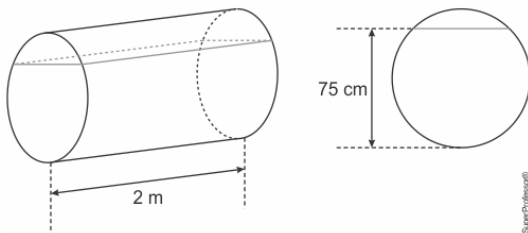


REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX

1. A ressonância magnética (RM) é um exame de imagem que usa campos magnéticos e ondas de rádio para criar imagens detalhadas de órgãos, tecidos e ossos do corpo sem usar radiação ionizante. É utilizada para diagnosticar e monitorar diversas condições, como tumores, doenças neurológicas e problemas musculares. Durante o exame, o paciente deita-se em uma maca, a qual se move para dentro de um aparelho em forma de cilindro, devendo permanecer imóvel para se obter imagens nítidas. Um aparelho de RM com diâmetro medindo 1m e comprimento de 2 m precisa passar por uma manutenção preventiva e para isso será preenchido por um líquido especial até a altura de 75 cm, como ilustra a Figura.



Utilizando $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1,7$, marque a alternativa que contém o volume exato, em litros, do líquido especial que será utilizado na manutenção desse aparelho de RM.

- a) 850 litros.
- b) 1.212,5 litros.
- c) 1.500 litros.
- d) 2.550 litros.

2. Uma esfera está circunscrita a um cone circular reto equilátero. Se a medida do raio da base do cone é igual a $2\sqrt{3}$ cm, então, a medida do volume da esfera, em cm^3 , é igual a

Nota: Um cone circular reto é equilátero quando a medida de sua geratriz é igual à medida de diâmetro de sua base.

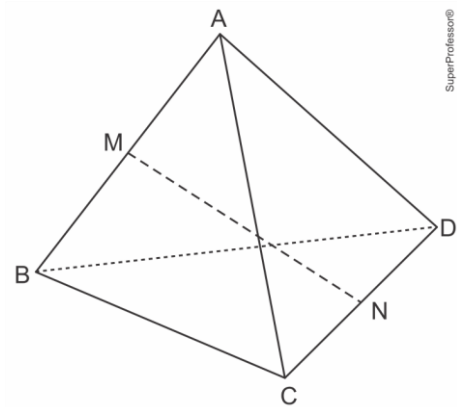
- a) $\frac{192}{3}\pi$
- b) $\frac{212}{3}\pi$
- c) $\frac{242}{3}\pi$
- d) $\frac{256}{3}\pi$

3. (Uece) Um cone circular reto, cuja medida da altura é h metros e a medida do raio da base é R metros, é seccionado por um plano paralelo ao plano que contém a base e que dista $\frac{h}{2}$ metros desta base, ficando dividido em duas partes. A

razão entre o volume da parte que contém o vértice do cone inicial e a outra parte é igual a

- a) $\frac{1}{21}$.
- b) $\frac{1}{14}$.
- c) $\frac{1}{7}$.
- d) $\frac{1}{5}$.

4. A figura abaixo indica um tetraedro regular ABCD de aresta 6 cm. M e N são pontos médios das arestas AB e CD, respectivamente.

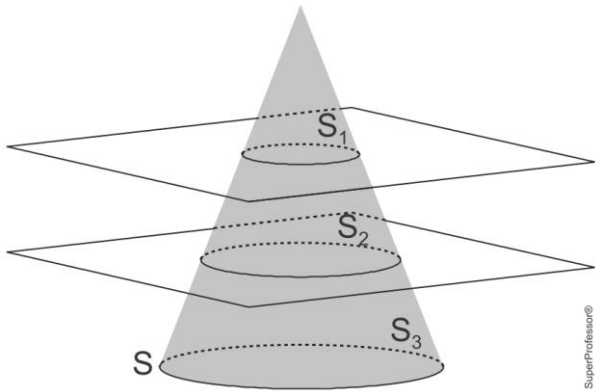


Na situação descrita, a medida de MN, em centímetros, é igual a

- a) $4\sqrt{3}$
- b) $4\sqrt{2}$
- c) $3\sqrt{3}$
- d) $3\sqrt{2}$
- e) $2\sqrt{2}$

5. Um cone circular reto S é dividido por dois planos paralelos à sua base, formando três sólidos S_1 , S_2 , S_3 , conforme a figura abaixo. Os volumes de S_1 , S_2 e S_3 , nessa ordem, estão em progressão geométrica com razão $q > 1$. O quociente entre o raio do cone S e o raio do cone menor S_1 é igual a $\sqrt[3]{7}$. Assinale a alternativa que corresponde à razão q .

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX



c) $\frac{6241}{25}$

d) $\frac{4772}{16}$

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 7

6. Um poliedro regular tem exatamente 12 arestas, mais faces do que vértices e $36\sqrt{3}\text{dm}^2$ de área total. Determine, em decímetros cúbicos, o volume da esfera que circunscreve esse poliedro.

- a) $9\pi\text{dm}^3$
- b) $12\pi\text{dm}^3$
- c) $36\pi\text{dm}^3$
- d) $54\pi\text{dm}^3$
- e) $108\pi\text{dm}^3$

7. Considere um tronco de pirâmide obtido de uma pirâmide quadrangular regular.

Por esse tronco, passa-se um plano α paralelo às bases gerando um quadrilátero de área $x\text{cm}^2$, tal que:

- a razão entre a distância da base menor do tronco ao plano α e a distância do plano α à base maior do tronco é igual a $\frac{3}{2}$;
- a área da base maior do tronco mede 441cm^2 ;
- a área da base menor do tronco mede 64cm^2 .

A área x do quadrilátero, em cm^2 , é igual a

- a) $\frac{8441}{64}$
- b) $\frac{12661}{81}$

8. Uma piscina localizada na cobertura de um edifício residencial possui, internamente, a forma de um paralelepípedo retangular, com base plana horizontal. Se as medidas das linhas diagonais das faces laterais e da base interna da piscina são, respectivamente, 5 m, $4\sqrt{2}\text{m}$ e 5 m, então a capacidade máxima de recebimento de água no interior da piscina, em litros, é de

Nota: 1 litro equivale a 1dm^3 .

- a) 25.000.
- b) 64.000.
- c) 36.000.
- d) 48.000.

9. Em um cone circular reto, que tem $240\pi\text{cm}^2$ de área lateral, as medidas do raio da base, da altura e da geratriz são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética. Se uma esfera pode ser inscrita nesse cone, então o raio dessa esfera mede

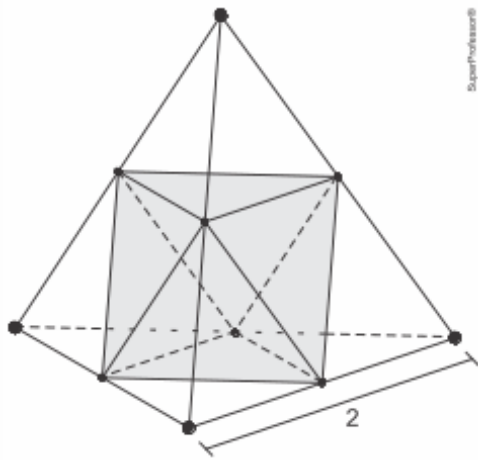
- a) 12 cm
- b) 6 cm
- c) $\frac{16}{3}\text{cm}$
- d) $\frac{48}{7}\text{cm}$
- e) 4 cm

10. A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 10 cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno de um eixo que contém a hipotenusa $30\pi\text{cm}^3$. O perímetro desse triângulo é, em cm, igual a

- a) $10 + 4\sqrt{7}$
- b) $10 + 5\sqrt{7}$
- c) $10 + 2\sqrt{10}$
- d) $10 + 3\sqrt{10}$
- e) $10 + 4\sqrt{10}$

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX

11. Considere um octaedro regular cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de aresta 2, conforme a figura abaixo.



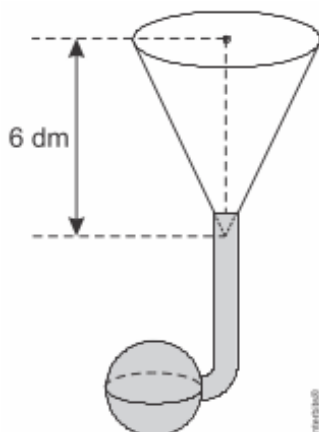
O volume do octaedro é

- a) $\frac{1}{4}$.
- b) $\frac{1}{2}$.
- c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- e) $\sqrt{2}$.

12. Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.

O conteúdo da caixa d'água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}}$ dm.



Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2 , é igual a

- a) 80
- b) 40
- c) 20
- d) 10

13. Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

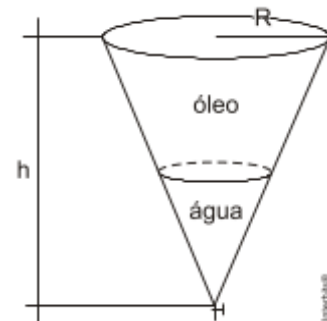


Figura fora de escala

- a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$
- b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$
- c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$
- d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$
- e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

14. Um cone de revolução tem altura 4cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1cm. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

- a) $\frac{1}{3}\pi$.

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX

b) $\frac{2}{3}\pi$.

c) $\frac{4}{3}\pi$.

d) $\frac{8}{3}\pi$.

e) 3π .

15. Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R , contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$

b) $\frac{3}{4}R$

c) $\frac{4}{9}R$

d) $\frac{1}{3}R$

e) $\frac{9}{16}R$

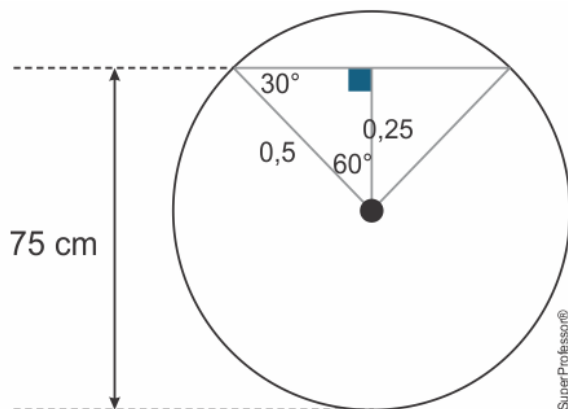
“Cada exercício que você resolve não é apenas uma questão a menos: é mais um passo entre aquilo que você sabe hoje e aquilo que será capaz de conquistar amanhã”

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX

Gabarito

Resposta da questão 1:

[B]



$$S_b = \frac{0,5^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} + \frac{240^\circ \cdot \pi \cdot 0,5^2}{360^\circ}$$

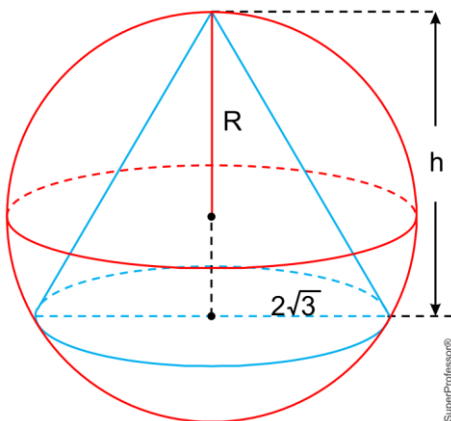
$$S_b = \frac{0,25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{3} \rightarrow S_b = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{2}$$

$$V = S_b \cdot H$$

$$V = \left(\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \rightarrow V = \frac{\sqrt{3} + 8}{8} = \frac{9,7}{8} = 1,2125 \text{ m}^3 = 1212,5 \text{ litros}$$

Resposta da questão 2:

[D]



A secção Meridiana de um cone equilátero é um triângulo equilátero, portanto a altura do cone equilátero será a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede o dobro do raio.

$$h = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6 \text{ cm}$$

O raio da esfera circunscrita no cone será dois terços da altura do cone.

$$R = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ cm}$$

O volume V da esfera será dado por:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{256 \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3$$

Resposta da questão 3:

[C]

O cone original tem volume:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

A seção é feita a $\frac{h}{2}$ da base. Isso forma um cone menor semelhante com altura $\frac{h}{2}$ e raio proporcional (também $\frac{R}{2}$.)

O volume do cone menor:

$$V_{\text{menor}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{24} \pi R^2 h$$

O volume do cone original corresponde a:

$$V_{\text{maior}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

A parte entre o cone menor e o original (tronco) tem volume:

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{maior}} - V_{\text{menor}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{24} \pi R^2 h = \frac{7}{24} \pi R^2 h$$

Razão dos volumes:

$$\frac{V_{\text{menor}}}{V_{\text{tronco}}} = \frac{\frac{1}{24} \pi R^2 h}{\frac{7}{24} \pi R^2 h} = \frac{1}{24} \cdot \frac{24}{7} = \frac{1}{7}$$

Resposta da questão 4:

[D]

Para facilitar, vamos colocar o tetraedro no espaço 3D com arestas 6 cm.

Um tetraedro regular pode ser representado com vértices:

$$A = (0, 0, 0), B = (6, 0, 0), C = (3, 3\sqrt{3}, 0).$$

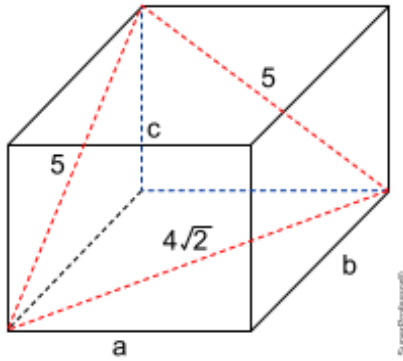
O ponto D fica acima do centro da base ABC.

O centro da base ABC é:

$$G = \left(\frac{0+6+3}{3}, \frac{0+0+3\sqrt{3}}{3}, 0 \right) = (3, \sqrt{3}, 0)$$

A altura h do tetraedro de aresta 6 é:

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX



Aplicando o teorema de Pitágoras nas faces deste paralelepípedo, temos as seguintes relações;

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 & \text{equação 1} \\ a^2 + c^2 = (5)^2 & \text{equação 2} \\ b^2 + c^2 = (5)^2 & \text{equação 3} \end{cases}$$

fazendo (equação 2 - equação 3), temos $a = b$. Substituindo $a = b$ na equação 1, obtemos: $a^2 + a^2 = 21 \Rightarrow a = b = 4$. Substituindo $a = 4$ na equação 2, obtemos: $4^2 + c^2 = (5)^2 \Rightarrow c = 3$.

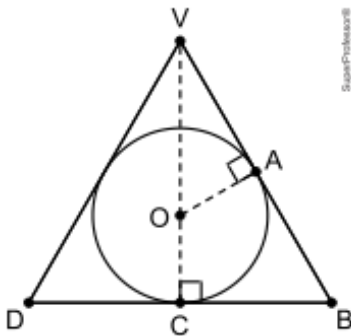
O volume da piscina será dado por:

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ V &= 4 \cdot 4 \cdot 3 \\ V &= 48\text{m}^3 \\ V &= 48.000\text{L} \end{aligned}$$

Resposta da questão 9:

[B]

Considere a figura, em que $VC = h$ é a altura do cone, $VB = g$ é a geratriz do cone, $BC = BA = R$ é o raio da base do cone e $OA = OC = r$ é o raio da esfera.



Se R, h e g constituem uma progressão aritmética, então $2h = R + g$. ou seja, $g = 2h - R$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned} h^2 + R^2 &= g^2 \Rightarrow h^2 + R^2 = (2h - R)^2 \\ &\Rightarrow h \cdot (3h - 4R) = 0 \\ &\Rightarrow h = \frac{4R}{3} \end{aligned}$$

Em consequência, temos

$$g = 2 \cdot \frac{4R}{3} - R \Leftrightarrow g = \frac{5R}{3}.$$

Sabendo que a área lateral do cone mede $240\pi\text{cm}^2$, encontramos

$$\begin{aligned} 240\pi &= \pi \cdot R \cdot g \Rightarrow 240 = R \cdot \frac{5R}{3} \\ &\Rightarrow R = 12\text{ cm.} \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$g = \frac{5 \cdot 12}{3} \Leftrightarrow g = 20\text{ cm}$$

e

$$h = \frac{4 \cdot 12}{3} \Leftrightarrow h = 16\text{ cm.}$$

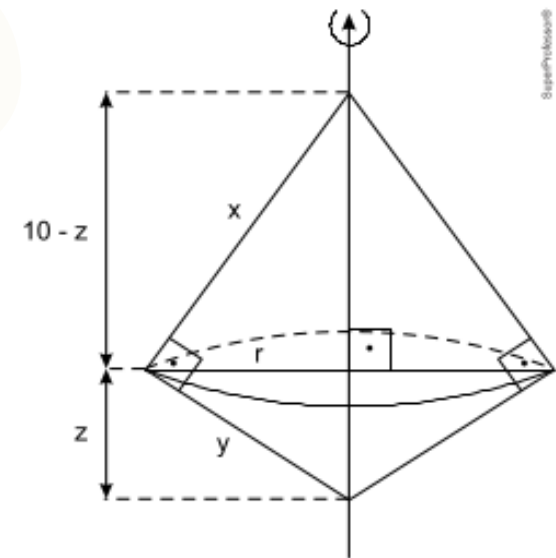
Finalmente, da semelhança dos triângulos VAO e VCB, temos

$$\begin{aligned} \frac{AO}{CB} &= \frac{AV}{CV} \Leftrightarrow \frac{r}{12} = \frac{8}{16} \\ &\Leftrightarrow r = 6\text{ cm.} \end{aligned}$$

Resposta da questão 10:

[E]

Do volume do sólido, obtemos:



$$\begin{aligned} \frac{\pi r^2(10 - z)}{3} + \frac{\pi r^2 z}{3} &= 30\pi \\ 10r^2 - r^2 z + r^2 z &= 90 \\ r &= 3\text{ cm} \end{aligned}$$

Das relações métricas no triângulo retângulo, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} xy = 10 \cdot 3 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2xy = 60 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} + \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy &= 160 \Rightarrow (x + y)^2 = 160 \\ \therefore x + y &= 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX

Portanto, o perímetro do triângulo vale $10 + 4\sqrt{10}\text{cm}$

Resposta da questão 11:

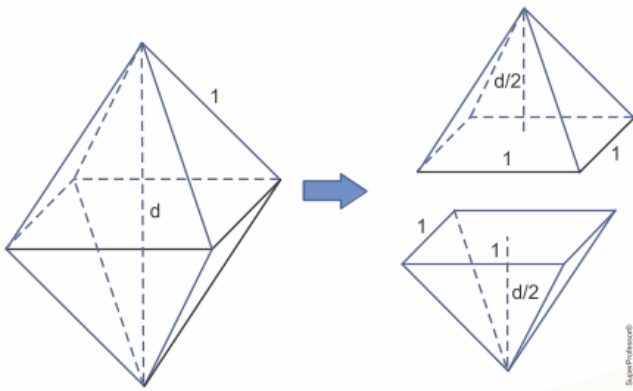
[C]

Utilizando o conceito de base média de um triângulo podemos concluir que a aresta do octaedro regular mede 1.

A medida da diagonal do octaedro regular será dada por:

$$d = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

O volume do octaedro regular será a soma dos volumes das duas pirâmides consideradas na figura abaixo:



$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta da questão 12:

[A]

Calculando, inicialmente, o volume total das trinta esferas.

$$V = 30 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = 30 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\pi^{-1})^3$$

$$V = 40 \text{ dm}^3$$

Como 40dm^3 é o volume de metade do cone, concluímos que o volume do cone é 80 dm^3 .

Vamos, então, determinar a medida do raio deste cone.

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 6 = 80 \Rightarrow r^2 = \frac{40}{\pi}$$

Calculando, agora, a área do cone equilátero sugerido, temos:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

Como o cone é equilátero, devemos considerar $g = 2r$.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot r \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{40}{\pi} \Rightarrow A_L = 80 \text{ dm}^2$$

Resposta: [A] 80dm^2

Resposta da questão 13:

[A]

Como a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone, segue que a razão entre o volume de água e a capacidade V do recipiente é tal que

$$\frac{V_{H_2O}}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow V_{H_2O} = \frac{V}{8}$$

Desse modo, o volume de óleo é dado por

$$V - V_{H_2O} = V - \frac{V}{8} = \frac{7V}{8}$$

Portanto, quando toda a água e nenhum óleo escoar, a altura x atingida pelo óleo é tal que

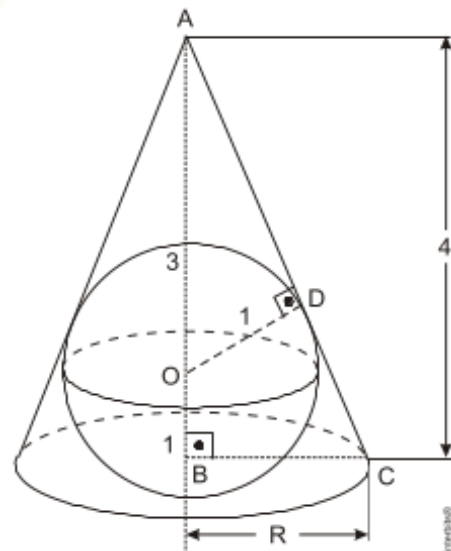
$$\frac{7V}{8} = \left(\frac{x}{h}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \sqrt[3]{\frac{7}{8}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} h.$$

Resposta da questão 14:

[D]

Considerando O o centro da esfera, temos:



No triângulo AOD, temos: $AD^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow AD = \sqrt{8}\text{cm}$

$$\triangle ADO \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{8}}\text{cm}$$

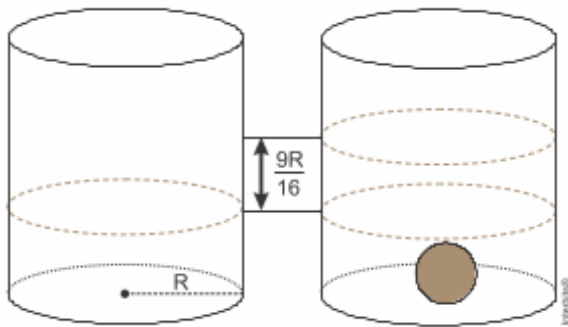
Portanto, o volume V do cone será dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{8}}\right)^2 \cdot 4 = \frac{8 \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3$$

REVISÃO GEOMETRIA ESPACIAL- ESPCEX

Resposta da questão 15:

[B]



Considerando que x seja o raio da esfera e escrevendo que o volume da esfera é igual ao volume da água deslocada, pode-se escrever:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{9R}{16} \Rightarrow x^3 = \frac{27R^3}{64} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot R$$