = 5$. Determine o perímetro deste paralelogramo.



Problema 11. O quadrado ABCD está inscrito em um círculo de raio 30. A corda $\overline{AM}$ intersecta a diagonal $\overline{BD}$ no ponto P. Se $\overline{AM} = 50$, determine o valor de $\overline{AP}$.

Problema 12. Na circunferência abaixo, considere os pontos P, Q, R e S, tal que:

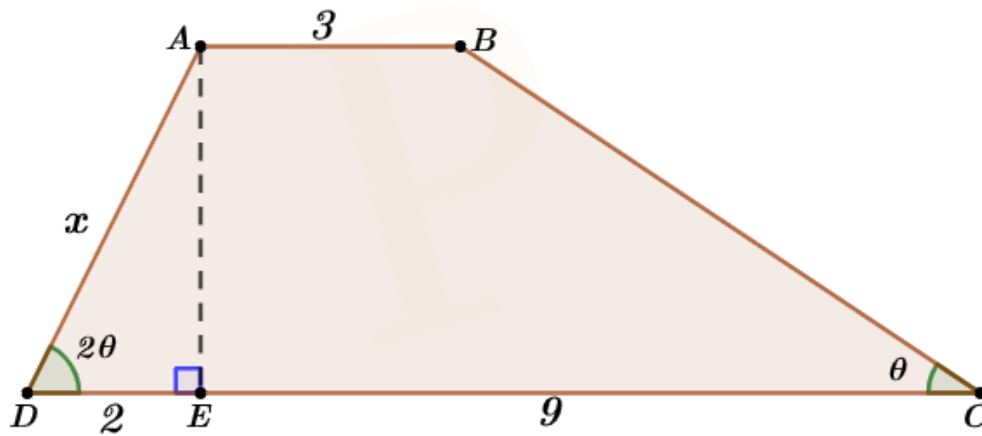
$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{PS}$$



Calcule o valor de α .

Problema 13. Calcule a área da circunferência inscrita num losango cuja área é igual a 20 cm^2 .

Problema 14. Considere o trapézio escaleno ABCD abaixo com $\overline{DE} = 2$, $\overline{EC} = 9$ e $\overline{AB} = 3$. Determine, diante das informações colocadas, o valor de x .

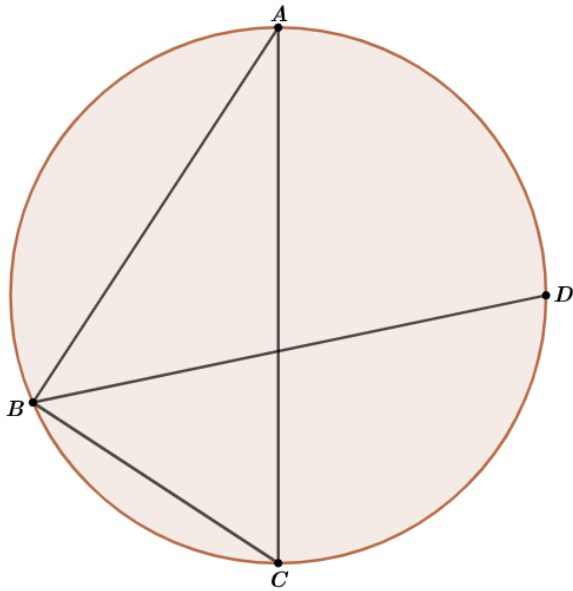


Problema 15. Determine os comprimentos das duas diagonais de um quadrilátero inscrito cujos lados medem 6, 4, 5 e 3, respectivamente.

Problema 16. A ceviana DQ do triângulo equilátero ADB é prolongada encontrando o circuncírculo em P. Mostre que:

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{AP} = \frac{1}{PQ}$$

Problema 17. Na figura $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 2$, $\overline{AC}$ é diâmetro e os ângulos $\widehat{ABD}$ e $\widehat{CBD}$ são congruentes. Calcule a medida da corda $\overline{BD}$.



Problema 18. Seja ABCD um quadrilátero qualquer onde os lados opostos não são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, calcule o maior valor inteiro possível para o segmento MN (com M médio de AD e N médio de BC).

QUESTÕES DE CONCURSOS

1. (Ime) Considere um trapézio de bases AB e CD, com o ponto I sendo a interseção de suas diagonais. Se as áreas dos triângulos AIB e CID formados pelas diagonais são 9cm^2 e 16cm^2 , respectivamente, a área do trapézio, em cm^2 , é:

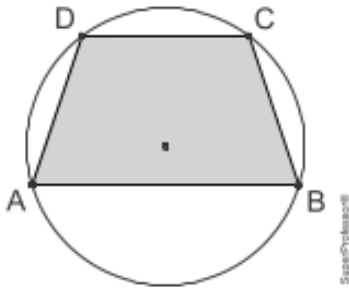
- a) Não é possível determinar por terem sido fornecidos dados insuficientes.
- b) 63
- c) 50
- d) 49
- e) 45

2. (Pucrj) Considere um quadrado ABCD de lado 1. Sejam E, F, G, H os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Trace os segmentos AF, BG, CH e DE, dividindo, assim, o quadrado original em quatro triângulos, quatro trapézios e um quadrado central.

Qual é o comprimento do lado do quadrado central assim obtido?

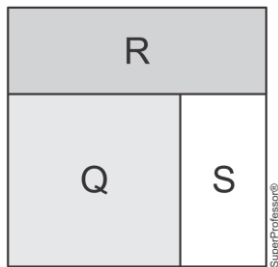
- a) $1/4$
- b) $1/\sqrt{5}$
- c) $1/2$
- d) $1/\sqrt{2}$

3. (Obmep) Na figura, ABCD é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16 cm, a base menor 10 cm e a altura 9 cm. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?



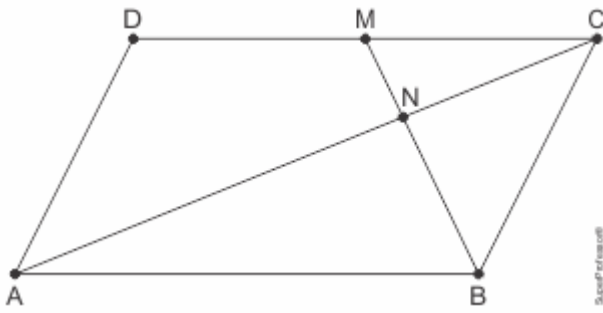
- a) $\frac{7}{3}$
- b) $\frac{25}{3}$
- c) $\frac{35}{3}$
- d) $\frac{40}{3}$
- e) $\frac{50}{3}$

4. (Obmep) A figura mostra um quadrado de lado 1 m dividido em dois retângulos e um quadrado. As áreas do quadrado Q e do retângulo R são iguais. Qual é a área do retângulo S?



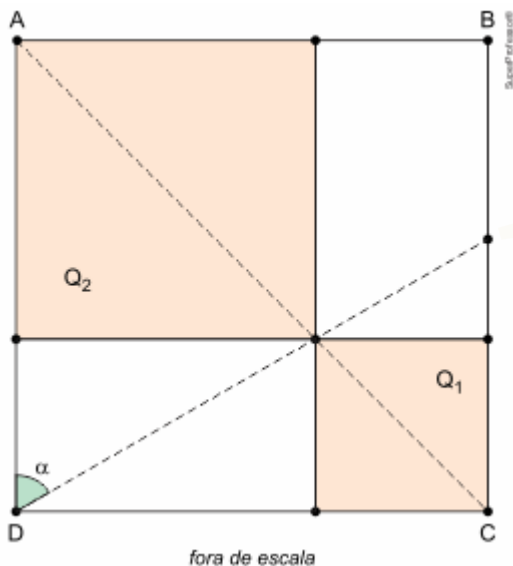
- a) $\sqrt{5} - 2 \text{ m}^2$
- b) $\frac{1}{5} \text{ m}^2$
- c) $3 - \sqrt{5} \text{ m}^2$
- d) $\frac{1}{3} \text{ m}^2$
- e) $\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ m}^2$

5. (Ufpr) Considere o paralelogramo ABCD ilustrado na figura abaixo. Sejam M o ponto médio do lado CD e N o ponto comum aos segmentos AC e BM. Sabendo que a medida do segmento AN é igual a $\frac{4}{3}$, assinale a alternativa que corresponde à medida da diagonal AC.



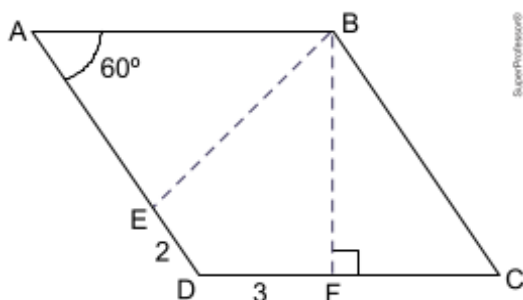
- a) 2
- b) 4
- c) $5/3$
- d) 3
- e) $8/3$

6. (Unifesp) Um quadrado ABCD foi dividido em dois retângulos, em um quadrado Q_1 e em um quadrado Q_2 , tal que a diagonal AC do quadrado passe pelo vértice em comum de Q_1 e Q_2 , conforme a figura.



- a) Se a área do quadrado Q_2 for o dobro da área do quadrado Q_1 , qual será o valor de $\tan \alpha$?
- b) Se a medida de α for igual a 60° e a área do quadrado Q_1 for 48 cm^2 , qual será o perímetro do quadrado ABCD?

7. (Unicamp) No losango abaixo, qual é a medida do comprimento do segmento BE?



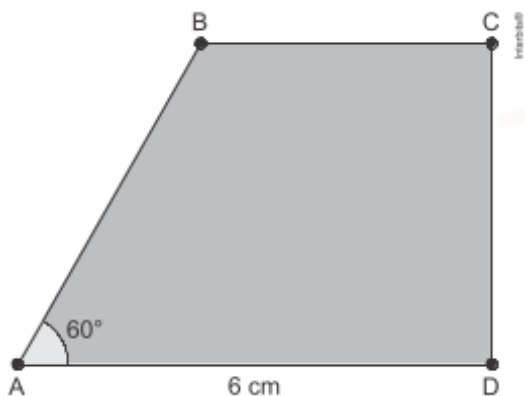
- a) $\sqrt{26}$.

- b) $\sqrt{27}$.
- c) $\sqrt{28}$.
- d) $\sqrt{29}$.

8. (Unicamp) Um círculo está inscrito em um quadrilátero ABCD. Seja T o ponto de tangência do lado DA com o círculo. Sabe-se que as medidas dos lados AB, BC e CD formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente de números inteiros e que a medida do lado DA é 3. Considerando que a medida do segmento TA é um número inteiro, as medidas dos lados AB, BC e CD são, respectivamente:

- a) 1, 3, 5.
- b) 2, 3, 4.
- c) 2, 4, 6.
- d) 3, 4, 5.

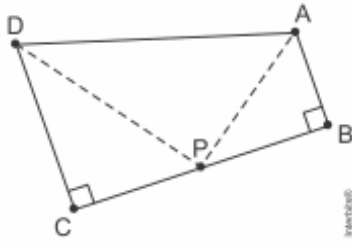
9. (FmJ) Em um trapézio retângulo ABCD, o lado AD mede 6cm e o ângulo BÂD mede 60° , conforme mostra a figura.



Sabendo-se que a diagonal AC mede $2\sqrt{13}cm$, a medida do lado AB desse trapézio é

- a) $\frac{9\sqrt{3}}{2}cm$
- b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}cm$
- c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$
- d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}cm$
- e) $\frac{6\sqrt{3}}{3}cm$

10. (G1 - col. naval) Observe a figura a seguir.



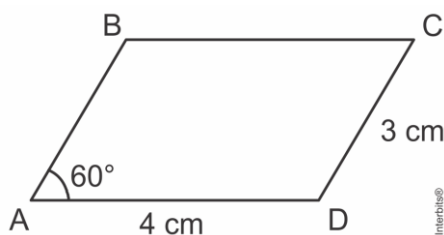
Ela apresenta um trapézio retângulo com bases AB e CD . Sabe-se também que as bissetrizes internas com vértices em A e em D e o lado BC , se intersectam em P . Sendo assim, analise as afirmações a seguir.

- (i) $\widehat{APD} = 90^\circ$
- (ii) $BP = CP$
- (iii) $AD^2 = BP^2 + CP^2$
- (iv) $AD = AB + CD$

São verdadeiras:

- a) i, ii e iii apenas
- b) i, ii e iv apenas
- c) i, iii e iv apenas
- d) ii, iii e iv apenas
- e) i, ii, iii e iv.

11. (G1 - col. naval) Analise a figura a seguir.

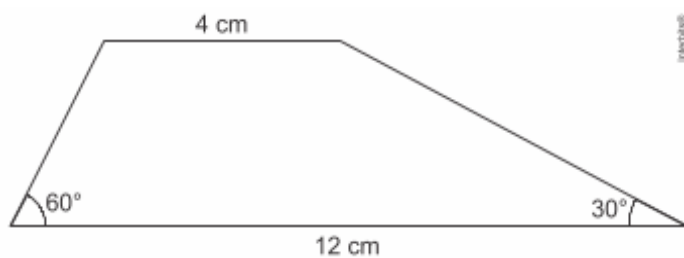


Essa figura representa o paralelogramo $ABCD$, cujas medidas dos lados são $AB = CD = 3\text{ cm}$ $BC = AD = 4\text{ cm}$ e $\hat{A} = 60^\circ$. Do vértice D traça-se a altura DH relativa ao lado AB , que encontra a diagonal AC no ponto I . Determine, em cm , a medida DI e marque a opção correta.

- a) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

- b) $\frac{7}{3}$
- c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
- d) $\frac{9}{5}$
- e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

12.(Uefs)



O trapézio representado na figura tem bases medindo 12cm e 4cm , e os ângulos internos da base maior medem 60° e 30° .

Seu perímetro, em cm , é igual a

- a) $16 + 4\sqrt{2}$
- b) $16 + 4\sqrt{3}$
- c) $20 + 3\sqrt{2}$
- d) $20 + 4\sqrt{2}$
- e) $20 + 4\sqrt{3}$

13. (Unesp) Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem $9,4\text{km}$ e $5,7\text{km}$, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio.



Se o ângulo XYZ é o dobro do ângulo XWZ , a medida, em km, do lado YZ que fica à margem do rio é:

- a) 7,5.
- b) 5,7.
- c) 4,7.
- d) 4,3.
- e) 3,7

14. (Ime) Seja I o incentro do triângulo ABC e L a interseção da semi-reta AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , com A e L distintos.

Dado que $AB + AC = 2\widehat{BC}$, o valor de $\frac{BL}{AL}$ é

- a) $\frac{1}{2}$
- b) 1
- c) $\frac{3}{2}$
- d) 2
- e) $\frac{5}{2}$

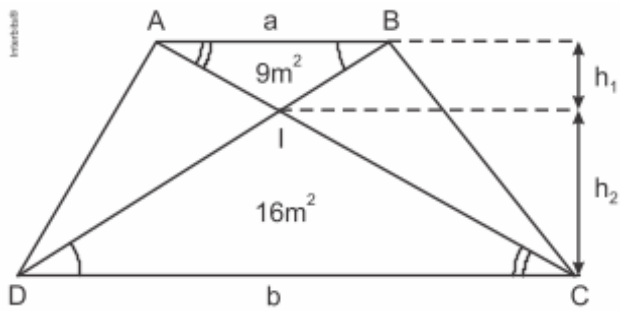
15. (Ita) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 e a diferença dos outros dois lados é igual a 2. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, calcule $(a+r)$.

GABARITO

Resposta da questão 1:

[D]

Aplicando semelhança nos triângulos ABI e CDI da figura abaixo, obtemos:



$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow a = \frac{3b}{4}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow h_1 = \frac{3h_2}{4}$$

Logo:

$$A_{ABCD} = \frac{(a+b) \cdot (h_1 + h_2)}{2}$$

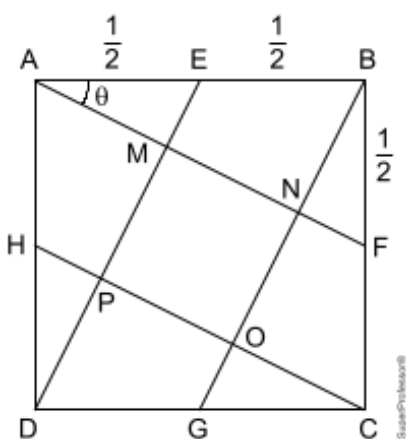
$$A_{ABCD} = \frac{\frac{7b}{4} \cdot \frac{7h_2}{4}}{2} = \frac{49}{16} \cdot \underbrace{\frac{bh_2}{2}}_{16m^2}$$

$$\therefore A_{ABCD} = 49m^2$$

Resposta da questão 2:

[B]

Da figura abaixo, obtemos:



No triângulo ABF:

$$\overline{AF}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{AF} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

No triângulo AEM:

$$\text{cos}\theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\overline{AM}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\overline{EM}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\overline{EM}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \overline{EM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

Como os triângulos AEM e BNF são congruentes, $\overline{NF} = \overline{EM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. Sendo assim, comprimento do lado do quadrado central vale:

$$\overline{MN} = \overline{AF} - \overline{AM} - \overline{NF}$$

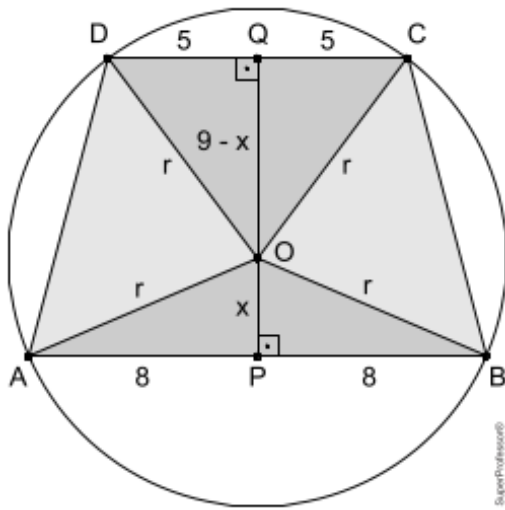
$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}}{10}$$

$$\therefore \overline{MN} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Resposta da questão 3:

[B]

Da figura abaixo, obtemos:



$$\begin{cases} r^2 = x^2 + 8^2 \\ r^2 = (9-x)^2 + 5^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 64 = 81 - 18x + x^2 + 25$$

$$\Rightarrow 18x = 42 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

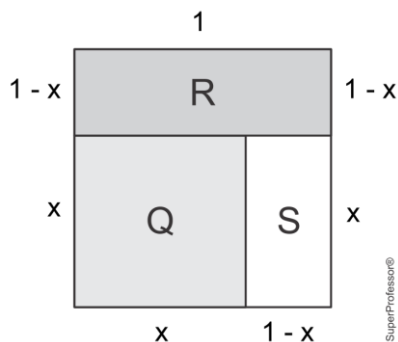
$$r = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + 64} = \sqrt{\frac{625}{9}}$$

$$\therefore r = \frac{25}{3} \text{ cm}$$

Resposta da questão 4:

[A]

Sendo x o lado do quadrado Q, temos:



$$\begin{aligned} A_Q &= A_R \\ x^2 &= 1 \cdot (1-x) \\ x^2 + x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Logo:

$$A_S = x \cdot (1 - x) = x - x^2 = x - (1 - x) = 2x - 1$$

$$A_S = 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - 1$$

$$\therefore A_S = \sqrt{5} - 2m^2$$

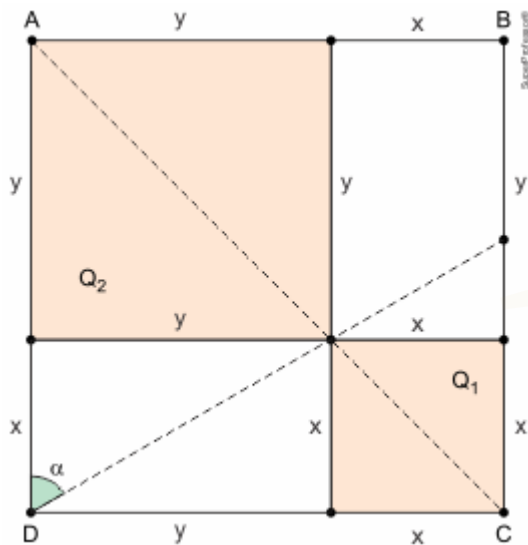
Resposta da questão 5:

[A]

Considerando a semelhança de triângulos, $\Delta ABN \sim \Delta CMN$ e que $AB = 2CM$ temos, $\frac{AN}{AB} = \frac{CN}{CM} \rightarrow \frac{\frac{4}{3}}{2x} = \frac{CN}{x} \rightarrow CN = \frac{2}{3}$. Assim, $AC = AN + NC = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Resposta da questão 6:

a) Sendo x e y , respectivamente, os lados do quadrado Q_1 e Q_2 , da relação entre as áreas, obtemos:



$$y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2}$$

Portanto, a tangente de α é igual a:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} = \frac{x\sqrt{2}}{x} \\ \therefore \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Medida do lado de Q_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{y}{x} \\ \sqrt{3} &= \frac{y}{\sqrt{48}} \\ y &= 12\text{cm} \end{aligned}$$

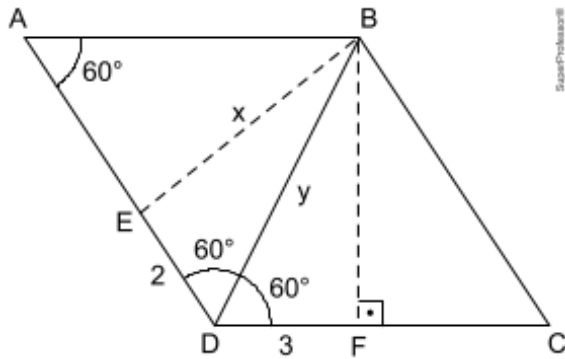
Logo, o perímetro do quadrado ABCD vale:

$$\begin{aligned} 2p &= 4(12 + \sqrt{48}) = 4(12 + 4\sqrt{3}) \\ \therefore 2p &= 16(3 + \sqrt{3})\text{cm} \end{aligned}$$

Resposta da questão 7:

[C]

Os ângulos $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ABD}$ são iguais, pois $\overline{AD} = \overline{AB}$. Como $\widehat{DAB} = 60^\circ$, devemos ter $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 60^\circ$. Analogamente, $\widehat{BDC} = 60^\circ$. No triângulo BDF, temos:



$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{3}{y} \\ y &= 6\end{aligned}$$

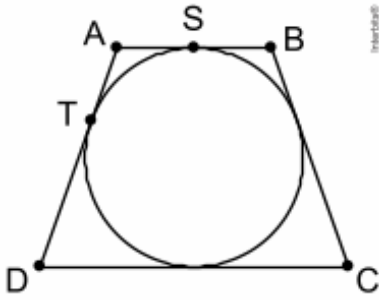
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BDE, chegamos a:

$$\begin{aligned}x^2 &= 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ \\ x^2 &= 4 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \\ x^2 &= 28 \\ \therefore x &= \sqrt{28}\end{aligned}$$

Resposta da questão 8:

[B]

Considere a figura, em que $\overline{AD} = 3$.



Se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ constituem uma progressão aritmética crescente, então

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 2 \cdot \overline{BC}.$$

Ademais, pelo Teorema de Pitot, sabemos que

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + 3.$$

Logo, vem

$$2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} + 3 \Leftrightarrow \overline{BC} = 3$$

e, portanto,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 6.$$

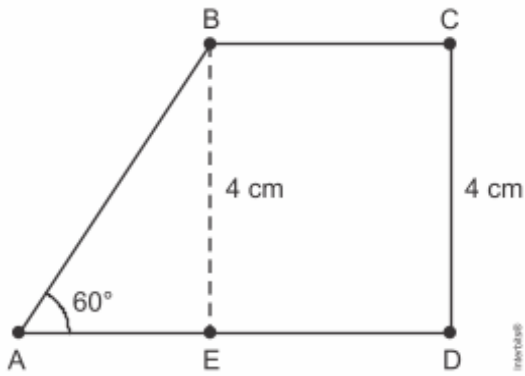
Finalmente, como $\overline{AT} \in \mathbb{Z}$, $\overline{AT} = \overline{AS}$ e $1 \leq \overline{AS} < \overline{AB} < \overline{BC}$, segue que $\overline{AB} = 2$ e, assim, $\overline{CD} = 4$.

Resposta da questão 9:

[D]

Cálculo do lado CD:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{13})^2 &= 6^2 + C^2 \\ CD &= \sqrt{52 - 36} = \sqrt{16} \\ CD &= 4cm \end{aligned}$$



Como $BE = CD$, temos:

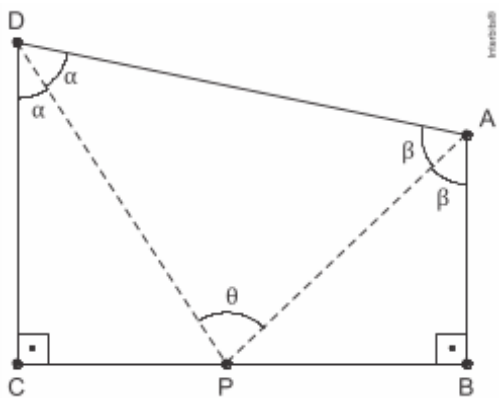
$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{BE}{AB} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{4}{AB} \\ \therefore AB &= \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}\end{aligned}$$

Resposta da questão 10:

[B]

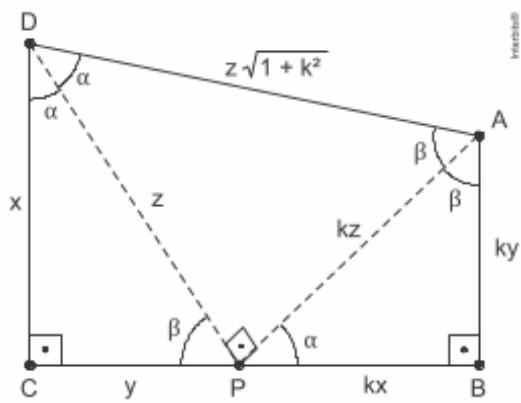
Analisando as afirmativas:

[i] Verdadeira. Pela soma dos ângulos internos dos polígonos, obtemos:



$$\begin{aligned}2\alpha + 2\beta + 90^\circ + 90^\circ &= 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha + \beta + \theta &= 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ\end{aligned}$$

[ii] Verdadeira. Dado que $\theta = 90^\circ$, podemos aplicar a semelhança entre os triângulos:



$$\triangle DCP \sim \triangle DPA: \frac{x}{z} = \frac{z}{z\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sqrt{1+k^2} = \frac{z}{x} \frac{y}{kz} = \frac{z}{z\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \frac{y}{kz} = \frac{z}{z \cdot \frac{z}{x}} \Rightarrow y = kx$$

[iii] Falsa. Utilizando os valores do item anterior, chegamos a:

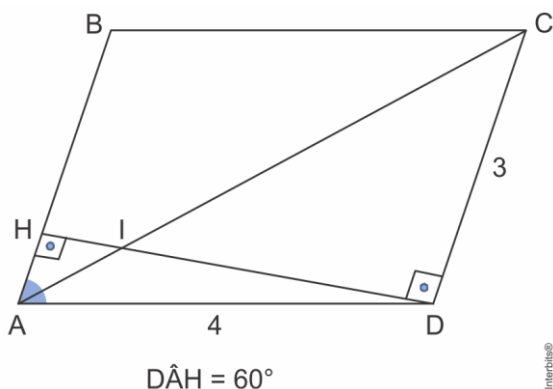
$$\begin{aligned} AD^2 &= (z\sqrt{1+k^2})^2 = (x\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{1+k^2})^2 = x^2(1+k^2)^2 \\ BP^2 + CP^2 &= (kx)^2 + y^2 = k^2x^2 + k^2x^2 = 2k^2x^2 \\ \therefore AD^2 &\neq BP^2 + CP^2 \end{aligned}$$

[iv] Verdadeira. Novamente utilizando os valores anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned} AD &= z\sqrt{1+k^2} = x\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{1+k^2} = x + k^2x \\ AB + CD &= ky + x = k^2x + x \\ \therefore AD &= AB + CD \end{aligned}$$

Resposta da questão 11:

[A]



No $\triangle ADH$:

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{DH}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DH}{4} \Rightarrow DH = 2\sqrt{3} \text{ cm} \\ \cos 60^\circ &= \frac{AH}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2 \text{ cm}\end{aligned}$$

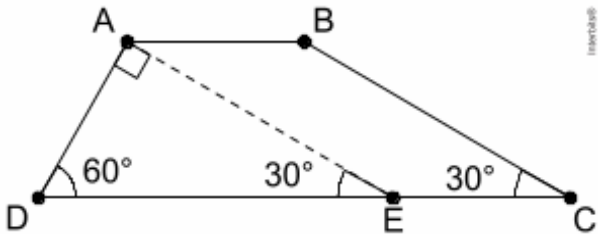
Sabemos que $\Delta A H I \sim \Delta C D I$, portanto:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3} - DI}{DI} \Rightarrow 2DI = 6\sqrt{3} - 3DI \Rightarrow 5DI = 6\sqrt{3} \Rightarrow DI = \frac{6\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

Resposta da questão 12:

[E]

Considere a figura, em que $AE \parallel BC$.



Sendo $\overline{CD} = 12 \text{ cm}$ e $\overline{EC} = 4 \text{ cm}$, temos $\overline{DE} = \overline{CD} - \overline{EC} = 8 \text{ cm}$. Ademais, $AE \parallel BC$ implica em $\widehat{AED} = 30^\circ$, pois $\widehat{BCE}$ e $\widehat{AED}$ são ângulos correspondentes. Logo, como $\widehat{ADE} = 60^\circ$, vem $\widehat{DAE} = 90^\circ$.

Por conseguinte, do triângulo ADE , encontramos

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4 \text{ cm}$$

e

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

A resposta é $2p_{ABCD} = (20 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}$.

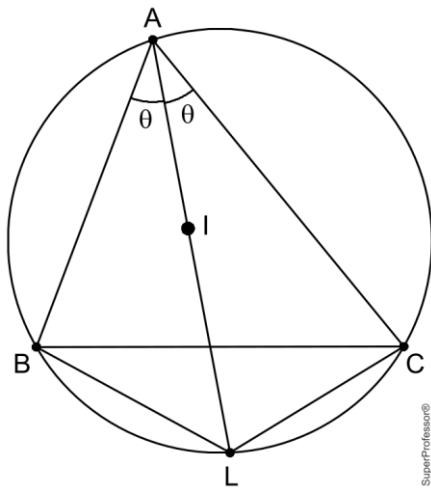
Resposta da questão 13:

[E]

Resposta da questão 14:

[A]

Como I é incentro, $\overline{AL}$ é bissetriz e $\overline{BL} = \overline{CL}$



Aplicando o teorema de Ptolomeu:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CL} + \overline{AC} \cdot \overline{BL} = \overline{AL} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BL} + \overline{AC} \cdot \overline{BL} = \overline{AL} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BL} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{AL} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BL} \cdot 2\overline{BC} = \overline{AL} \cdot \overline{BC}$$

$$\therefore \frac{\overline{BL}}{\overline{AL}} = \frac{1}{2}$$