

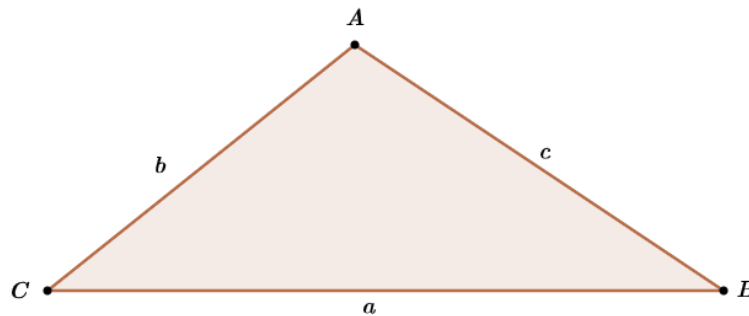
Triângulos (TEORIA COM EXERCÍCIOS)

Professor Yuri Politano

Nota: Em algumas demonstrações dos teoremas presentes neste material são utilizadas ferramentas que presumo ser do conhecimento do(a) leitor(a).

1. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Considere um triângulo ABC abaixo cujos lados serão representados por a, b e c .



A sua existência está atrelada as seguintes desigualdades:

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

1.1 SÍNTESE DE CLAIRAUT

Considere um triângulo qualquer ABC . O maior lado deste triângulo representaremos por a e os outros dois menores b e c . Segue:

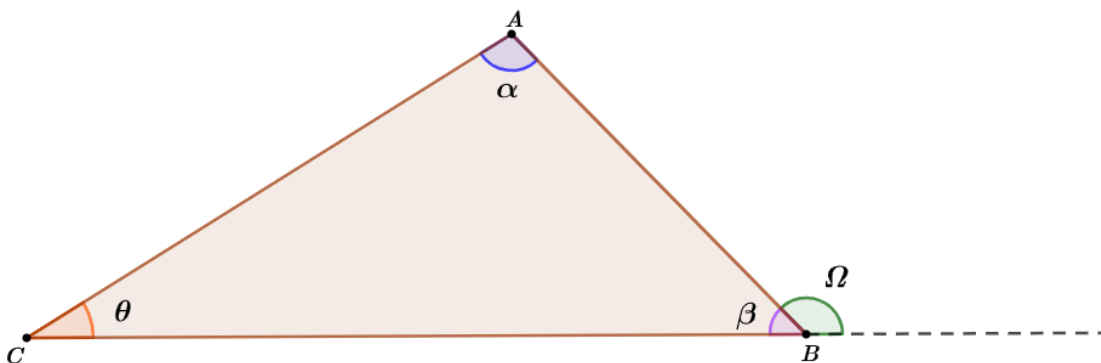
$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{triângulo retângulo}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{triângulo obtusângulo}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{triângulo acutângulo}$$

2. TEOREMAS

Seja ABC um triângulo qualquer.



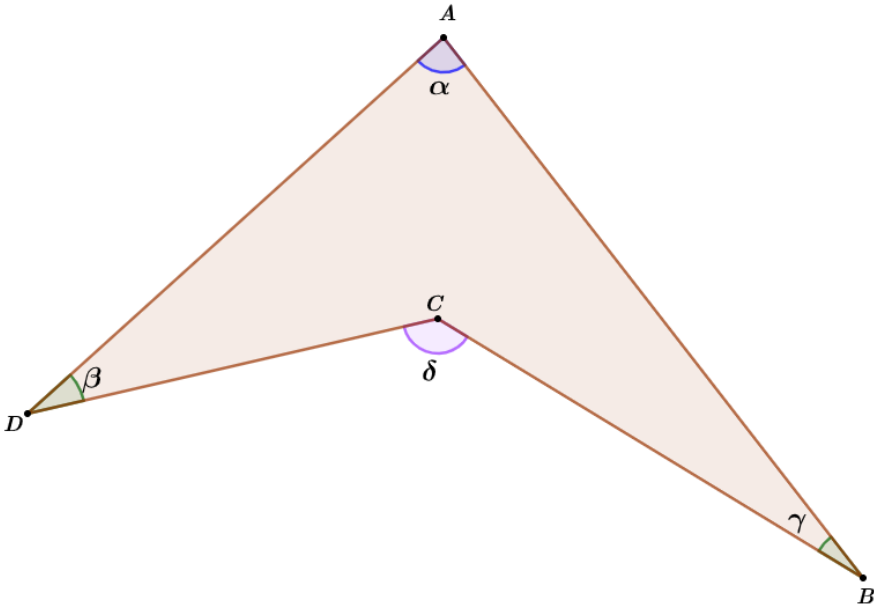
→ Lei angular de Tales:

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

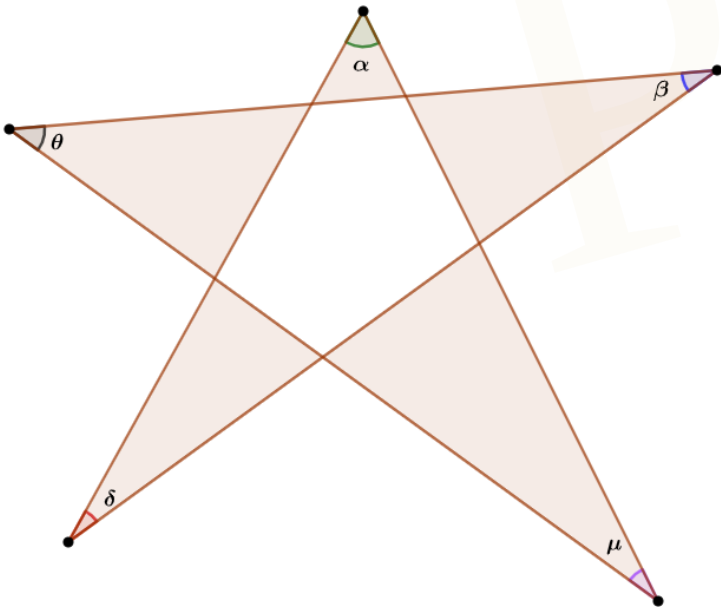
→ Teorema do Ângulo Externo

$$\Omega = \alpha + \theta$$

Consequências:



$$\delta = \gamma + \alpha + \beta$$



$$\alpha + \beta + \mu + \delta + \theta = 180^\circ$$

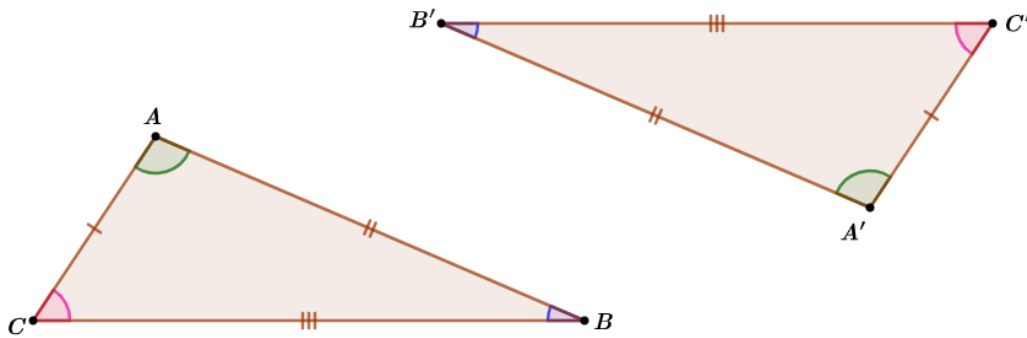
3. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são ditos congruentes se, e somente se, puderem ser sobrepostos utilizando movimentos rígidos no espaço, sem deformá-los.

Em suma, um triângulo ABC é congruente a um triângulo A'B'C' quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices, tal que:

- (i) Os ângulos internos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;
- (ii) Os lados opostos a vértices correspondentes tenham comprimentos iguais.

Nota-se: $\boxed{ABC \equiv A'B'C'}$



Casos de congruência:

- 1 – Lado, Lado, Lado (**LLL**)
- 2 – Lado, Ângulo, Lado (**LAL**)
- 3 – Ângulo, Lado, Ângulo (**ALA**)
- 4 – Lado, Ângulo, Ângulo Oposto (**LAA_o**)
- 5 – Cateto, Hipotenusa (**CH**)

4. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

(DEF). Dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, e escrevemos $\Delta(ABC) \sim \Delta(A'B'C')$, se:

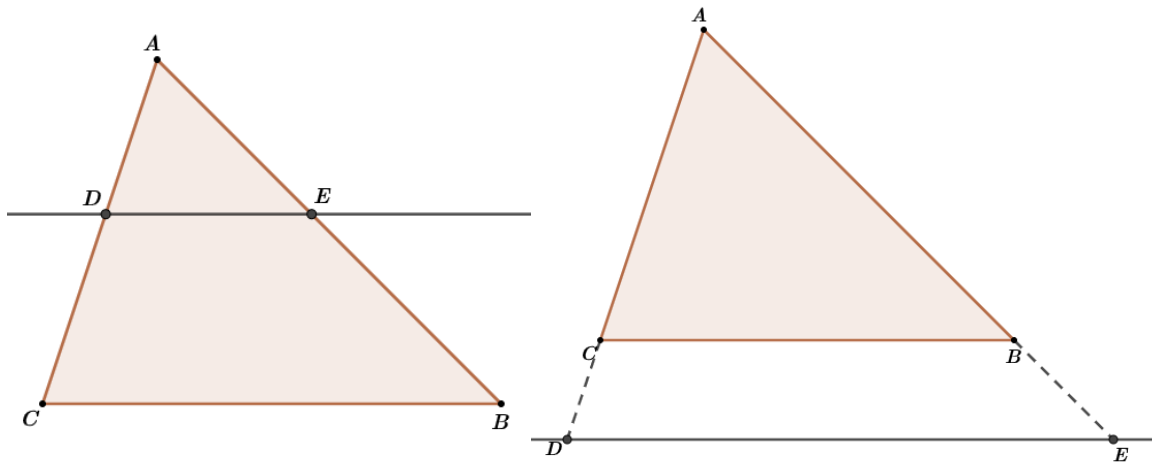
- i) $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C'}$;
- ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ (razão de semelhança)

Tome nota:

→ A razão entre dois segmentos quaisquer correspondentes dos triângulos ABC e A'B'C' é igual a razão de semelhança k.

→ A razão entre os raios das circunferências circunscritas aos triângulos semelhantes também é igual a k.

→ Seja r uma reta paralela a um dos lados de um triângulo ABC. A intersecção desta reta com os lados (ou prolongamentos) do triângulo, produz um novo triângulo semelhante a ABC.



Casos de semelhança:

1 – Ângulo, Ângulo (**AA**)

2 – Lado, Ângulo, Lado (**LAL**)

3 – Lado, Lado, Lado (**LLL**)

Temos ainda:

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = k^2$$

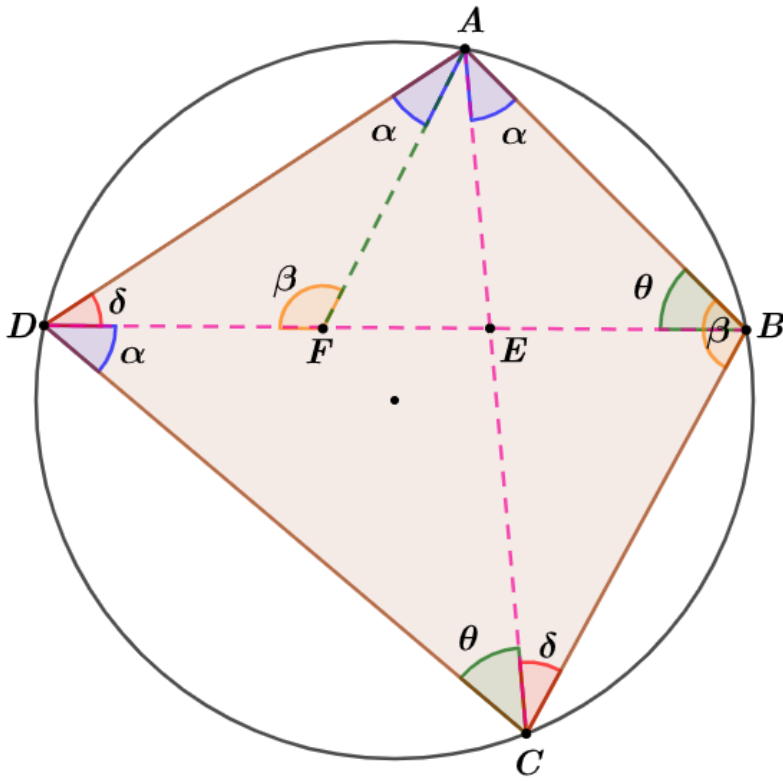
Tome nota:

Teorema de Ptolomeu (Quadriláteros inscritíveis)

Num quadrilátero ABCD inscritível, vale:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$$

(Demonstração)



Tracemos AF (isogonal de AC em relação a AB e AD). Note que os triângulos AFD e ABC são **semelhantes**. Com efeito,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BC}} \quad (i)$$

Temos ainda AFB semelhante a ADC. Logo,

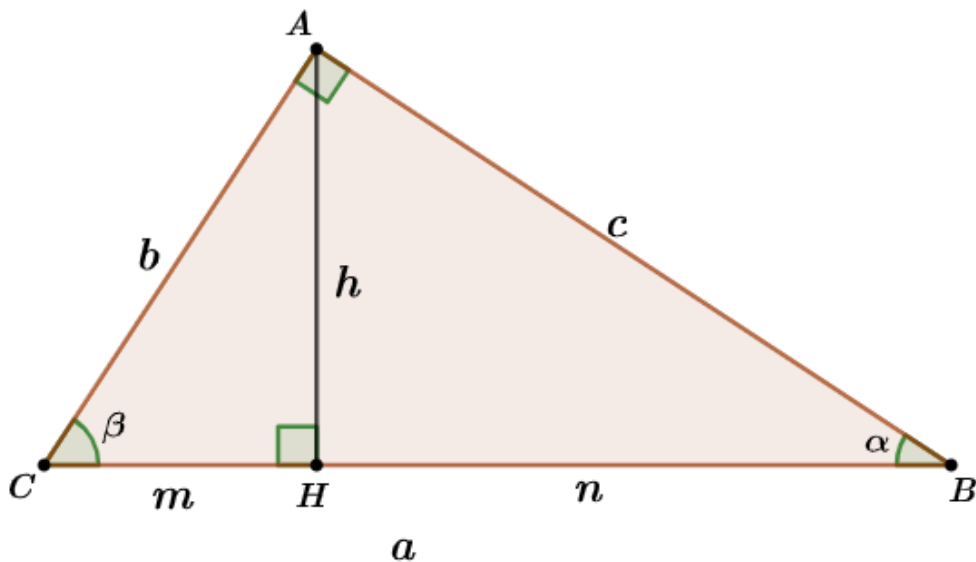
$$\frac{\overline{FB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (ii)$$

Isolando DF e FB e, somando ambas as equações temos:

$$\overline{DF} + \overline{FB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$$

■

4.1 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



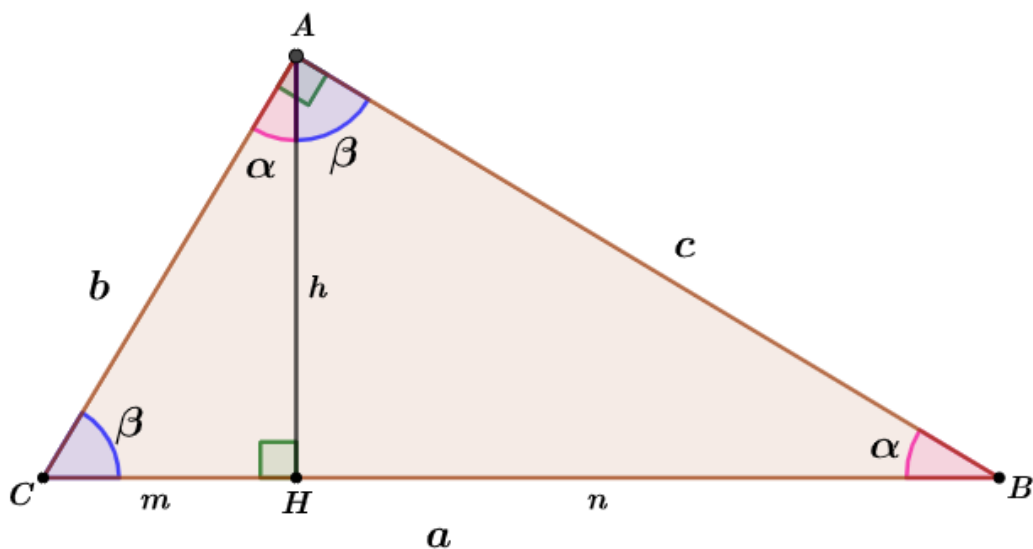
No triângulo acima, valem as seguintes relações:

- 1) $b^2 = a \cdot m$
- 2) $c^2 = a \cdot n$
- 3) $h^2 = m \cdot n$
- 4) $a \cdot h = b \cdot c$
- 5) $a^2 = b^2 + c^2$
- 6) $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$

Todas as relações acima podem ser demonstradas via semelhança entre os triângulos AHC, AHB e ABC ou via trigonometria (Tópico 4.2)

4.2 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja ABC um triângulo retângulo em A, com ângulos em B e C medindo α e β , respectivamente. Valem as relações abaixo.



$$\text{Sen}(\beta) = \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c} = \text{Cos}(\alpha)$$

$$\text{Cos}(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{m}{b} = \frac{h}{c} = \text{Sen}(\alpha)$$

$$\text{Tan}(\beta) = \frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h} = \frac{1}{\text{Tan}(\alpha)} = \frac{\text{Sen}(\beta)}{\text{Cos}(\beta)}$$

Note ainda que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow \boxed{\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1}$$

Além disso, definiremos:

$$\text{Secante de } \alpha = \frac{1}{\text{cosseno de } \alpha}$$

$$\text{Cossecante de } \alpha = \frac{1}{\text{seno de } \alpha}$$

$$\text{Cotangente de } \alpha = \frac{1}{\text{tangente de } \alpha}$$

Com efeito,

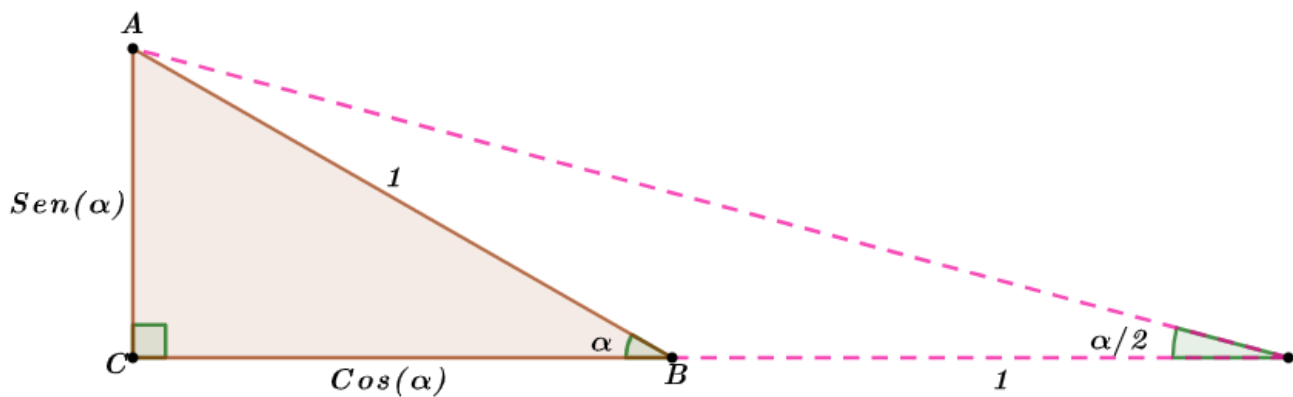
$$\boxed{1 + \text{cotan}^2(\alpha) = \text{cossec}^2(\alpha)}$$

e,

$$\boxed{1 + \text{tan}^2(\alpha) = \text{sec}^2(\alpha)}$$

Tome nota:

Tomemos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa unitária. Prolonguemos a base BC com comprimento unitário e conectamos a extremidade deste prolongamento em A. Veja:



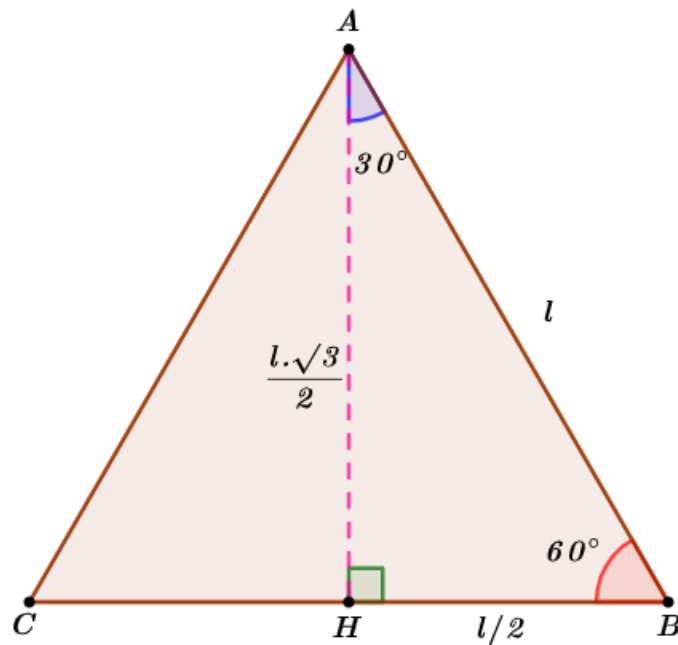
Com efeito,

$$\boxed{\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{Sen}(\alpha)}{1 + \text{Cos}(\alpha)}}$$

4.2.1 ÂNGULOS NOTÁVEIS

Neste tópico trataremos dos ângulos de $15^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 54^\circ, 60^\circ$ e 75° .

→ Triângulo Equilátero

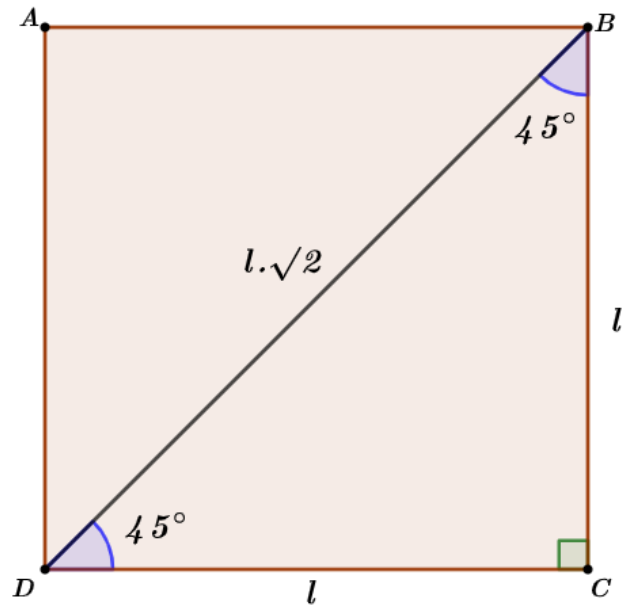


$$\text{Sen}(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Cos}(30^\circ)$$

$$\text{Cos}(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} = \text{Sen}(30^\circ)$$

$$\text{Tan}(60^\circ) = \frac{\text{Sen}(60^\circ)}{\text{Cos}(60^\circ)} = \sqrt{3} = \frac{1}{\text{Tan}(30^\circ)}$$

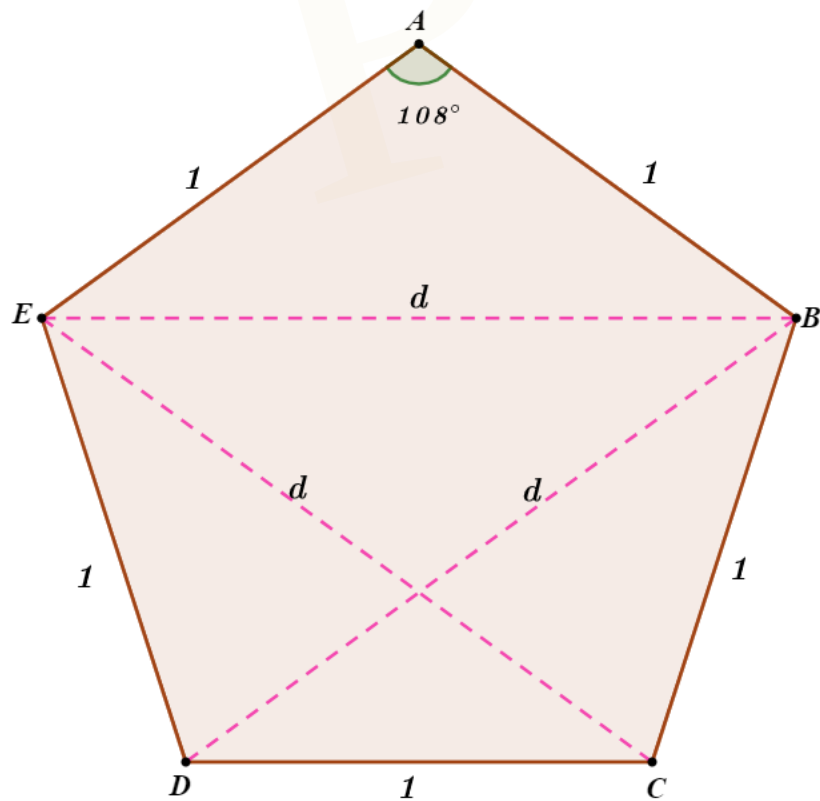
→ Quadrado



$$\text{Sen}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Cos}(45^\circ)$$

$$\text{Tan}(45^\circ) = \frac{\text{Sen}(45^\circ)}{\text{Cos}(45^\circ)} = 1$$

→ Pentágono Regular (**Lado unitário**)



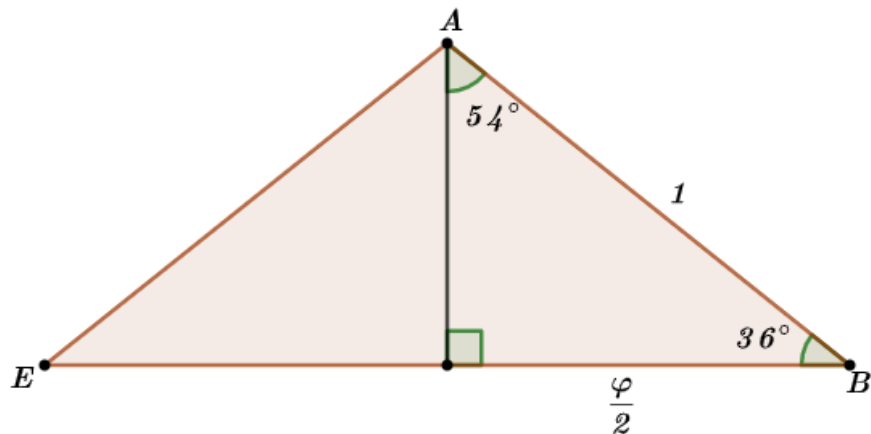
Existem dois caminhos legais para determinarmos o comprimento da diagonal do pentágono regular. Via semelhança ou através do teorema de Ptolomeu no trapézio isósceles BCDE. Utilizaremos a segunda maneira.

$$d \cdot d = d \cdot 1 + 1 \cdot 1 \Leftrightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Daí,

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

No triângulo ABE, pode-se baixar a altura em relação a BE. Note:

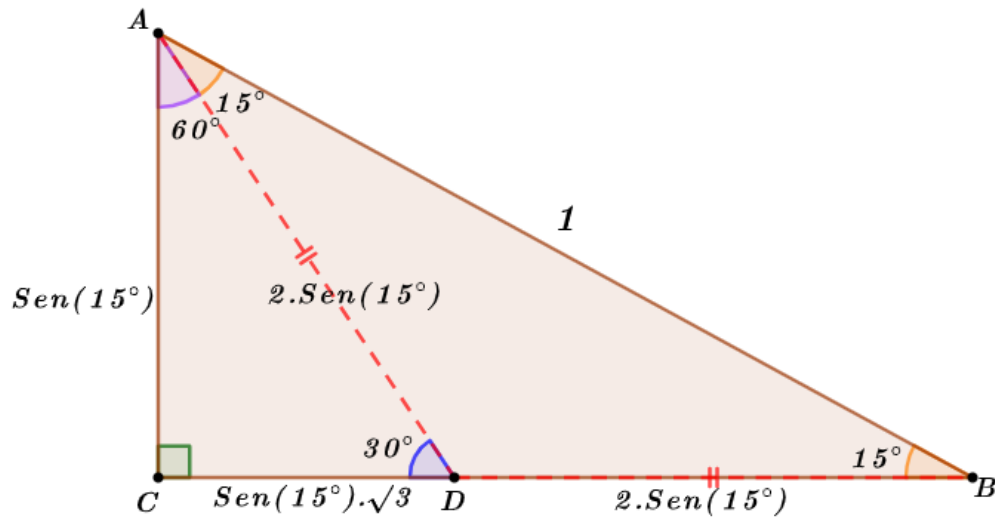


Daí,

$$\text{Sen}(54^\circ) = \frac{\varphi}{2} = \text{Cos}(36^\circ)$$

→ Sobre o ângulo de 15°

Tomemos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa unitária. Considere o ângulo localizado no vértice B igual a 15° . Vamos traçar uma ceviana partindo de A e dividindo internamente BC através de D de modo que $\overline{AD} = \overline{DB}$. Veja:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$$1^2 = \text{Sen}^2(15^\circ) + \left(\text{Sen}(15^\circ) \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \text{Sen}(15^\circ) \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = \text{Sen}^2(15^\circ) + \text{Sen}^2(15^\circ) \cdot (3) + 4\sqrt{3} \cdot \text{Sen}^2(15^\circ) + 4 \cdot \text{Sen}^2(15^\circ) \Leftrightarrow$$

$$1 = \text{Sen}^2(15^\circ) \cdot (8 + 4\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$4\text{Sen}^2(15^\circ) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

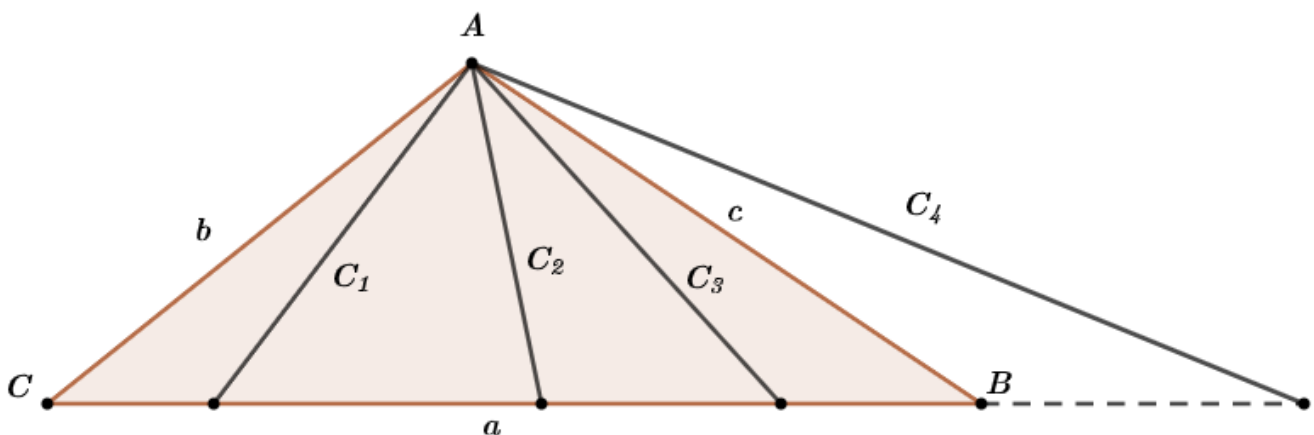
$$\boxed{\text{Sen}(15^\circ) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \text{Cos}(75^\circ)}$$

Ou ainda,

$$\boxed{\text{Sen}(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \text{Cos}(75^\circ)}$$

5. CEVIANAS

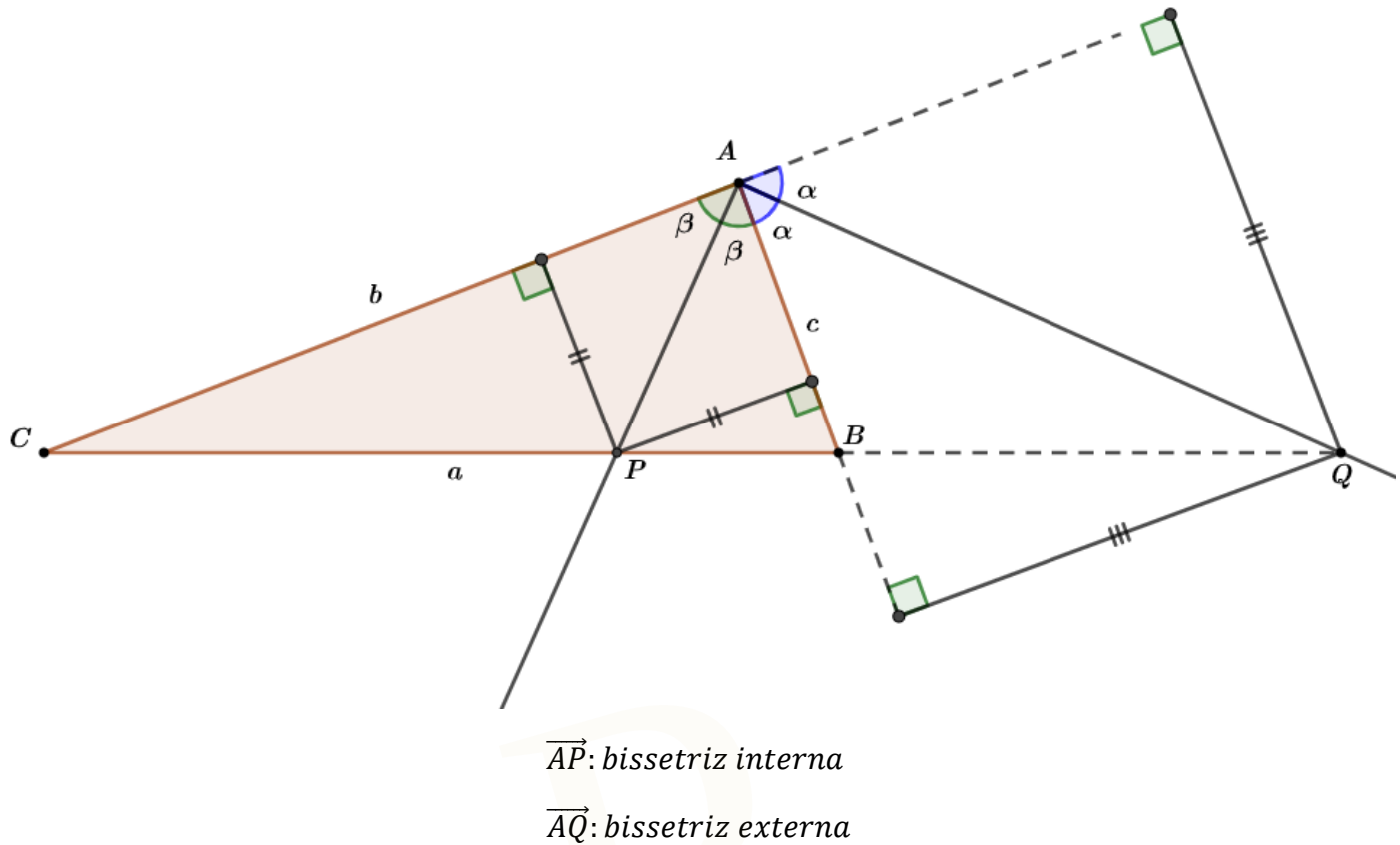
Ceviana é qualquer semirreta que parte de um vértice de um triângulo e toca no lado oposto (ou no prolongamento). As principais cevianas são: Bissetriz, Altura e Mediana.



→ C_1, C_2, C_3 e C_4 são exemplos de cevianas.

5.1 BISSETRIZ

A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam os lados do ângulo. Tal ângulo divide-se em dois ângulos de mesma medida.



Para fins de cálculos, temos que:

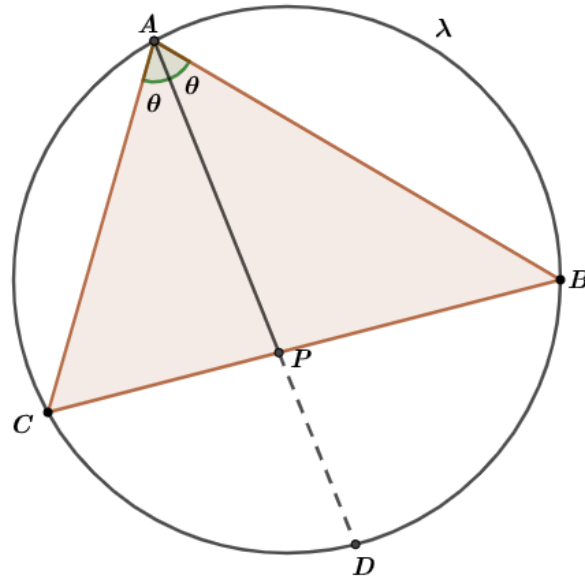
$$\boxed{AP^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{PC} \cdot \overline{PB}} \quad (1)$$

$$\boxed{AQ^2 = \overline{CQ} \cdot \overline{BQ} - \overline{AC} \cdot \overline{AB}} \quad (2)$$

(Demonstração)

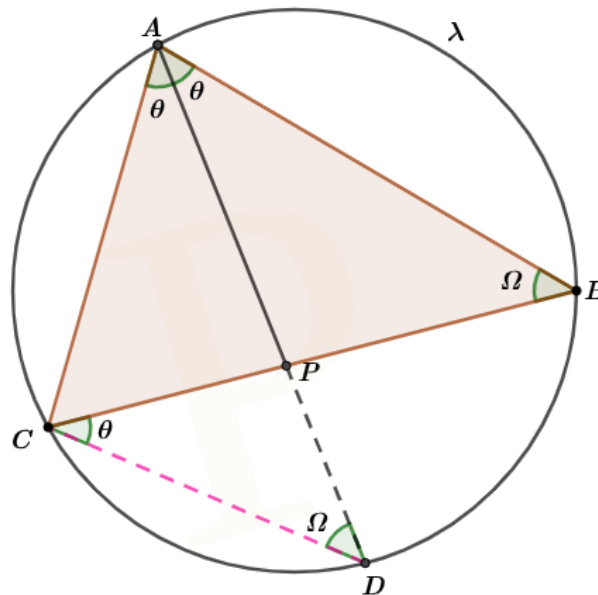
1. Bissetriz interna

Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência λ , onde AP é o segmento que representa a bissetriz interna deste triângulo.



O prolongamento de AP encontra λ em D.

Ao conectarmos D em C, temos: $ABP \sim ACD$



Daí,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP} + \overline{PD}} \text{ (via semelhança)}$$

Além disso,

$$\overline{AP} \cdot \overline{PD} = \overline{PC} \cdot \overline{PB} \text{ (via teorema das cordas)}$$

Logo,

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PD} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{PC} \cdot \overline{PB}$$

■

A demonstração do item (2) fica a cargo do Leitor.

5.1.1 QUÁDRUPLA HARMÔNICA

Um segmento qualquer BC estará dividido harmonicamente se, e somente se, os pontos que o dividem internamente e externamente, P e Q , respectivamente, formarem a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}$$

Os pés das bissetrizes interna e externa, dividem BC harmonicamente.

Para que tal igualdade seja verificada, basta aplicarmos os teoremas da bissetriz interna e externa.

TBI (Teorema da Bissetriz Interna)

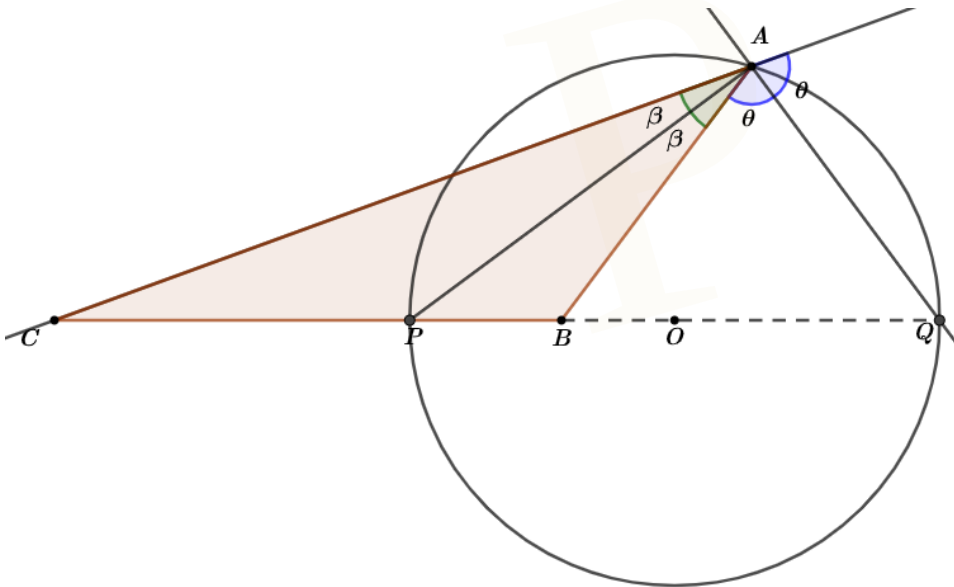
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = k$$

TBE (Teorema da Bissetriz Externa)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = k$$

5.1.2 CÍRCULO DE APOLÔNIO

Considere um triângulo ABC , donde BC é fixo e $\frac{AC}{AB} = k$ (*constante*). O círculo de Apolônio é o lugar geométrico dos pontos que preservam a razão $\frac{AC}{AB}$.



O raio do círculo pode ser obtido através da seguinte relação:

$$r = k \cdot \frac{\overline{BC}}{|k^2 - 1|}$$

(Demonstração)

Vamos considerar o segmento BC abaixo dividido internamente e externamente pelos pontos P e Q , respectivamente, numa mesma razão.



Nosso objetivo consiste em determinar a distância entre os divisores harmônicos. Chamemos $\overline{PB} = a$ e $\overline{BQ} = b$. Com efeito,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{BC} - a}{a} = k \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\overline{BC}}{k + 1}}$$

Analogamente,

$$\boxed{b = \frac{\overline{BC}}{k - 1}}$$

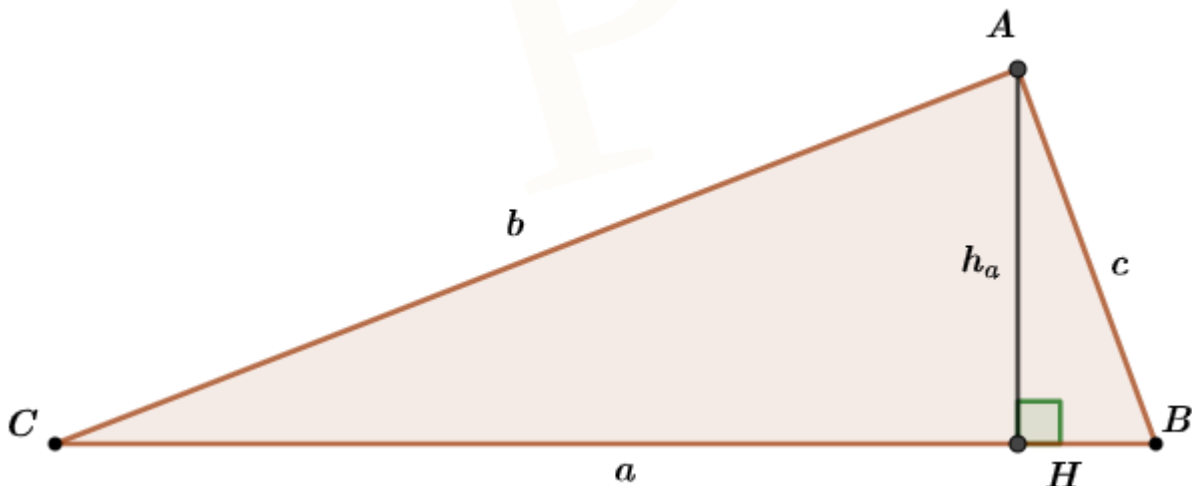
Logo,

$$\overline{PQ} = \frac{2k \cdot \overline{BC}}{k^2 - 1}$$

■

5.2 ALTURA

A altura de um triângulo qualquer é a ceviana que parte de um vértice, toca no lado oposto ou no seu prolongamento, formando um ângulo reto a esse lado.



h_a : altura relativa ao lado a

Para fins de cálculos, temos que:

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}}$$

Onde, p é o semiperímetro do triângulo ABC.

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

(Demonstração)

Para a demonstração desse resultado iremos utilizar a Lei dos Cossenos tomando $\widehat{BCA} = \alpha$ como referência. Além disso, algumas manipulações algébricas serão necessárias.

Com efeito,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

Como $b \cdot \cos(\alpha) = \overline{CH}$, temos:

$$\overline{CH} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \text{ mas,}$$

$$b^2 = h_a^2 + \overline{CH}^2$$

$$\therefore h_a^2 = b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right]^2$$

$$\begin{aligned} \therefore 4a^2 \cdot h_a^2 &= 4 \cdot a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2) \cdot (2ab - a^2 - b^2 + c^2) = ((a+b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a-b)^2) \\ &= (a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a) \end{aligned}$$

Daí,

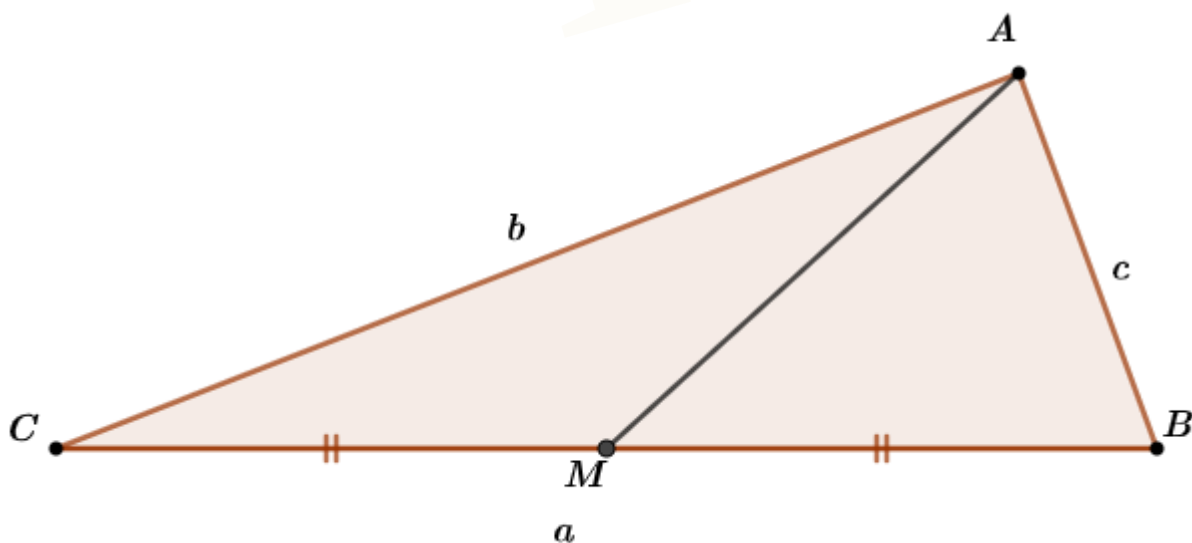
$$4a^2 \cdot h_a^2 = 2p \cdot 2 \cdot (p-c) \cdot 2 \cdot (p-b) \cdot 2 \cdot (p-a)$$

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

■

5.3 MEDIANA

A mediana de um triângulo qualquer é a ceviana que parte de um vértice e toca no ponto médio do lado oposto a esse vértice.



$\overline{AM}$: mediana relativa ao lado a

M : ponto médio de BC

Para fins de cálculos, temos que:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

(Demonstração)

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ACM e AMB:

$$(i) \ b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{AM}^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{AM} \cdot \cos(\widehat{AMC})$$

$$(ii) \ c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{AM}^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{AM} \cdot \cos(\pi - \widehat{AMC})$$

Com efeito,

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{AM}^2 - b^2}{a \cdot \overline{AM}} = \frac{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \overline{AM}^2}{a \cdot \overline{AM}} \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{AM}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{2}$$

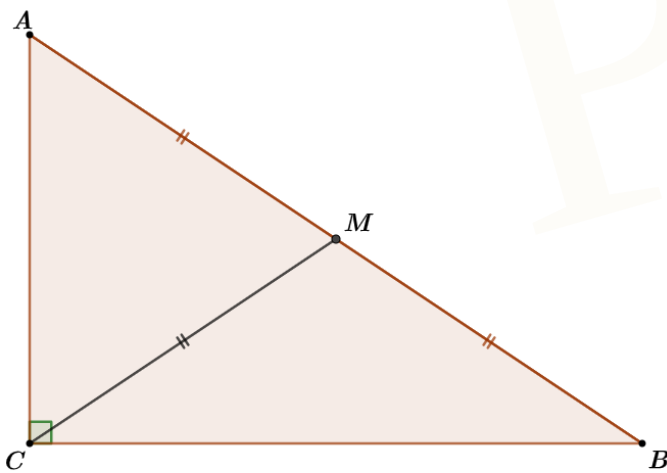
■

OBS:

$$[ACM] = [AMB]$$

-Mediana relativa à hipotenusa-

A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem por medida a metade da hipotenusa.



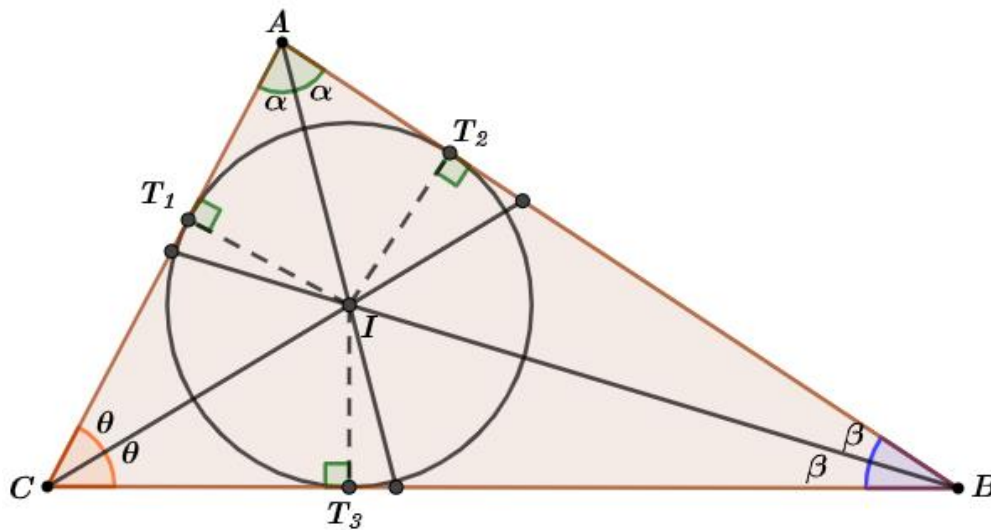
$$CM = AM = MB$$

6. PONTOS NOTÁVEIS

São pontos de intersecção das cevianas. Trataremos do incentro, ex-incentro, ortocentro e baricentro.

6.1 INCENTRO

É o ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.



I : Incentro (centro do círculo inscrito)

T_1, T_2 e T_3 : pontos de tangência

OBSERVAÇÕES

$$\overline{CT_1} = \overline{CT_3};$$

$$\overline{AT_1} = \overline{AT_2};$$

$$\overline{BT_2} = \overline{BT_3};$$

$$\overline{IT_3} \perp \overline{CB};$$

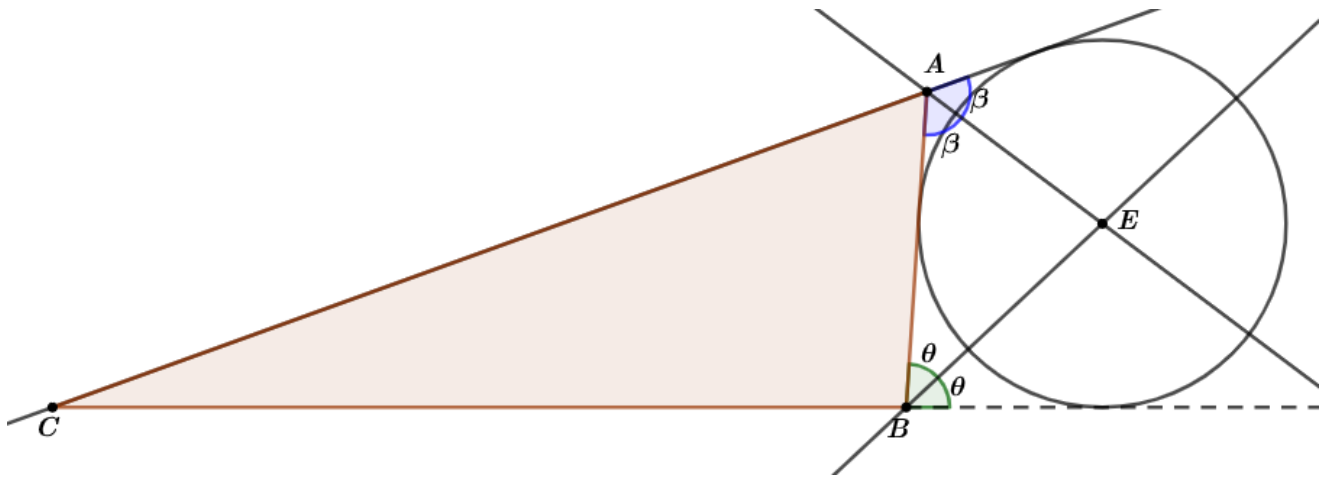
$$\overline{IT_1} \perp \overline{AC};$$

$$\overline{IT_2} \perp \overline{AB};$$

O símbolo $\perp$ indica que os segmentos são perpendiculares.

6.2 EX-INCENRO

É o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo qualquer.



E : Ex – incentro

-UMA RELAÇÃO ENTRE OS RAIOS-

Seja: $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$

Com a finalidade de facilitar a degustação associada a este assunto, chamaremos:

r_a – raio do círculo ex – inscrito tangente ao lado a e ao prolongamento dos lados b e c .

r_b – raio do círculo ex – inscrito tangente ao lado b e ao prolongamento dos lados a e c .

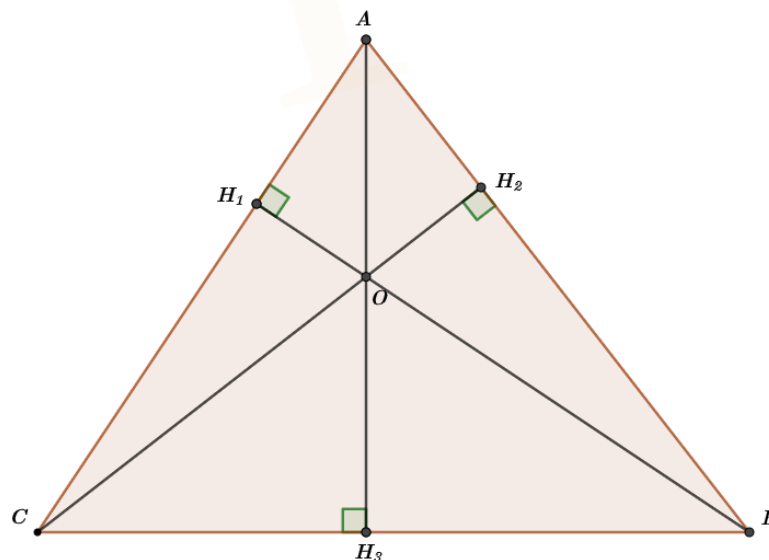
r_c – raio do círculo ex – inscrito tangente ao lado c e ao prolongamento dos lados b e a .

Sendo r o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC , vale a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

6.3 ORTOCENTRO

É o ponto de encontro das alturas de um triângulo.

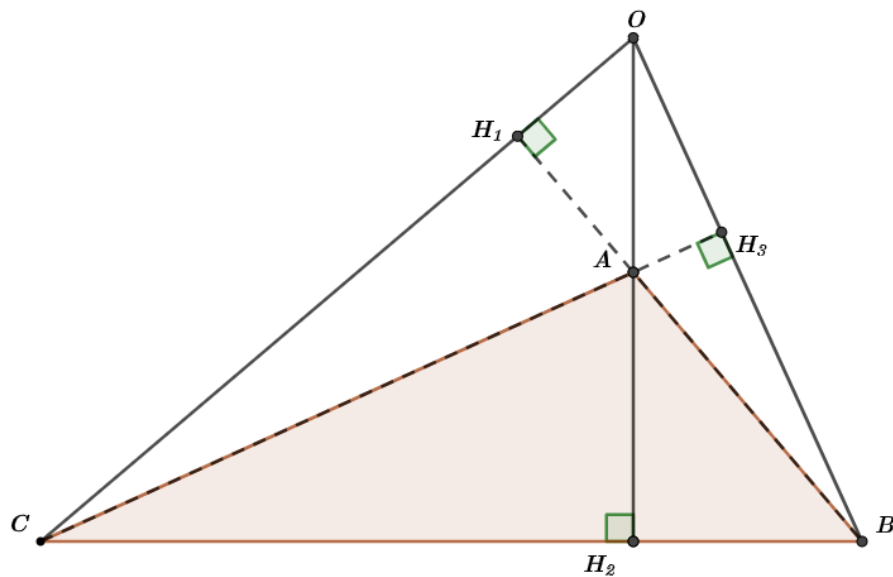


O : Ponto Órtico

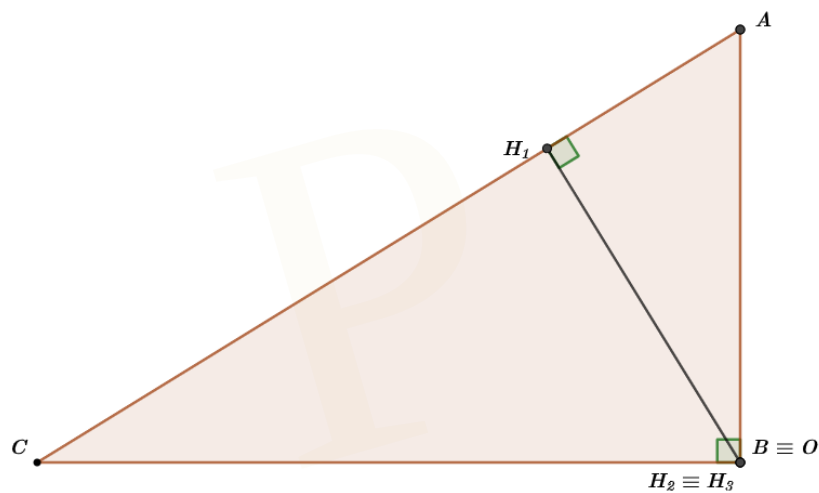
H_1, H_2, H_3 : Pés das alturas relativas aos lados

OBSERVAÇÕES

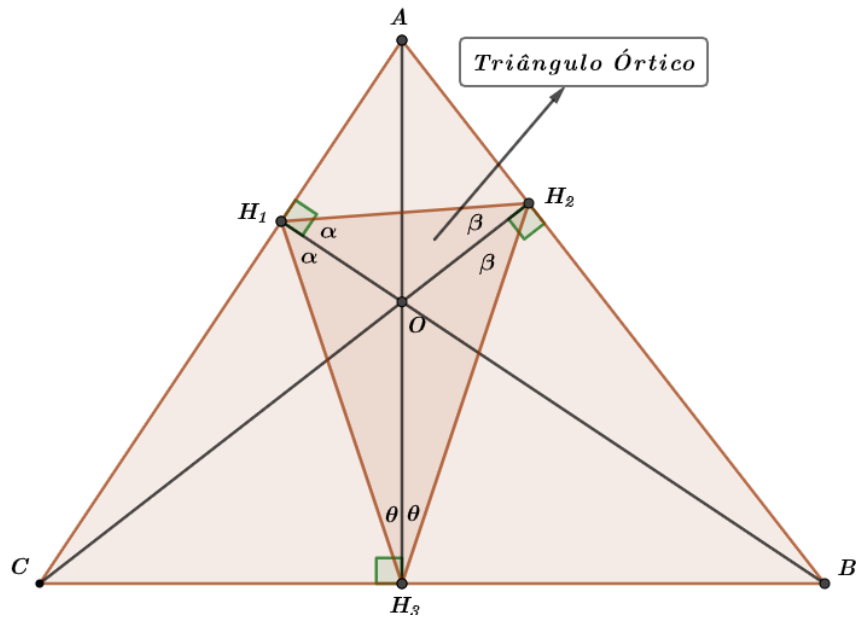
→ O ortocentro será um ponto externo ao triângulo, caso ele seja obtusângulo.



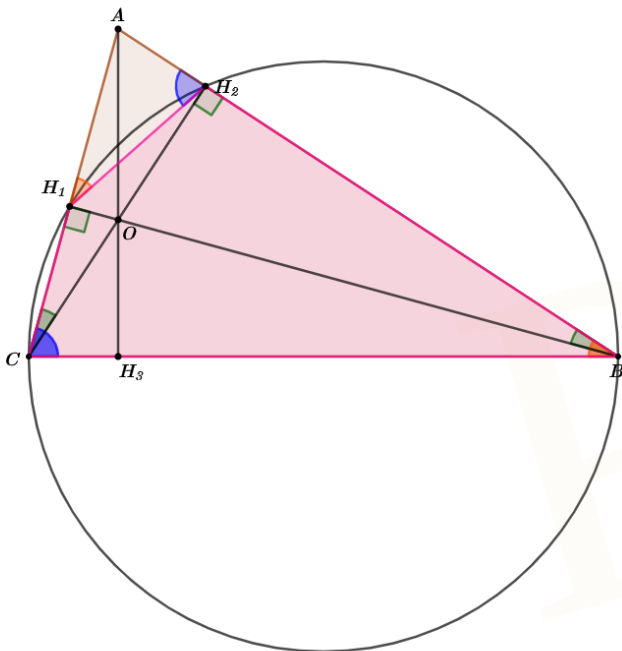
→ O ortocentro será um dos vértices do triângulo, caso ele seja retângulo.



→ O triângulo formado pelos pés das alturas é chamado **triângulo órtico**. O ortocentro, no triângulo órtico, exerce papel de incentro.

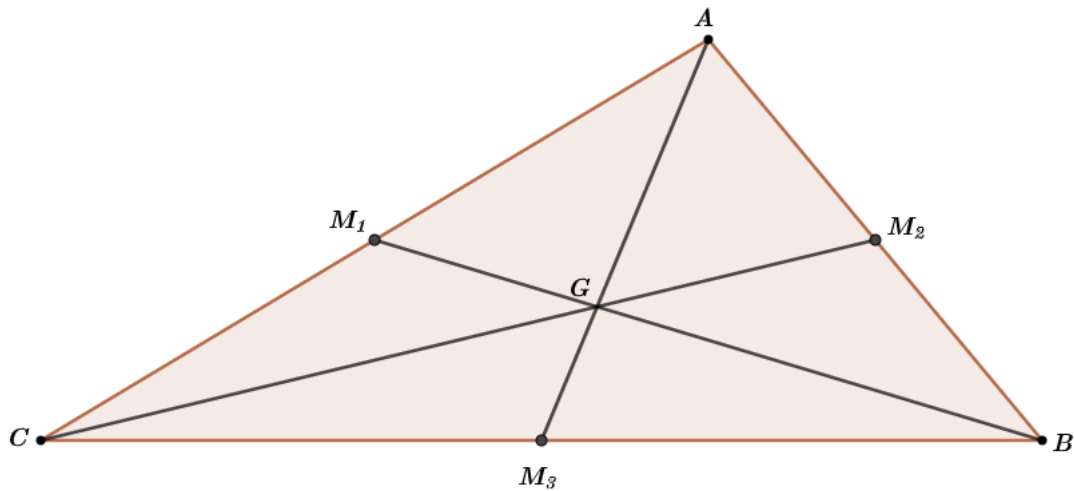


OBS: O quadrilátero CH_1H_2B é cíclico.



6.4 BARICENTRO

O baricentro, também conhecido como ponto gravitacional, é o ponto de encontro das medianas de um triângulo.



G : Baricentro

M_1, M_2 e M_3 : Pontos médios dos lados

TEOREMA 1

$$\overline{GA} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

$$\overline{GB} = 2 \cdot \overline{GM_1}$$

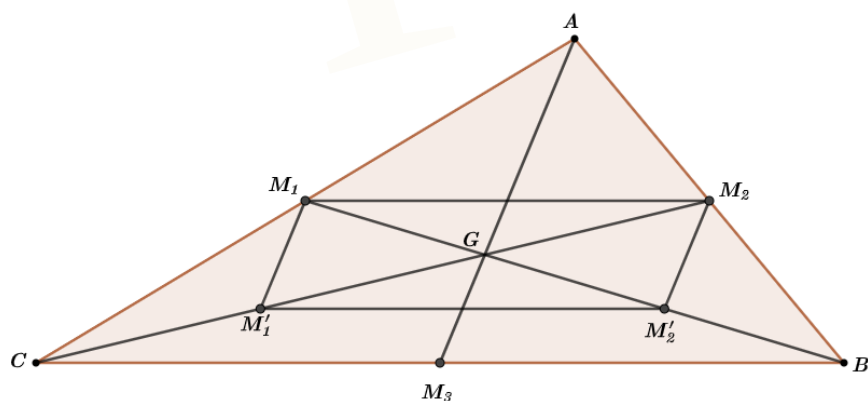
$$\overline{GC} = 2 \cdot \overline{GM_2}$$

(Demonstração)

Tomemos as seguintes construções.

i) Construir $\overline{M_1M'_1} \parallel \overline{AM_3} \parallel \overline{M_2M'_2}$

ii) Construir $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{M'_1M'_2} \parallel \overline{BC}$



Note que:

O quadrilátero $M_1M_2M'_1M'_2$ é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{GM_1} = \overline{GM'_2}$ e $\overline{GM'_1} = \overline{GM_2}$

No triângulo ABG , $\overline{M_2M'_2}$ é base média $\Rightarrow \overline{GM'_2} = \overline{BM'_2}$

No triângulo ACG , $\overline{M_1M'_1}$ é base média $\Rightarrow \overline{GM'_1} = \overline{CM'_1}$

Com efeito,

$$\overline{GA} = 2 \cdot \overline{GM}_3$$

$$\overline{GB} = 2 \cdot \overline{GM}_1$$

$$\overline{GC} = 2 \cdot \overline{GM}_2$$

■

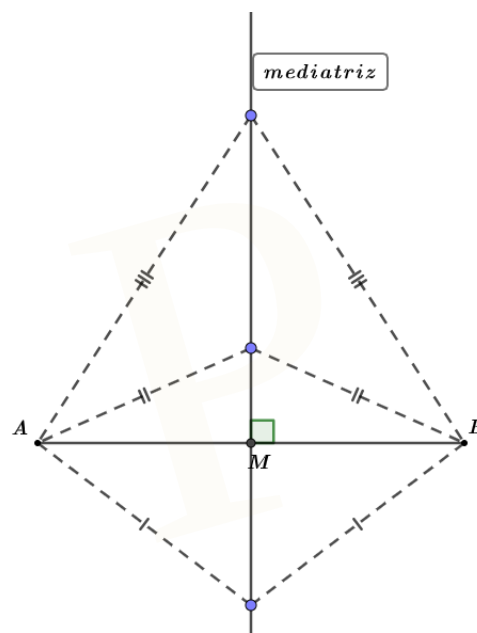
TEOREMA 2

$$(\overline{AM}_1)^2 + (\overline{AM}_2)^2 + (\overline{AM}_3)^2 = \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

7. MEDIATRIZ E CIRCUNCENTRO

A mediatriz e o circuncentro são importantes objetos matemáticos e possuem diversas aplicações. Vamos às definições.

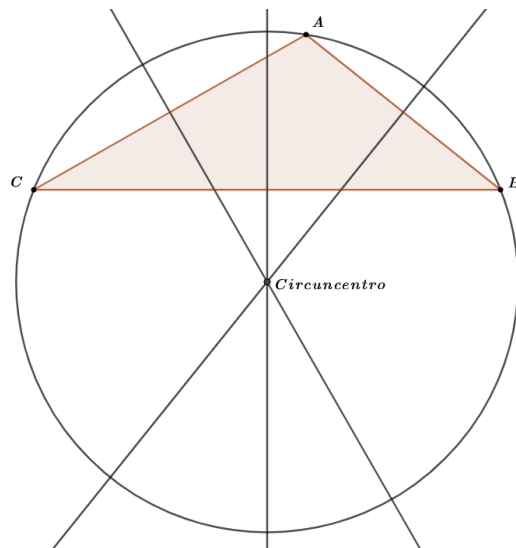
→ *Mediatriz*: É o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos fixos no plano.



AB: Segmento fixo

M: ponto médio

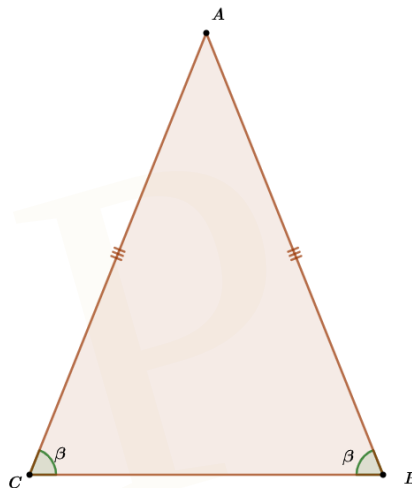
→ *Circuncentro*: É o ponto de encontro das mediatrizes num triângulo qualquer.



O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

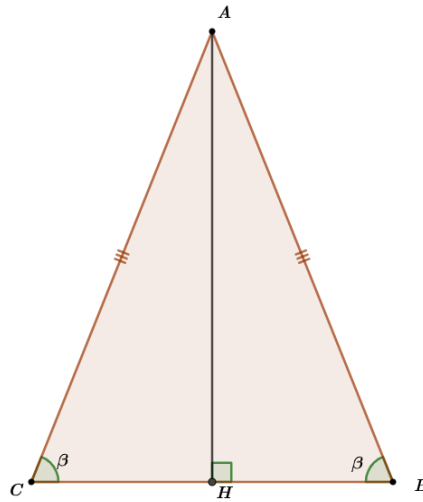
8. TRIÂNGULO ISÓSCELES

Possui dois lados de mesma medida, ou seja, congruentes.



De imediato podemos verificar que os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ possuem a mesma medida, pois, $AC = AB$.

Baixando, a partir de A , a altura relativa a BC , temos:



AH é altura

Note que os ângulos $C\hat{A}H$ e $H\hat{A}B$ são congruentes $\Rightarrow$ ***AH é bissetriz***

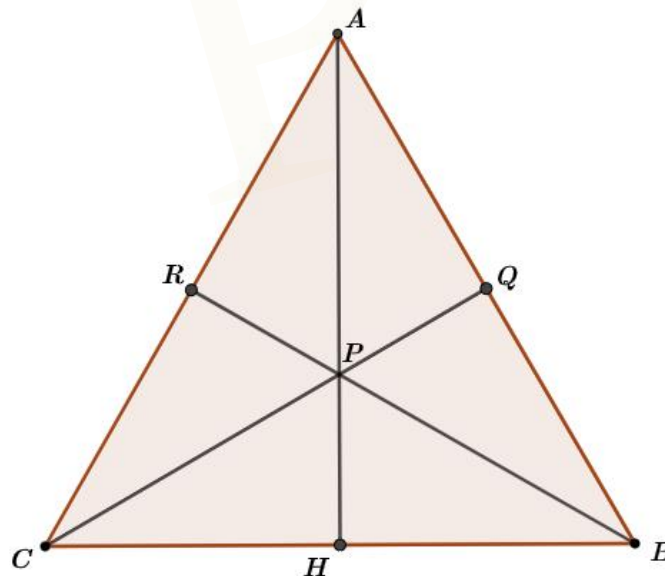
Como os triângulo ACH e ABH são congruentes, temos $CH = HB \Rightarrow$ ***AH é mediana***

9. TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Um triângulo equilátero é aquele em que as medidas dos três lados são congruentes. Consequentemente os três ângulos também são congruentes e medem 60° .

Todo triângulo equilátero é isóscele.

As propriedades do triângulo isósceles vistas no tópico 5 também são aplicadas neste caso que estudaremos agora. Considere o triângulo equilátero ABC abaixo:

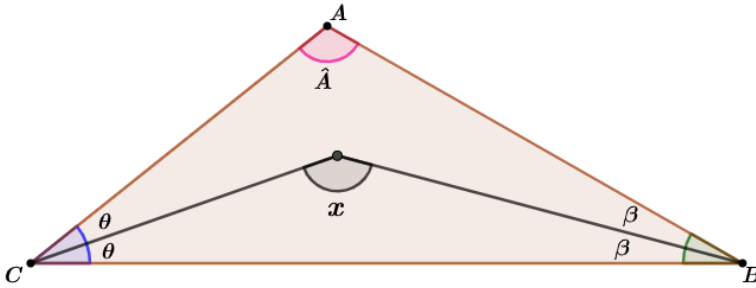


No triângulo equilátero, o ponto P indicado, representa: **Baricentro**, **Incentro**, **Circuncentro**, **Ortocentro**.

OBS: As áreas dos 6 triângulos formados são iguais.

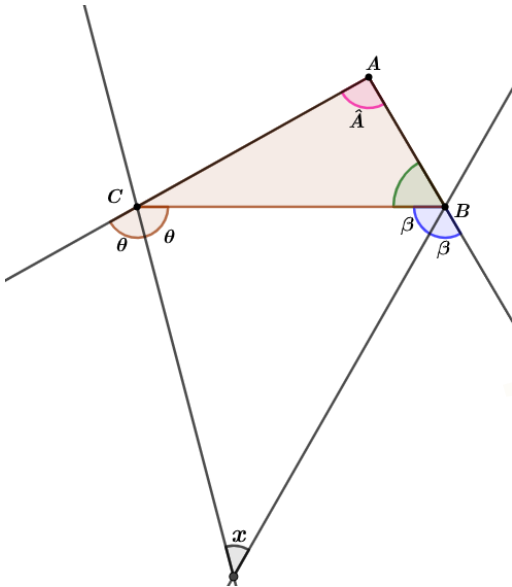
10. ÂNGULOS

Bissetriz interna → Bissetriz interna



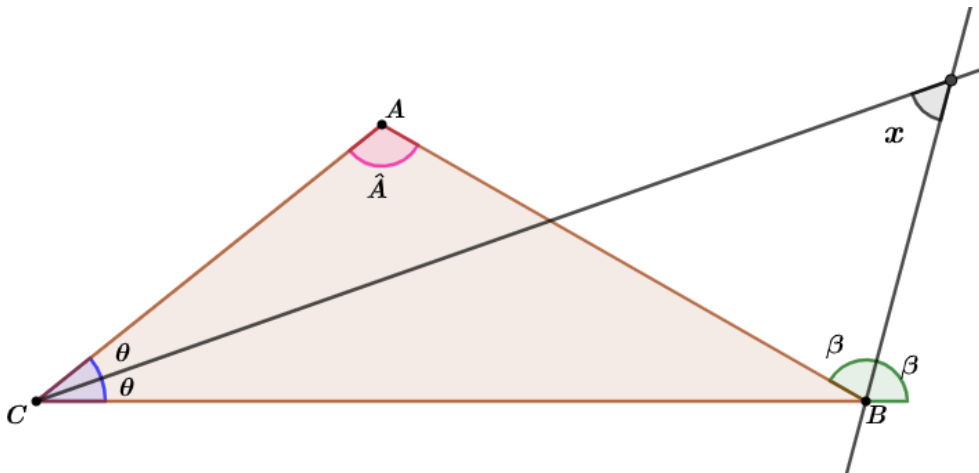
$$x = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

Bissetriz externa → Bissetriz externa



$$x = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

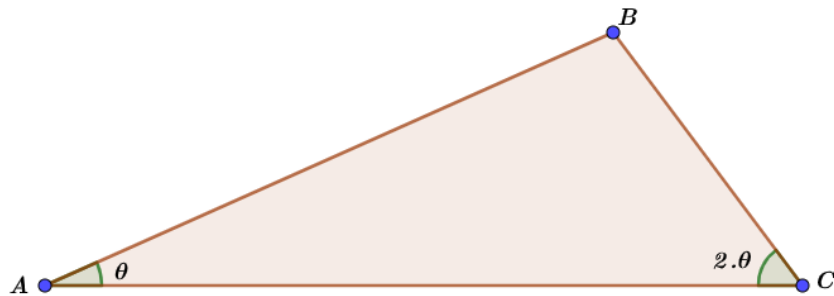
Bissetriz interna → Bissetriz externa



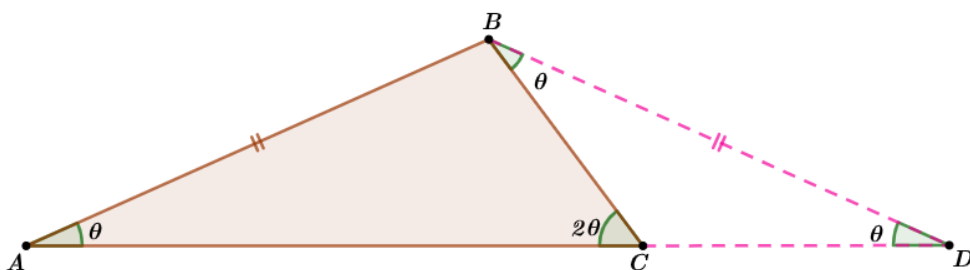
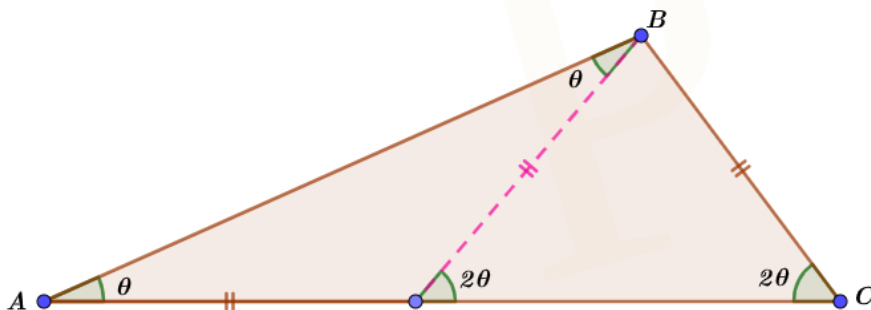
$$x = \frac{\hat{A}}{2}$$

As demonstrações dos teoremas acima ficam a cargo do leitor.

11. UMA IDEIA DE CONSTRUÇÃO AUXILIAR

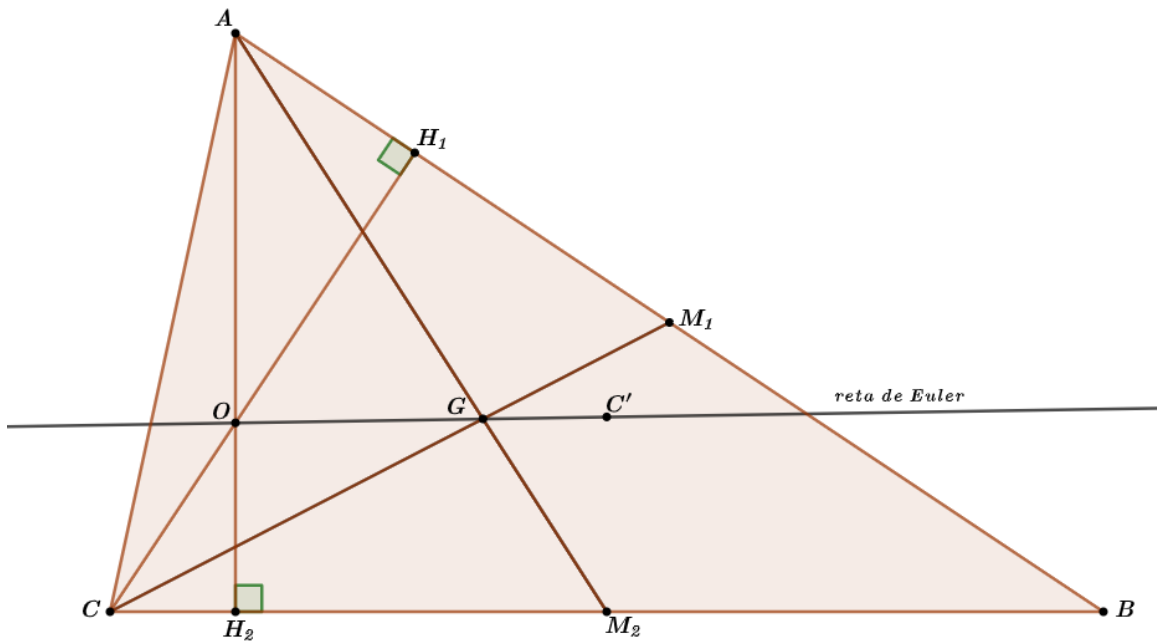


Se num determinado triângulo, a medida de um dos ângulos for o dobro da medida do outro, pode-se traçar uma ceviana de comprimento fixo com objetivo de se criar triângulos isósceles. Veja:



12. A RETA DE EULER

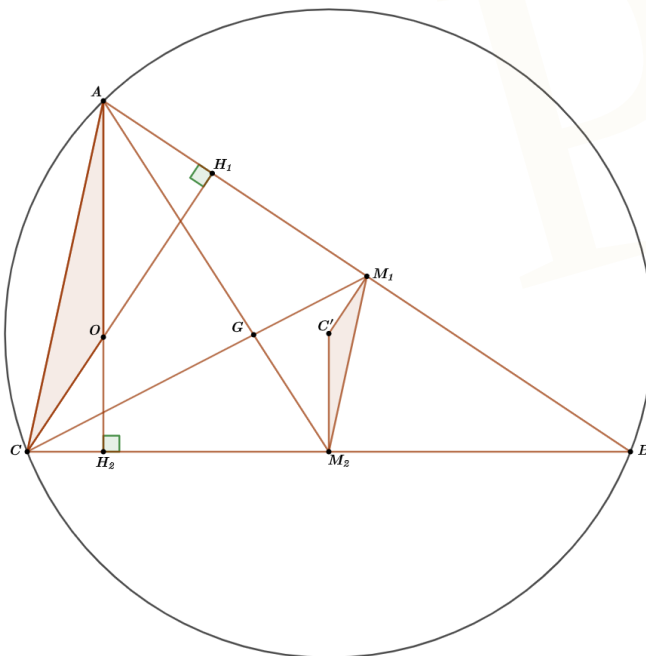
A reta que contém o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo denomina-se *reta de Euler*.



No triângulo acima, os pontos O, G e C' representam, respectivamente, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro do triângulo ABC.

$$\overline{OG} = 2\overline{GC'}$$

(Demonstração)



Note que os triângulos em destaque são semelhantes, uma vez que :

$$\overline{M_1M_2} \parallel \overline{AC}$$

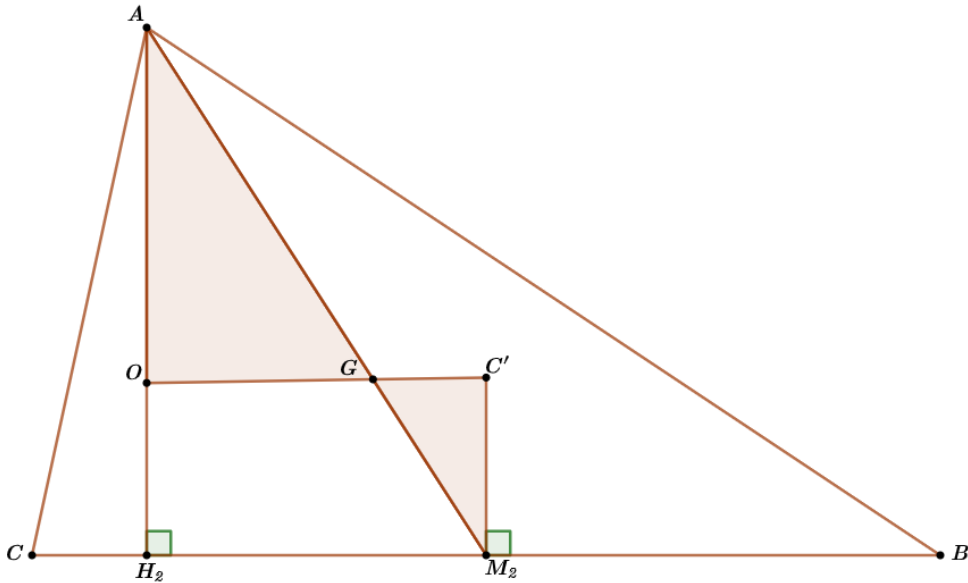
$$\overline{OC} \parallel \overline{C'M_1}$$

$$\overline{AO} \parallel \overline{M_2C'}$$

A razão de semelhança entre os triângulos ACO e $C'M_1M_2$ é $\frac{1}{2}$. Daí:

$$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{C'M_2}$$

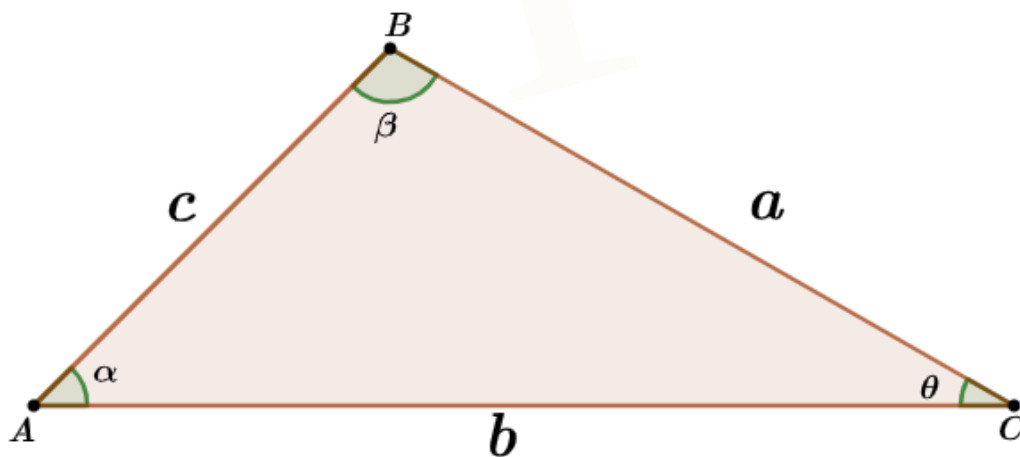
Agora observe que os triângulos AOG e $GC'M_2$ são semelhantes de razão $\frac{1}{2}$.



■

11. LEI DOS COSSENOS

Seja ABC um triângulo qualquer.



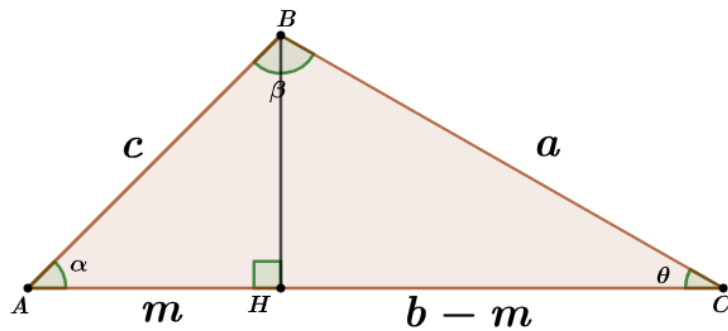
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$$

Dem. 1 (Via teorema de Pitágoras)

Seja H o pé da altura traçada do vértice B ao lado AC.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulo ABH e BCH:

$$c^2 = m^2 + (\overline{BH})^2$$

$$a^2 = (b - m)^2 + (\overline{BH})^2$$

Subtraindo as equações, temos:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2bm \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Como $\cos(\alpha) = \frac{m}{c} \Leftrightarrow m = c \cdot \cos(\alpha)$, concluímos a demonstração.

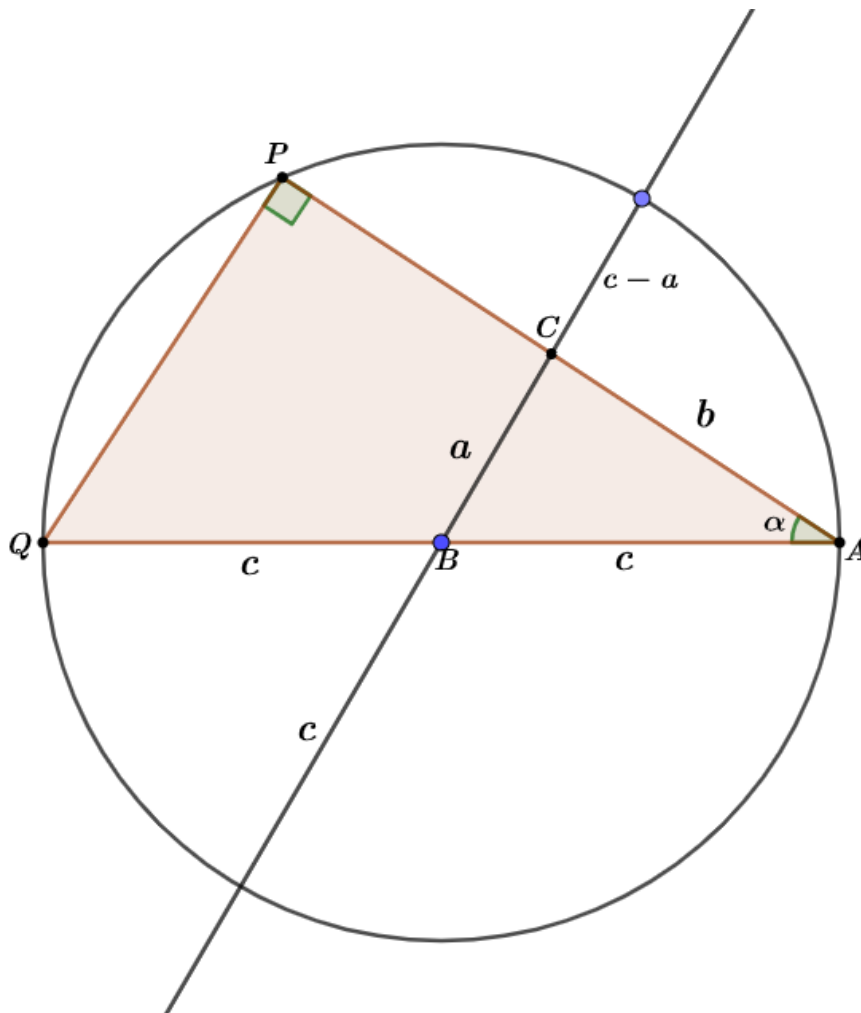
Tome Nota: Caso o triângulo seja obtusângulo, não esquecer que :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

■

Dem. 2 (Via teorema das cordas)

Tomemos um triângulo retângulo PAQ inscrito numa circunferência de raio “c”. Seja r uma reta que intersecta os lados PA e QA do triângulo nos pontos C e B, respectivamente. Chamemos $BC = a$ e $CA = b$.



Como $PA = 2c \cdot \cos(\alpha)$, temos:

$$PC = 2c \cdot \cos(\alpha) - b$$

Pelo teorema das cordas :

$$(2c \cdot \cos(\alpha) - b) \cdot b = (c - a) \cdot (c + a) \Leftrightarrow 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) - b^2 = c^2 - a^2$$

■

→ Uma outra maneira interessante de se representar a lei dos cossenos é isolando o cosseno do ângulo. Veja:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

Note ainda que, ao somarmos uma unidade em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\cos(\alpha) + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p \cdot (2p - 2a)}{2bc} \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) + 1 = \frac{2p \cdot (p - a)}{bc}}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por 2:

$$\frac{\cos(\alpha) + 1}{2} = \frac{p \cdot (p - a)}{bc}$$

Logo,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p \cdot (p - a)}{bc}}$$

Analogamente,

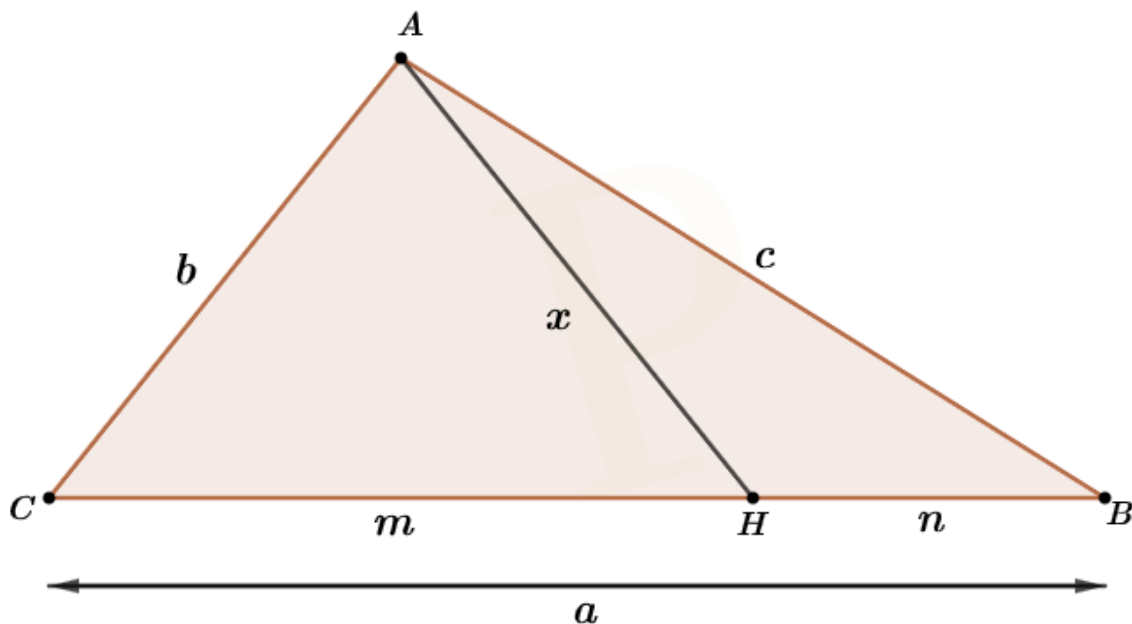
$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{p \cdot (p - b)}{ac}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{p \cdot (p - c)}{ab}}$$

(fórmulas de Briggs)

11.1 O TEOREMA DE STEWART

Seja ABC um triângulo qualquer. Uma ceviana de comprimento x é traçada sobre o lado BC dividindo-o na razão $\frac{m}{n}$.

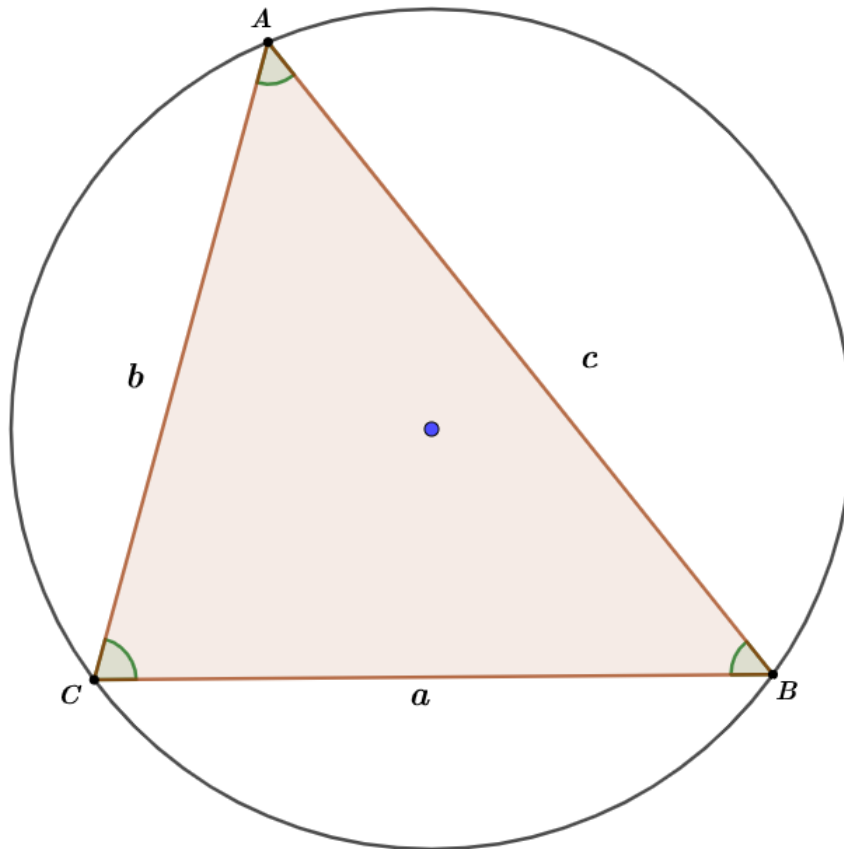


$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m = x^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$$

A demonstração do teorema de Stewart consiste na aplicação de duas leis do cosseno (Nos triângulo ACH e ABH). Deixo a cargo do leitor.

12. LEI DOS SENOS

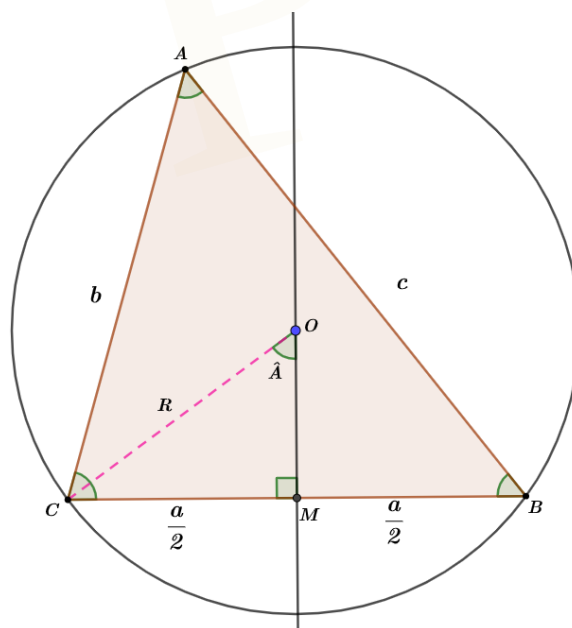
Seja ABC um triângulo qualquer inscrito numa circunferência de raio R.



Vale:

$$\frac{a}{\text{Sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{Sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{Sen}(\hat{C})} = \frac{2p}{\text{Sen}(\hat{A}) + \text{Sen}(\hat{B}) + \text{Sen}(\hat{C})} = 2R$$

(Demonstração)



Tracemos a mediatriz do segmento BC (Naturalmente coincidindo com o centro O da circunferência que circunscreve o triângulo ABC).

Note que $\hat{MOC} = \hat{BAC} = \hat{A}$. Isso ocorre pois o arco BC tem medida igual ao dobro do ângulo A.

Com efeito,

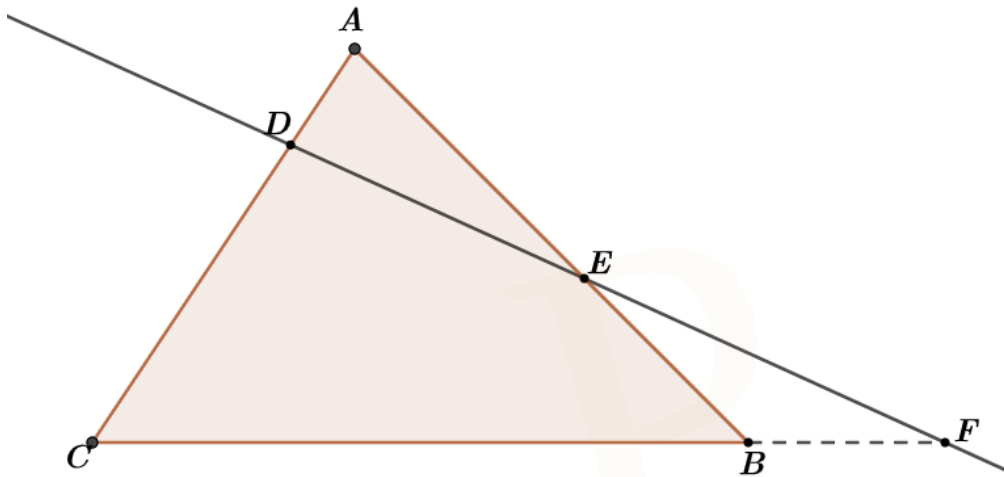
$$\text{Sen}(\hat{A}) = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{\text{Sen}(\hat{A})} = 2R}$$

■

Os demais resultados seguem o mesmo raciocínio acima.

13. TEOREMA DE MENELAUS

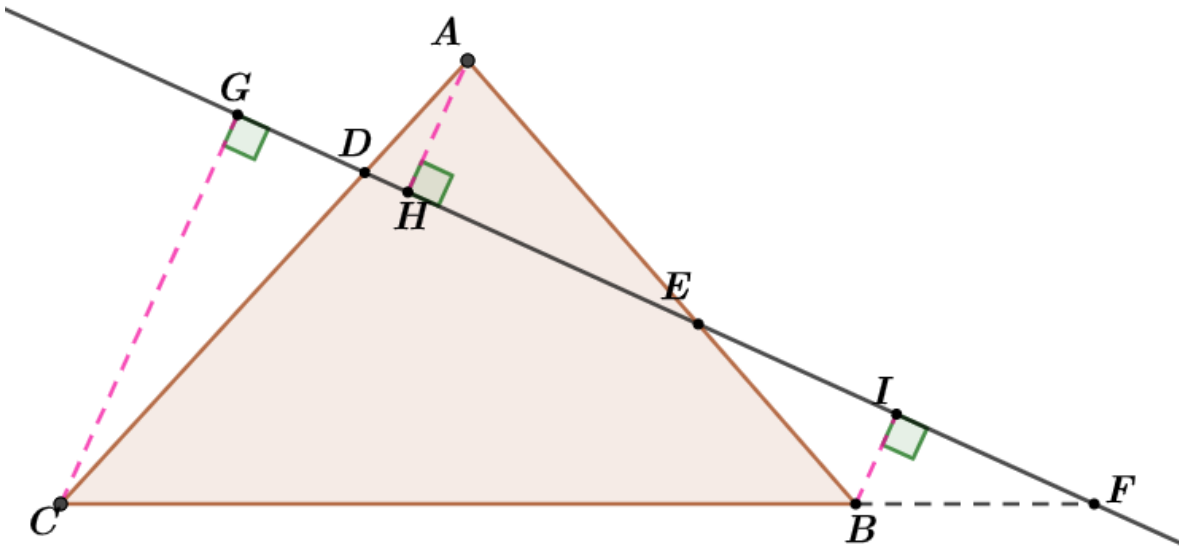
Considere um triângulo ABC e uma reta secante a dois de seus lados e ao prolongamento do terceiro lado.



$$\boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = 1}$$

(Demonstração)

Tomemos as perpendiculares sobre a reta secante, partindo dos vértices A, B e C do triângulo dado.



Por semelhança de triângulos:

$$(GDC) \sim (ADG)$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CG}} \quad (i)$$

$$(CGF) \sim (BIF)$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BI}} \quad (ii)$$

$$(AHE) \sim (EIB)$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{AH}} \quad (iii)$$

Multiplicando as três equações acima, temos:

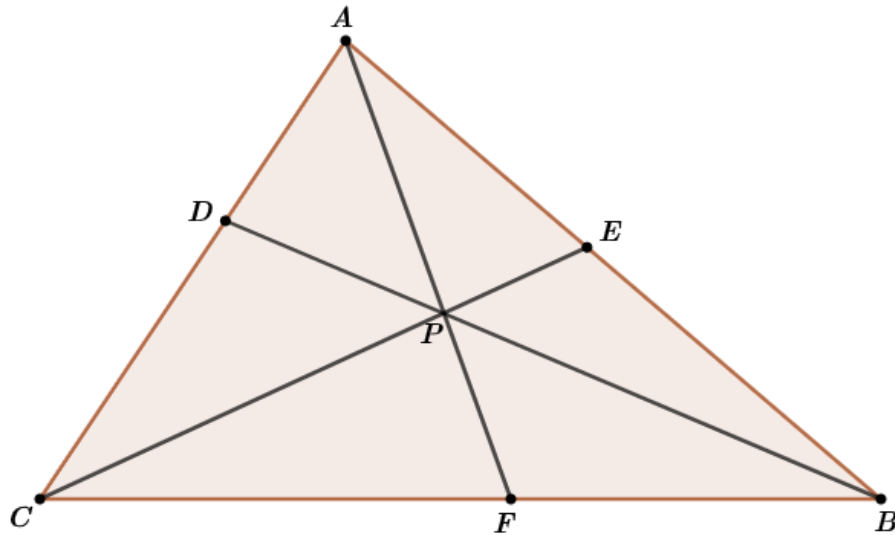
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = 1$$

■

14. TEOREMA DE CEVA

Num triângulo ABC, três cevianas AF, BD e CE concorrem se, e somente se:

$$\boxed{\overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CD} = \overline{DA} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{FC}}$$



(Demonstração)

Aplicando o teorema de menelaus no triângulo ACF:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} \cdot \overline{CB} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BF}}{\overline{AD}}$$

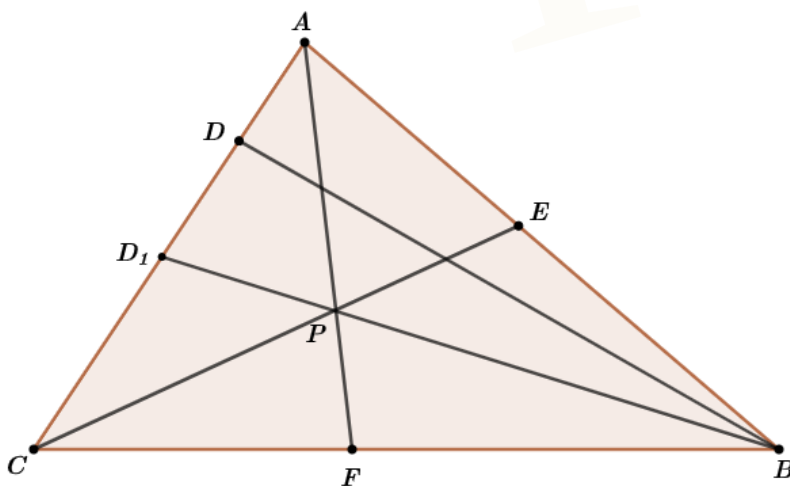
Agora, menelaus em ABF:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} \cdot \overline{BC} = \frac{\overline{EB} \cdot \overline{CF}}{\overline{AE}}$$

Daí,

$$\frac{\overline{EB} \cdot \overline{CF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BF}}{\overline{AD}} \Rightarrow \boxed{\overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF}}$$

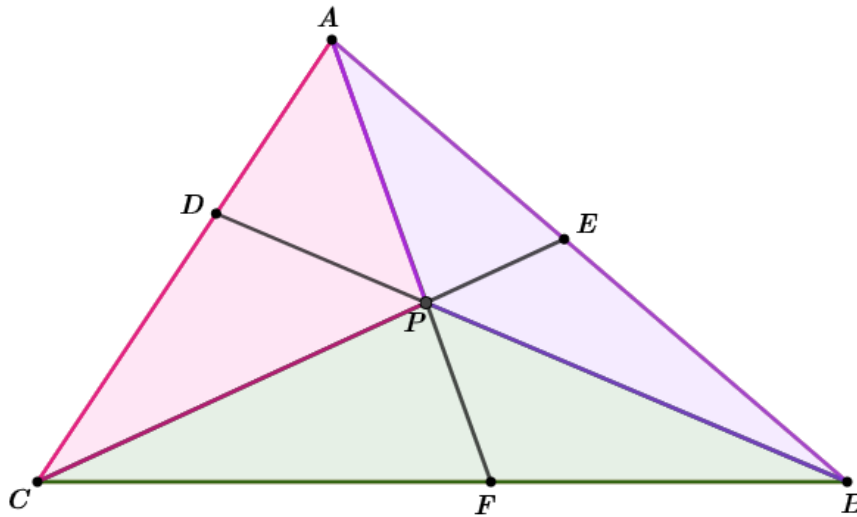
Note ainda que:



$$\overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF} \Rightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{D_1C} = \overline{AD_1} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1C}} \Leftrightarrow D \equiv D_1$$



Uma outra maneira de demonstrarmos a ida do teorema de ceva, é por áreas. Note:



$$[BCP] = S_a$$

$$[CAP] = S_b$$

$$[ABP] = S_c$$

Com efeito,

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} = \frac{S_b}{S_c};$$

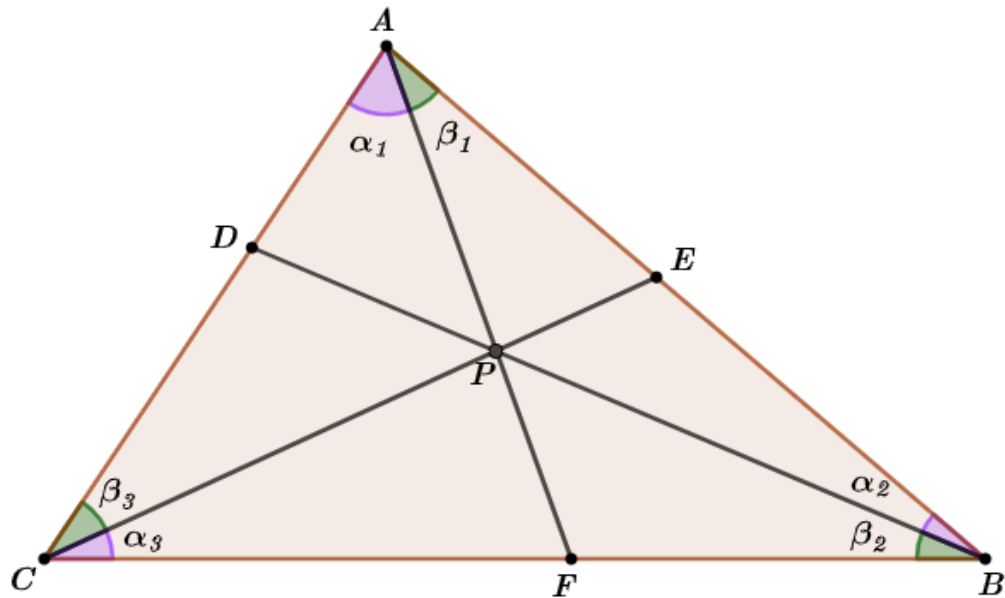
$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{S_c}{S_a};$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} = \frac{S_a}{S_c}$$

Multiplicando-se as equações acima, temos:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{AE}} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF}$$

14.1 CEVA TRIGONOMÉTRICO



$$\boxed{\text{Sen}(\alpha_1) \cdot \text{Sen}(\alpha_2) \cdot \text{Sen}(\alpha_3) = \text{Sen}(\beta_1) \cdot \text{Sen}(\beta_2) \cdot \text{Sen}(\beta_3)}$$

(Demonstração)

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{PC}}{\text{Sen}(\alpha_1)} = \frac{\overline{PA}}{\text{Sen}(\beta_3)} \Leftrightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\text{Sen}(\alpha_1)}{\text{Sen}(\beta_3)}$$

Analogamente,

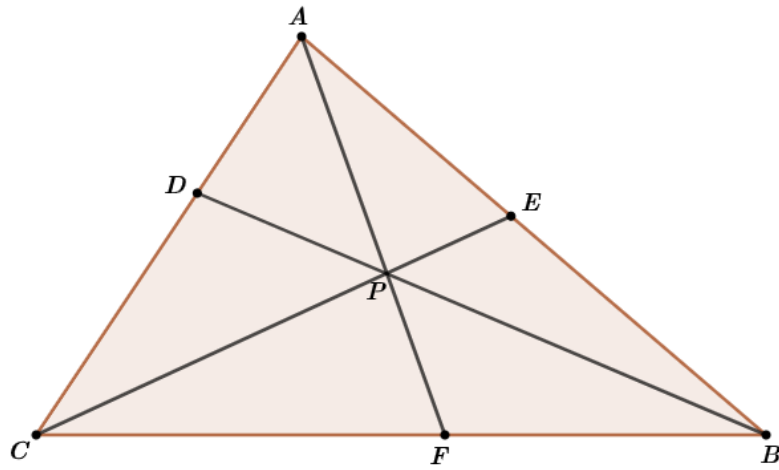
$$\frac{\overline{PA}}{\text{Sen}(\alpha_2)} = \frac{\overline{PB}}{\text{Sen}(\beta_1)} \Leftrightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\text{Sen}(\alpha_2)}{\text{Sen}(\beta_1)}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\text{Sen}(\alpha_3)} = \frac{\overline{PC}}{\text{Sen}(\beta_2)} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\text{Sen}(\alpha_3)}{\text{Sen}(\beta_2)}$$

Agora basta multiplicarmos as equações anteriores membro a membro.

$$\frac{\text{Sen}(\alpha_1)}{\text{Sen}(\beta_3)} \cdot \frac{\text{Sen}(\alpha_2)}{\text{Sen}(\beta_1)} \cdot \frac{\text{Sen}(\alpha_3)}{\text{Sen}(\beta_2)} = 1$$

14.2 TEOREMA DE VAN-AUBEL



$$\boxed{\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}}$$

(Demonstração)

Aplicando o teorema de menelaus em ACF, tem-se:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{FP}}{\overline{DC} \cdot \overline{PA}} \quad (i)$$

Agora, menelaus em AFB:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{PF}}{\overline{EB} \cdot \overline{PA}} \quad (ii)$$

Façamos agora (i) + (ii):

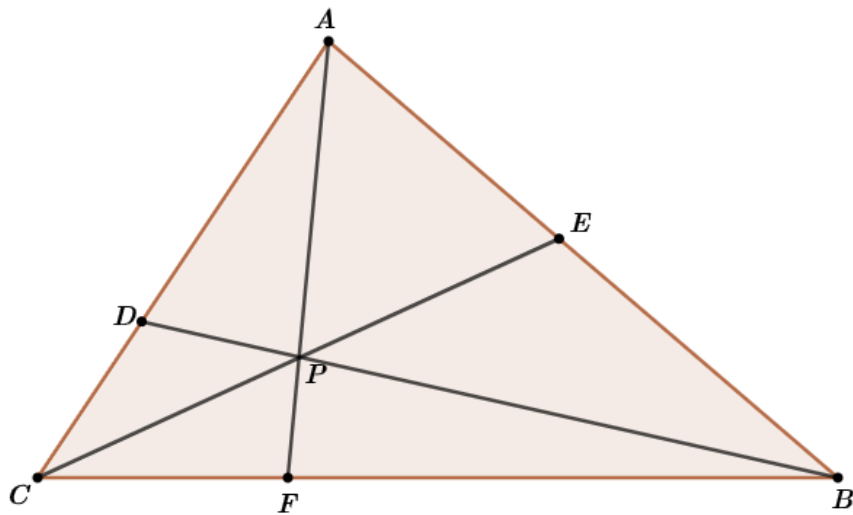
$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{FP}}{\overline{DC} \cdot \overline{PA}} + \frac{\overline{AE} \cdot \overline{PF}}{\overline{EB} \cdot \overline{PA}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \right),$$

Logo:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$$

■

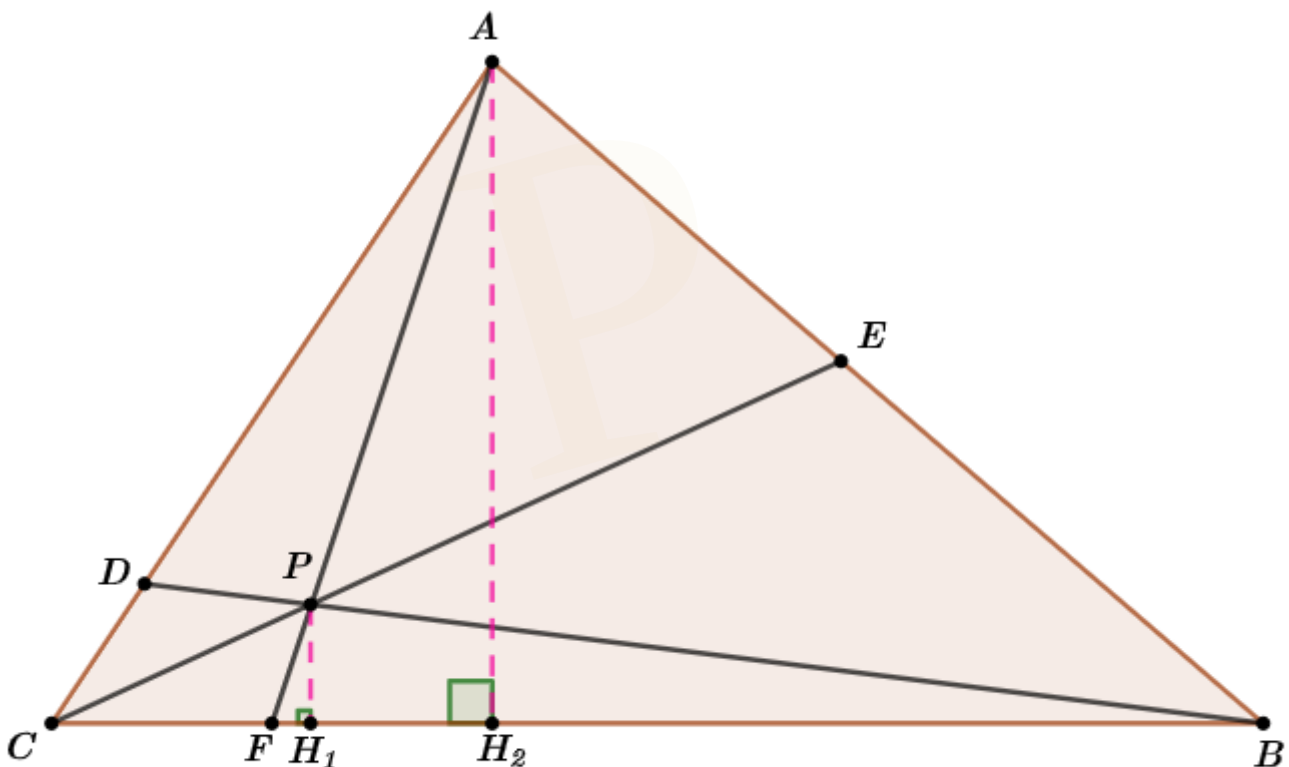
14.3 TEOREMA DE GERGONNE



$$\frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} + \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} = 1$$

(Demonstração)

Tomemos H_1 e H_2 como os pés das alturas traçadas a partir de P e A sobre o lado BC, respectivamente.



Com efeito,

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{PH_1}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AH_2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{PH_1}}{\overline{AH_2}}$$

Note que os triângulos PBC e ABC possuem a mesma base BC e, portanto, a razão entre as suas áreas será igual a razão entre suas alturas. Dessa forma,

$$\frac{[PCF] + [PBF]}{[ABC]} = \frac{\overline{PH_1}}{\overline{AH_2}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}}$$

$$\frac{[PCF] + [PBF]}{[ABC]} = \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}}$$

Analogamente,

$$\frac{[APD] + [PCD]}{[ABC]} = \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{[APE] + [BPE]}{[ABC]} = \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}}$$

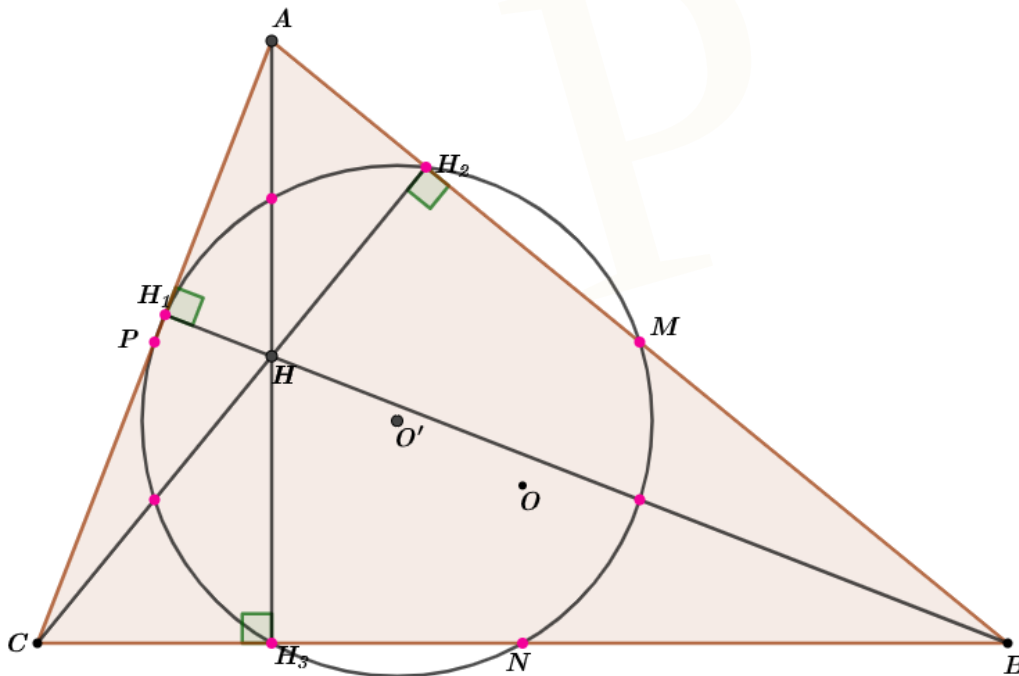
Agora basta somarmos as equações acima membro a membro

$$\frac{[PCF] + [PBF]}{[ABC]} + \frac{[APD] + [PCD]}{[ABC]} + \frac{[APE] + [BPE]}{[ABC]} = 1 = \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} + \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}}$$

■

15. O CÍRCULO DE 9 PONTOS

Seja ABC um triângulo qualquer. Tomemos o seu ponto órtico (H) e os pontos médios M, N e P dos lados AB, BC e AC respectivamente. O círculo que contém os pés das alturas, os pontos médios dos lados do triângulo e os pontos médios das distâncias do ortocentro aos vértices de ABC é chamado **círculo de 9 pontos**.

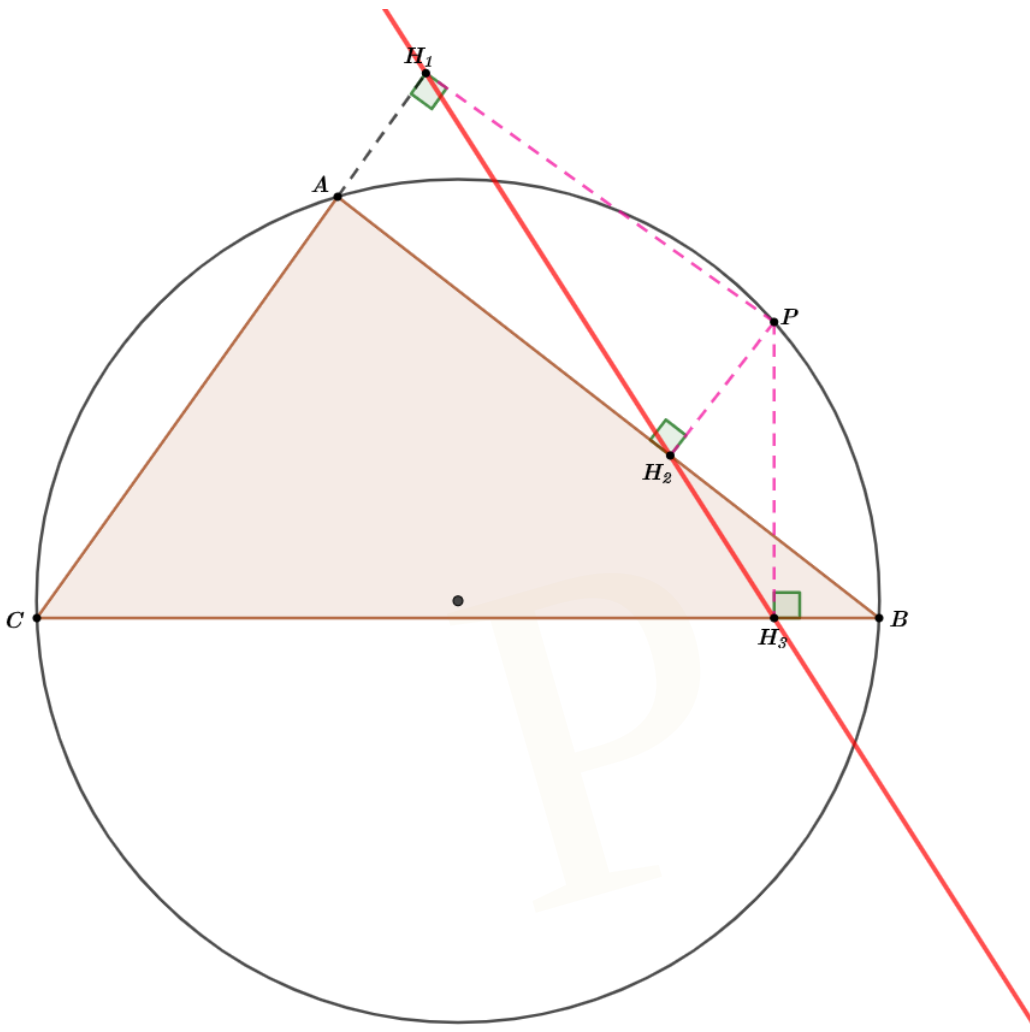


OBS:

- 1- O centro O' é ponto médio de H e O , sendo O o circuncentro do triângulo ABC .
- 2- O círculo de 9 pontos possui raio $\frac{R}{2}$.
- 3- Os triângulos ABC , BCH , BAH e ACH possuem o mesmo círculo de 9 pontos.

16. RETA DE SIMPSOM-WALACE

Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados desse triângulo, são colineares.



Note que os quadriláteros PH_2AH_1 e PH_2H_3B são inscritíveis, o que implica em:

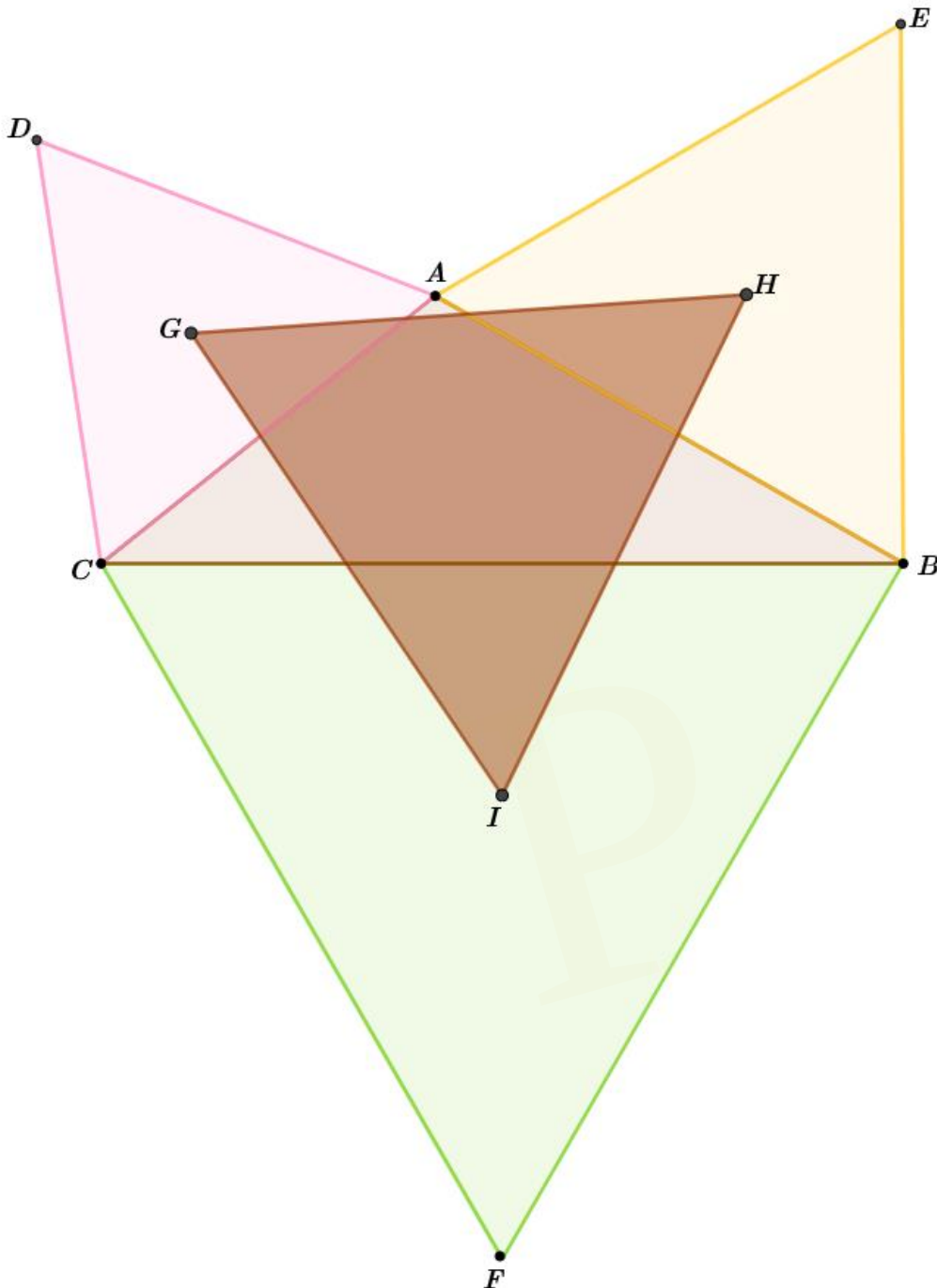
$$H_1\hat{P}A = H_1\hat{H}_2A \text{ e } B\hat{P}H_2 = B\hat{H}_2H_3$$

E ainda os quadriláteros CH_1PH_3 e $CAPB$ também são inscritíveis.

17. O TEOREMA DE NAPOLEÃO

Tome um triângulo ABC qualquer e os triângulos equiláteros ABE, CBF e ACD construídos a partir de seus lados.

Os baricentros H, I e G dos triângulos equiláteros ABE, CBF e ACD, respectivamente, constituem um triângulo equilátero GHI.

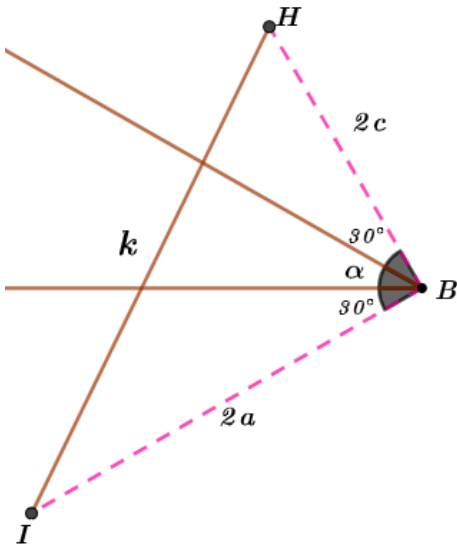


(Demonstração)

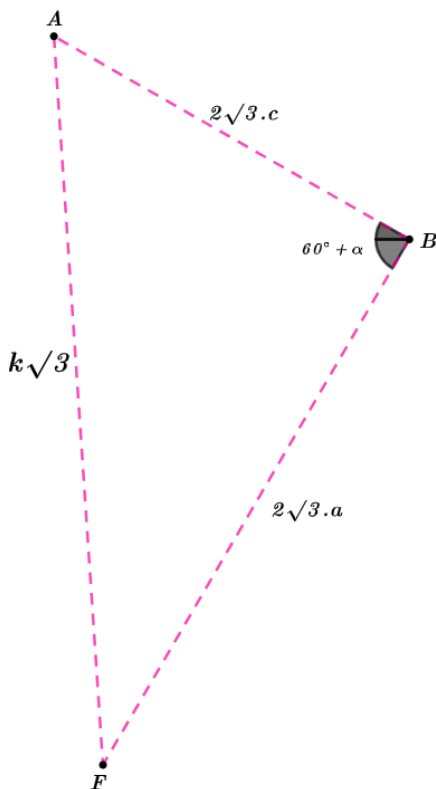
Existe uma abordagem vetorial para essa demonstração, mas neste material focaremos numa demonstração através da geometria plana.

Em primeiro lugar, note que $\overline{AF} = \overline{BD} = \overline{CE}$.

No triângulo BHI, temos:



E no triângulo BAF:



É fácil ver que os triângulos acima são semelhantes (*caso LAL*). A razão de semelhança entre os triângulos é $\sqrt{3}$. Portanto, $\overline{AF} = k \cdot \sqrt{3} = \overline{BD} = \overline{CE}$.

Analogamente, $\overline{HG} = \overline{GI} = k$

■

18. AS RELAÇÕES DE EULER

- Os cinco raios

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

- Distância do incentro ao circuncentro:

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

- Distância do circuncentro a um ex-incentro:

$$\overline{OE_a} = \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_a}$$

$$\overline{OE_b} = \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_b}$$

$$\overline{OE_c} = \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_c}$$

- Distância do incentro a um ex-incentro:

$$\overline{IE_a} = 2\sqrt{R(r_a - r)}$$

$$\overline{IE_b} = 2\sqrt{R(r_b - r)}$$

$$\overline{IE_c} = 2\sqrt{R(r_c - r)}$$

- Distância entre dois ex-incentros:

$$\overline{E_a E_b} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot (r_a + r_b)}$$

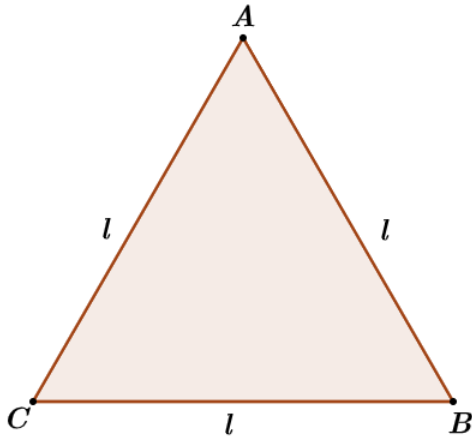
$$\overline{E_a E_c} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot (r_a + r_c)}$$

$$\overline{E_b E_c} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot (r_b + r_c)}$$

19. RELAÇÕES DE ÁREAS

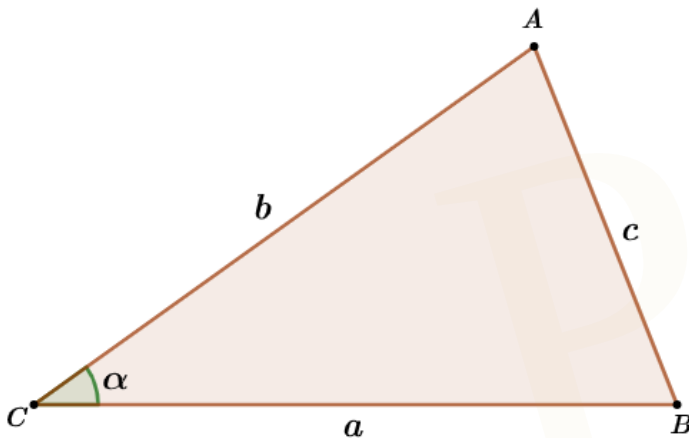
Tome nota: As áreas a seguir serão representadas por S.

19.1 TRIÂNGULO EQUILÁTERO



$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

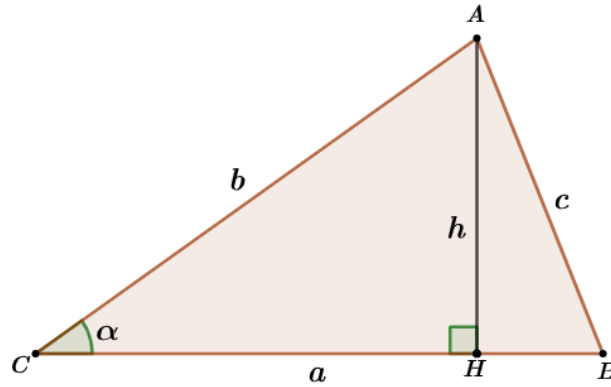
19.2 ÁREA EM FUNÇÃO DO SENO DE UM ÂNGULO



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

(Demonstração)

Partindo de A, trace a altura (h) relativa ao lado $\overline{BC} = a$.



De fato,

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad (i)$$

Além disso,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \therefore \boxed{h = b \cdot \text{sen}(\alpha)} \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i):

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

■

19.3 ÁREA EM FUNÇÃO DOS RAIOS DAS CIRCUNFERÊNCIAS INSCRITA E CIRCUNSCRITA

Vale reforçar as seguintes representações:

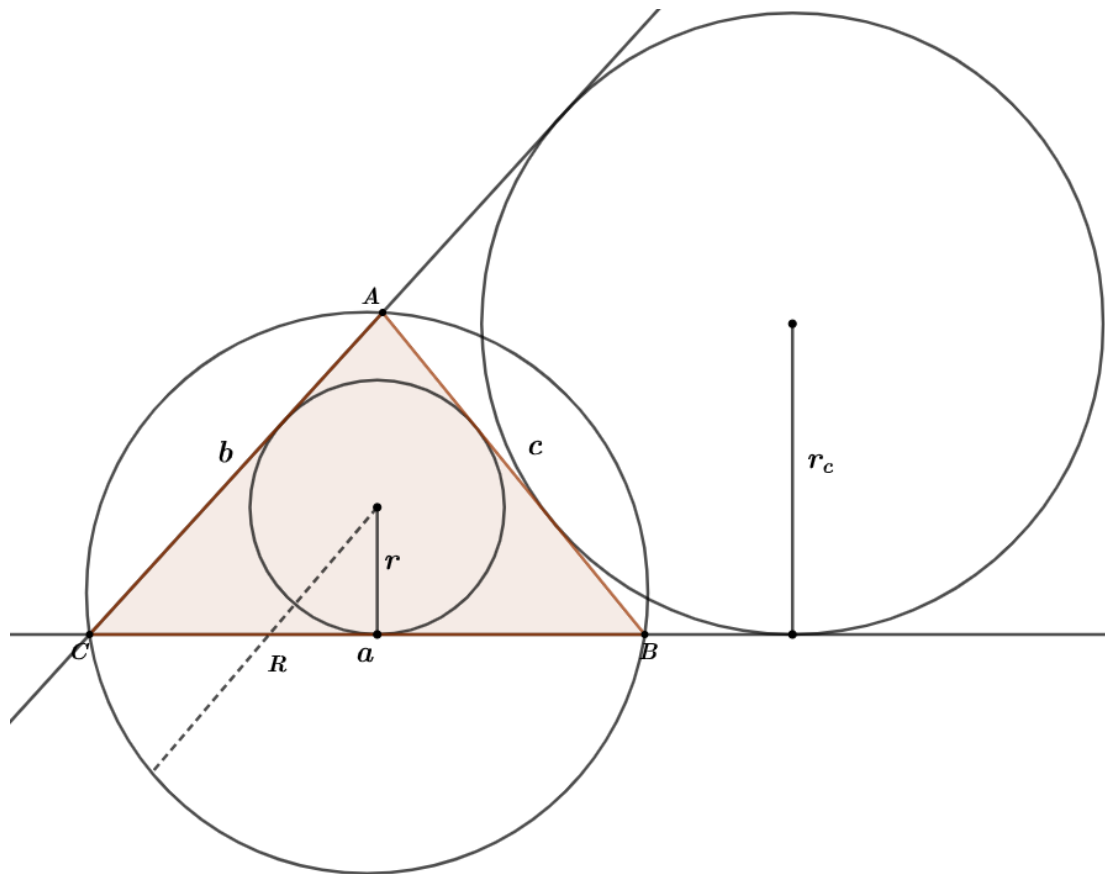
r : raio da circunferência inscrita;

R : raio da circunferência circunscrita;

r_a : raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado a ;

r_b : raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado b ;

r_c : raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado c ;



$$\boxed{S = r \cdot p} \quad (i)$$

$$\boxed{S = r_a \cdot (p - a)} \quad (ii)$$

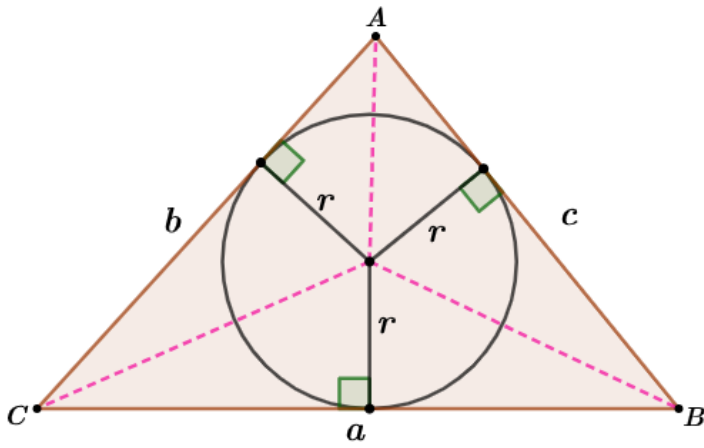
$$\boxed{S = r_b \cdot (p - b)} \quad (iii)$$

$$\boxed{S = r_c \cdot (p - c)} \quad (iv)$$

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}} \quad (v)$$

(Demonstrações)

- (i) Conectando o centro da circunferência inscrita aos vértices do triângulo ABC, temos:

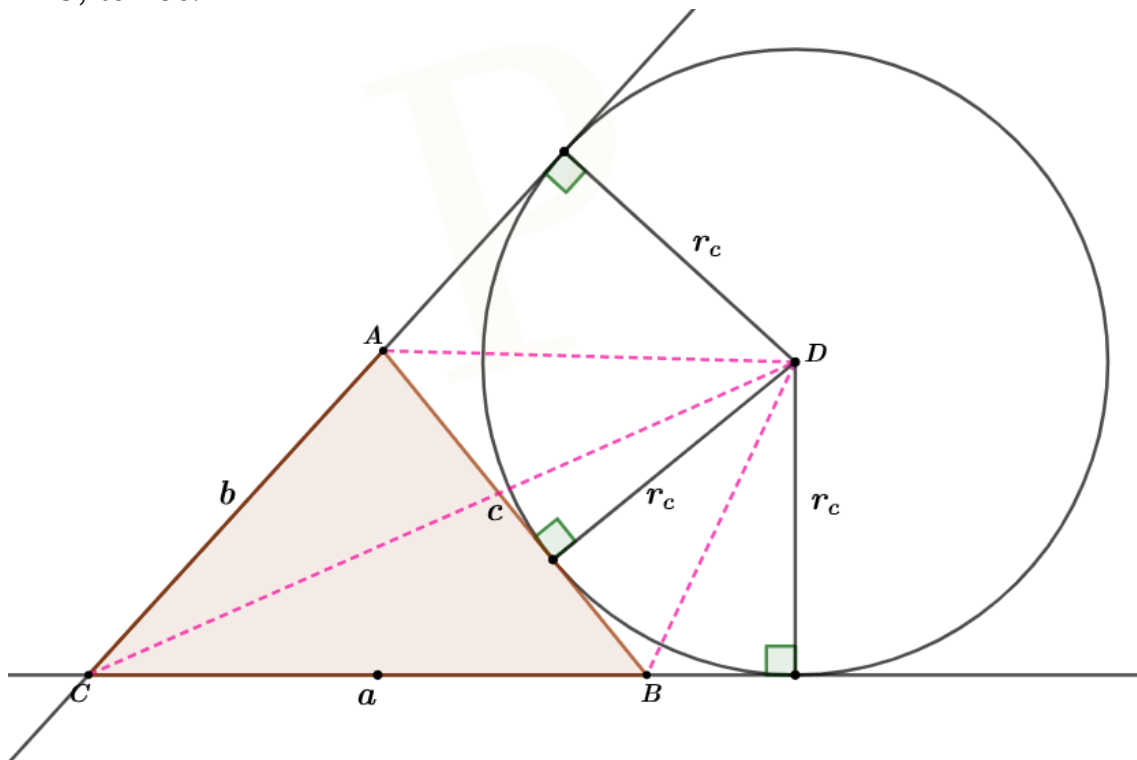


Note que a área do triângulo ABC pode ser obtida através da soma das áreas dos três triângulos formados de altura r .

$$S = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a + b + c}{2} = r \cdot p$$

■

- (ii) Conectando o centro D da circunferência ex-inscrita aos vértices do triângulo ABC, temos:



Note que a área S de ABC pode ser obtida da seguinte maneira:

$$S = [CBD] + [ACD] - [ABD]$$

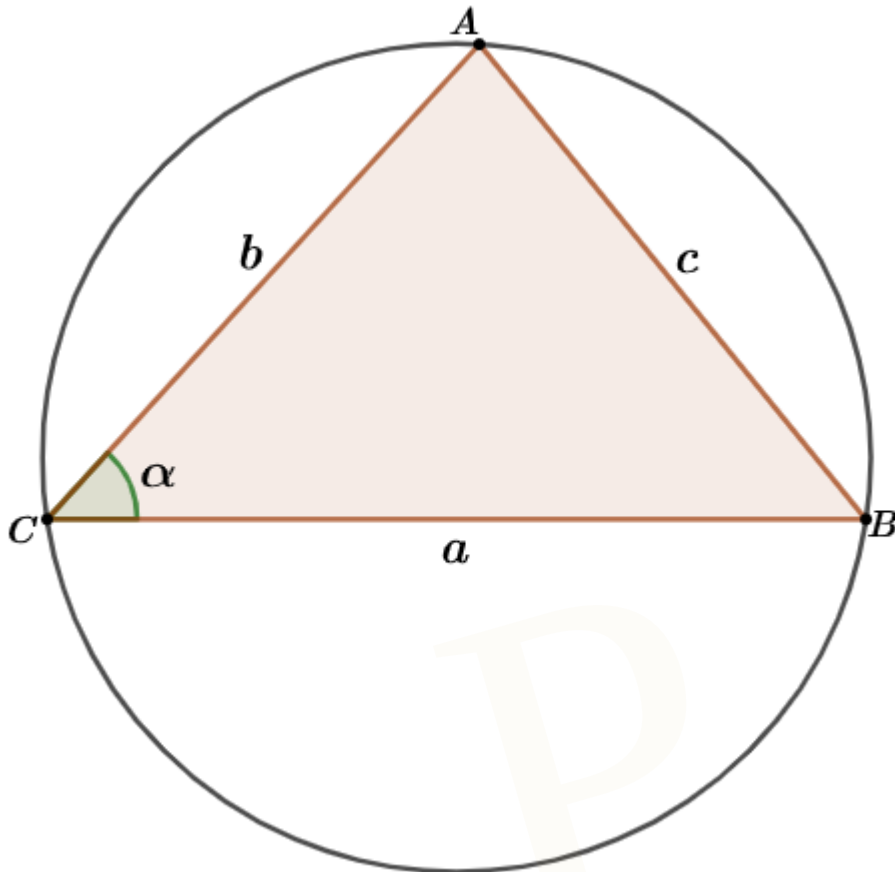
Logo,

$$S = \frac{a \cdot r_c}{2} + \frac{b \cdot r_c}{2} - \frac{c \cdot r_c}{2} = r_c \cdot \frac{a + b - c}{2} = r_c \cdot (p - c).$$

■

As demonstrações dos itens (ii), (iii) e (iv) são inteiramente análogas.

(v) De **19.2** temos:



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

Pela lei dos senos:

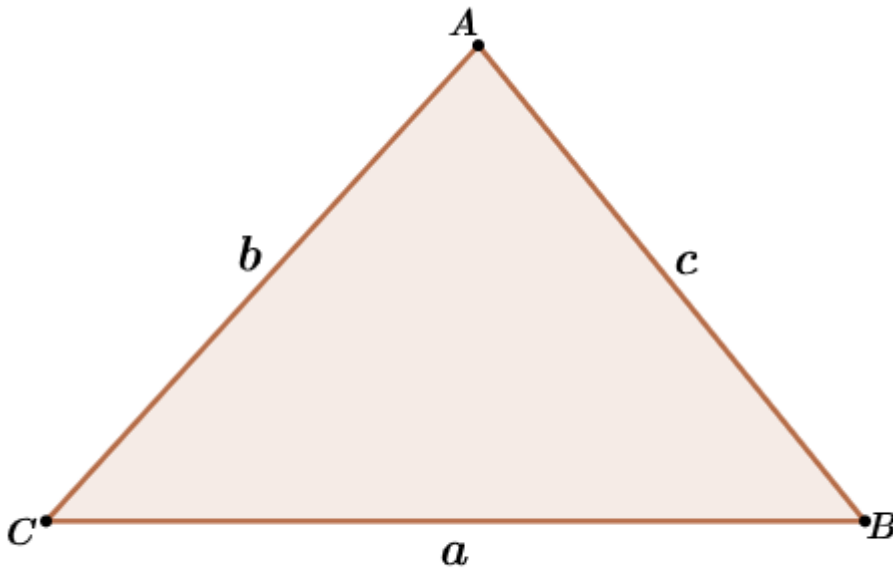
$$\frac{c}{\text{sen}(\alpha)} = 2R \quad \therefore \text{sen}(\alpha) = \frac{c}{2R}$$

Daí,

$$S = \frac{abc}{4R}$$

■

19.4 RADICAL DE HERON

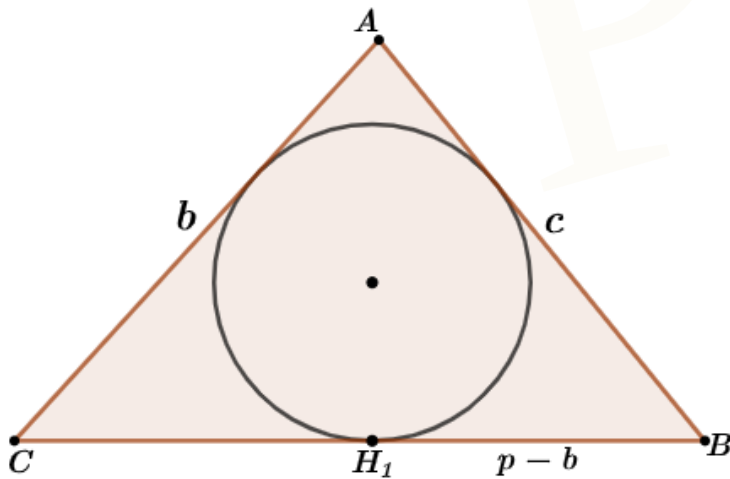


$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

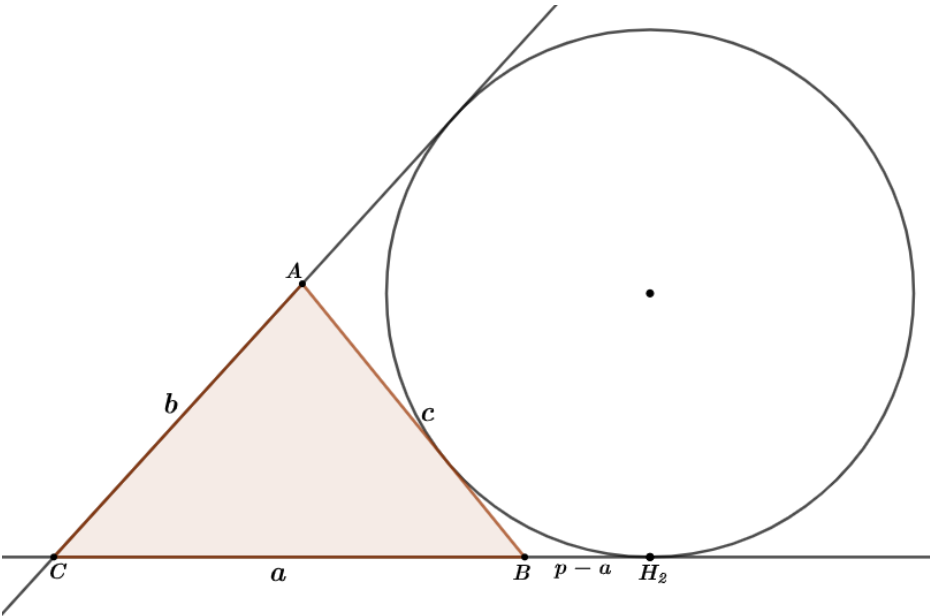
(Demonstração)

Na demonstração a seguir utilizaremos dois fatos importantes

Fato 1: $\overline{H_1B} = p - b$

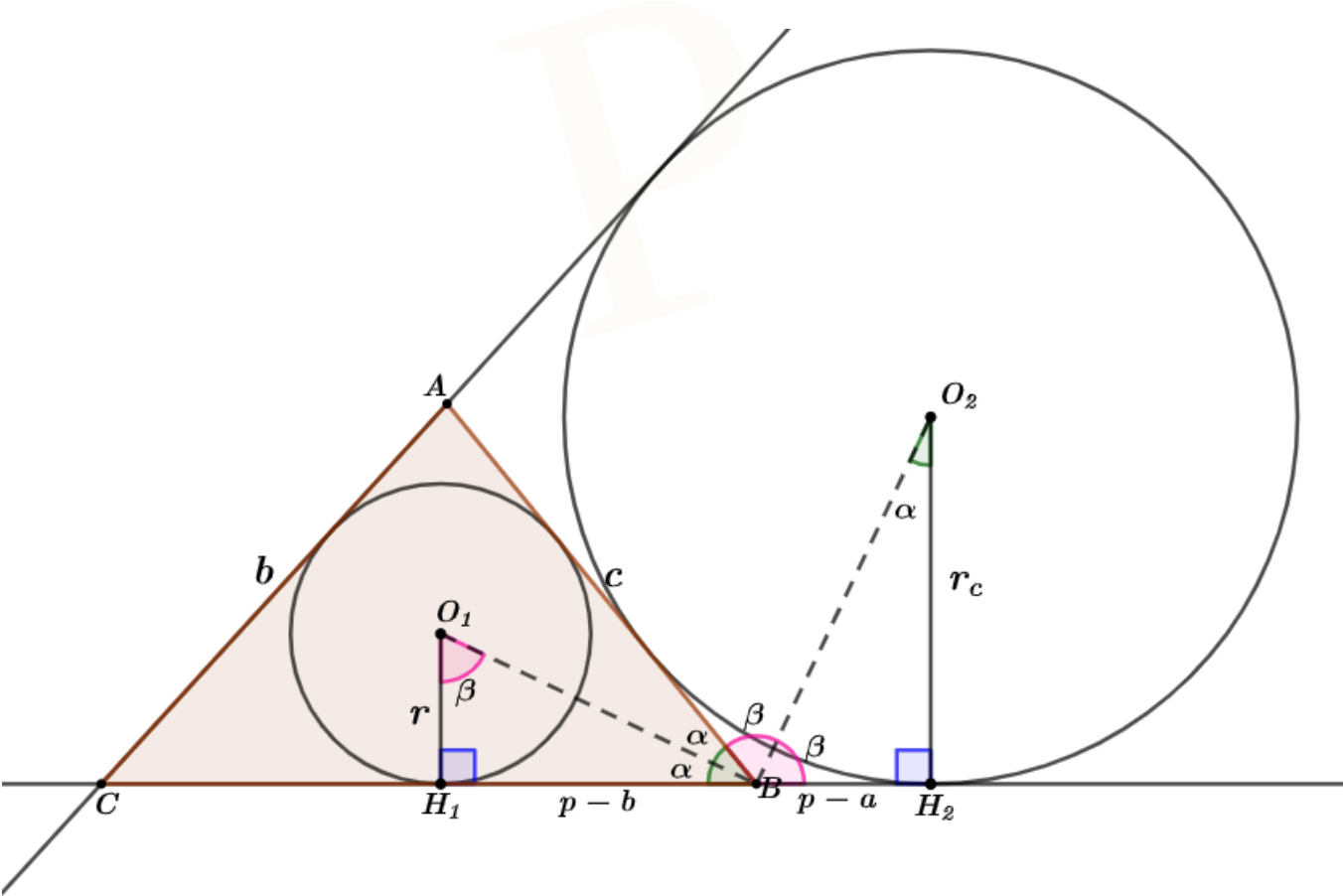


Fato 2: $\overline{BH_2} = p - a$



Ambos os fatos podem ser demonstrados via relações métricas na circunferência.

Dessa forma, podemos concluir que os triângulos O_1H_1B e O_2H_2B são semelhantes. Veja:



Com efeito,

$$\frac{r}{p-a} = \frac{p-b}{r_c} \therefore r \cdot r_c = (p-a) \cdot (p-b)$$

Pelos itens (i) e (iv) do tópico **19.3** segue:

$$\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-c} = (p-a) \cdot (p-b) \therefore \boxed{S^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

■

Tome nota:

Multiplicando-se as relações obtidas nos itens (i), (ii), (iii) e (iv) do tópico 19.3, temos:

$$\begin{cases} S = r \cdot p \\ S = r_a \cdot (p-a) \\ S = r_b \cdot (p-b) \\ S = r_c \cdot (p-c) \end{cases}$$

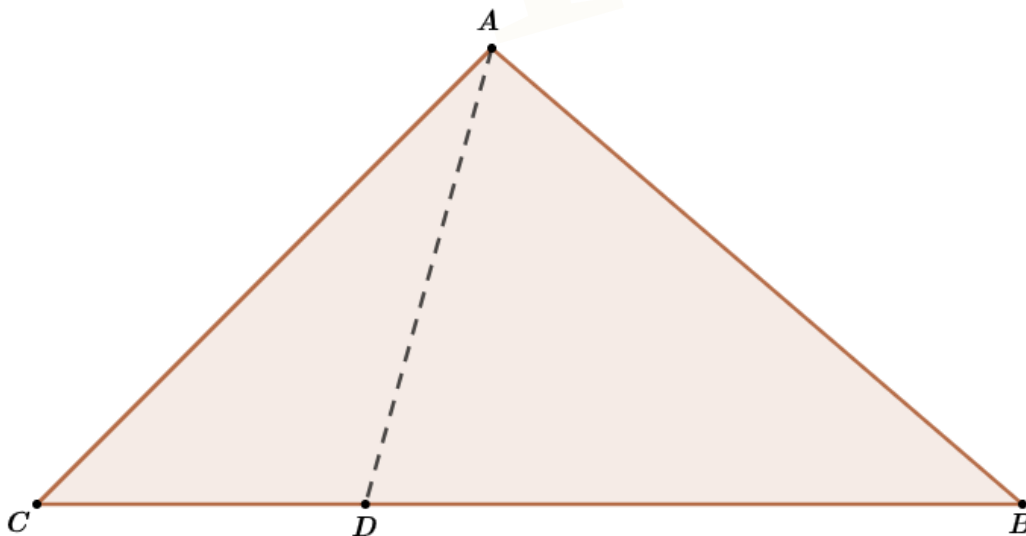
$$\therefore S^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot \underbrace{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}_{S^2}$$

Logo,

$$\boxed{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

19.5 IDEIA DO COLADO

Seja ABC um triângulo qualquer. Partindo de A traça-se uma ceviana que encontra o lado $\overline{BC}$ em D.



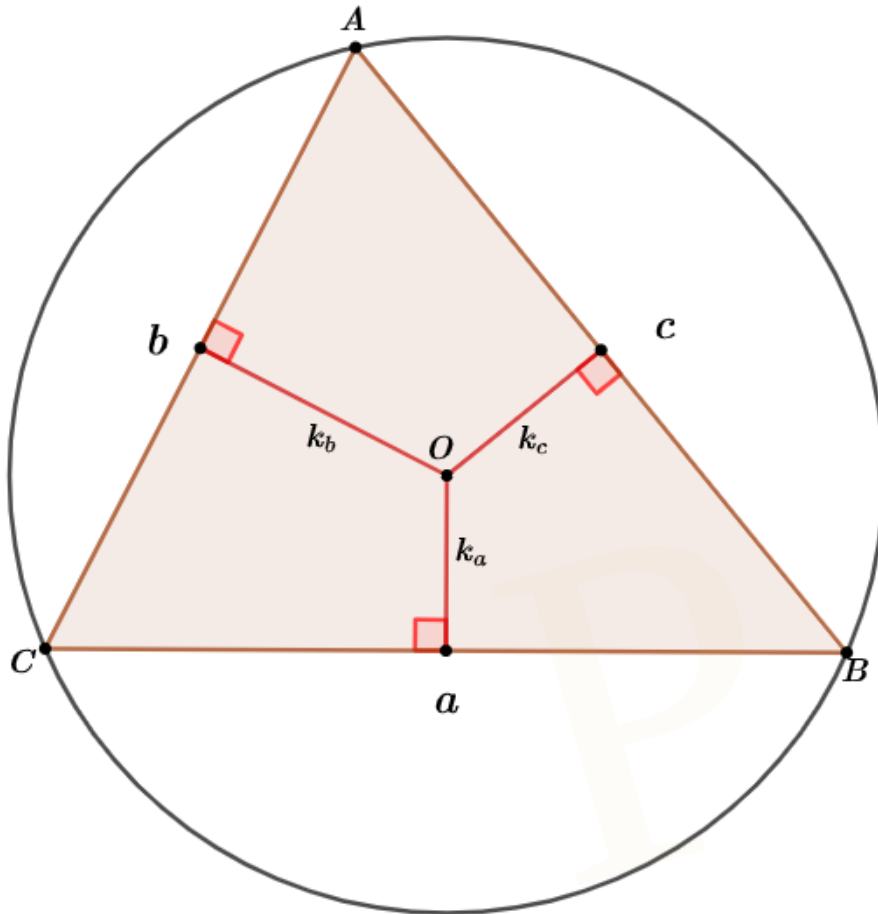
Note que os triângulo ADC e ABD possuem a mesma altura e, portanto, a razão entre as suas áreas será igual a razão entre as suas bases. Com efeito,

$$\frac{[ACD]}{[ABD]} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

20. O TEOREMA DAS PROJEÇÕES

Considere o triângulo ABC com circuncentro O . Denote:

- $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$
- k_a, k_b, k_c : projeções ortogonais de O sobre $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, respectivamente.



$$k_a + k_b + k_c = R + r$$

Onde R e r são os raios das circunferências inscrita e circunscrita respectivamente.

(Demonstração)

FATO 1.

$$a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

$$b = c \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{C}$$

$$c = b \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{B}$$

Somando as equações acima membro a membro:

$$2p = (b + c) \cdot \cos \hat{A} + (a + c) \cdot \cos \hat{B} + (a + b) \cdot \cos \hat{C}$$

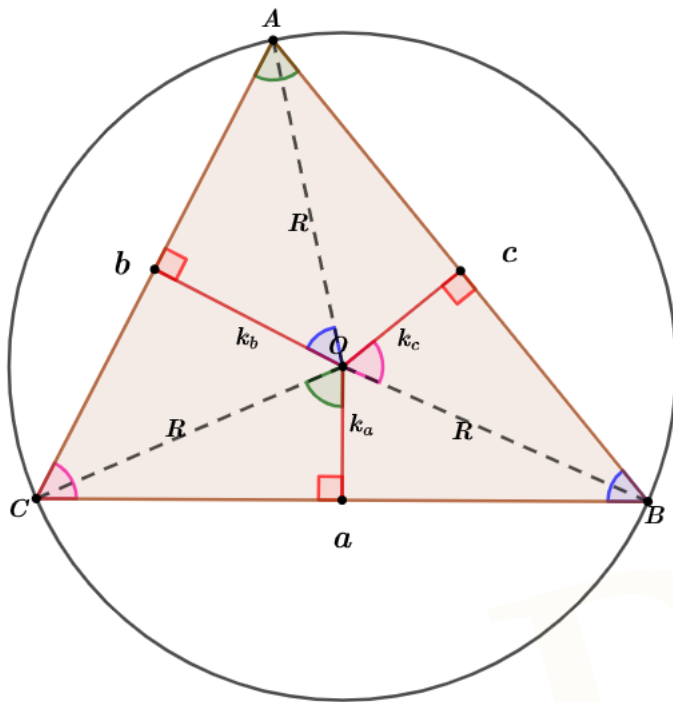
FATO 2.

$$p.r = \frac{a.k_a}{2} + \frac{b.k_b}{2} + \frac{c.k_c}{2}$$

Logo,

$$2p.r = a.k_a + b.k_b + c.k_c \quad (i)$$

FATO 3.



$$\begin{cases} k_a = R \cdot \cos \hat{A} \\ k_b = R \cdot \cos \hat{B} \\ k_c = R \cdot \cos \hat{C} \end{cases}$$

Com efeito,

$$k_a(b + c) = R \cdot \cos \hat{A} \cdot (b + c)$$

$$k_b(a + c) = R \cdot \cos \hat{B} \cdot (a + c)$$

$$k_c(a + b) = R \cdot \cos \hat{C} \cdot (a + b)$$

Somando as três equações acima:

$$k_a(b + c) + k_b(a + c) + k_c(a + b) = R \cdot 2p \quad (ii)$$

Portanto, de (i) + (ii):

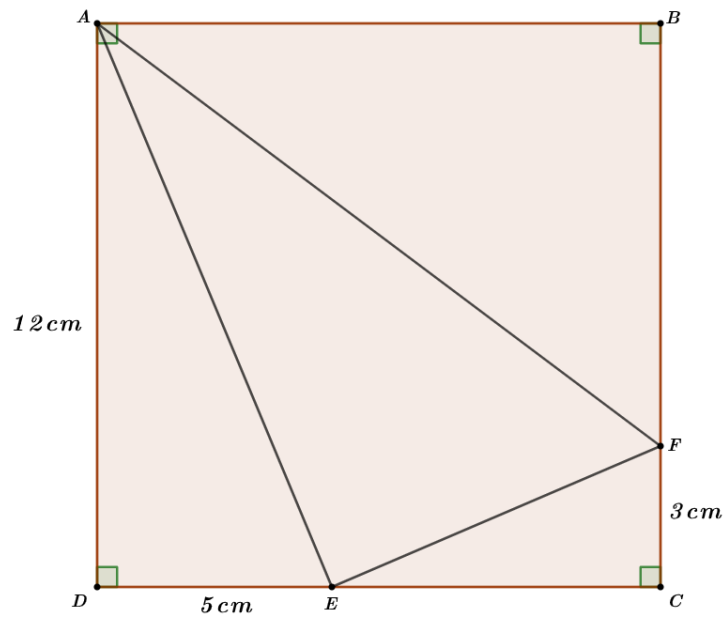
$$k_a + k_b + k_c = R + r$$

■

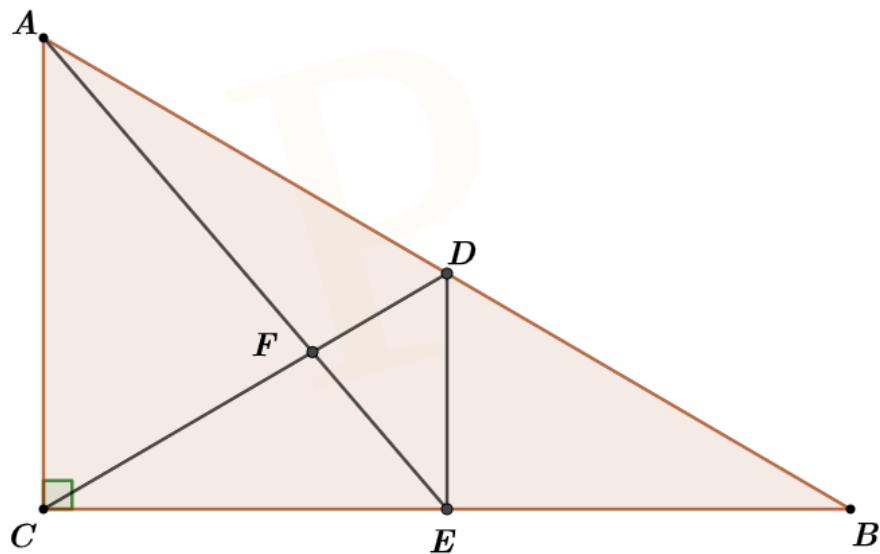


- PROBLEMAS -

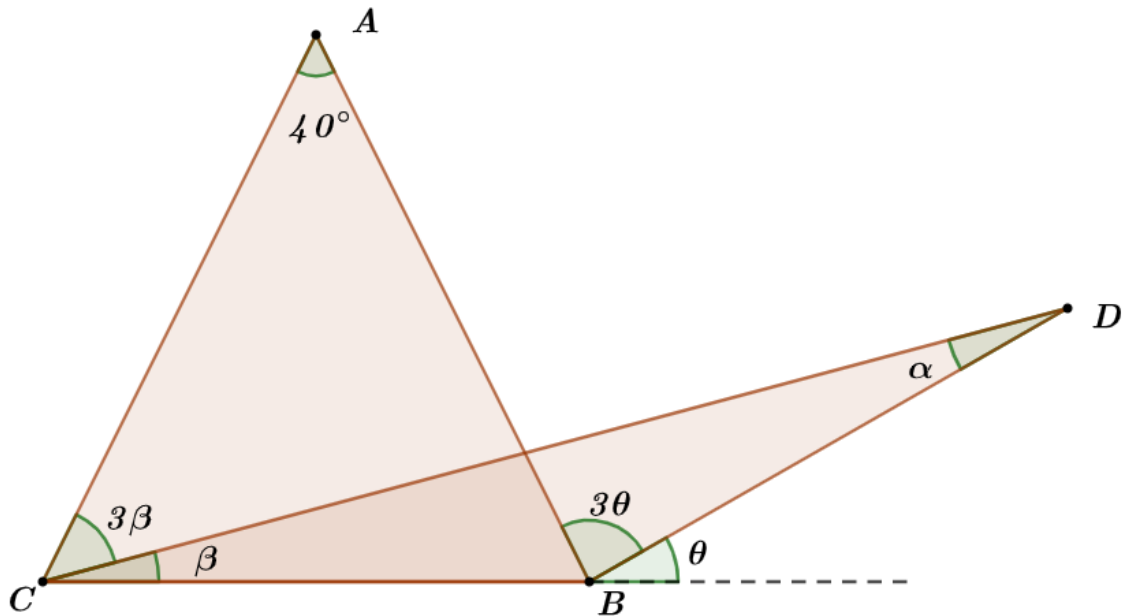
Problema 01. Considere o quadrado $ABCD$ abaixo de lado 12 cm . Nele, constrói-se um triângulo AEF . Classifique este triângulo quanto a natureza de seus ângulos.



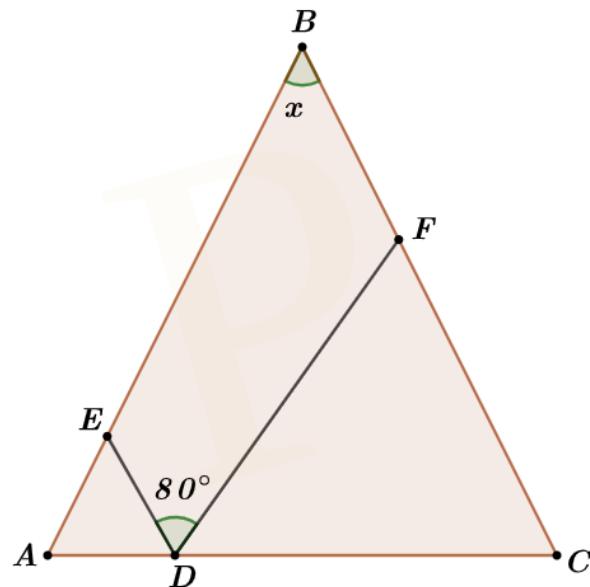
Problema 02. Na figura, o ponto E é ponto médio de BC , e o segmento DE é paralelo a AC . Sendo $AB = 28\text{ cm}$, calcule a medida do segmento FD .



Problema 03. Determine o valor de α , na figura abaixo.

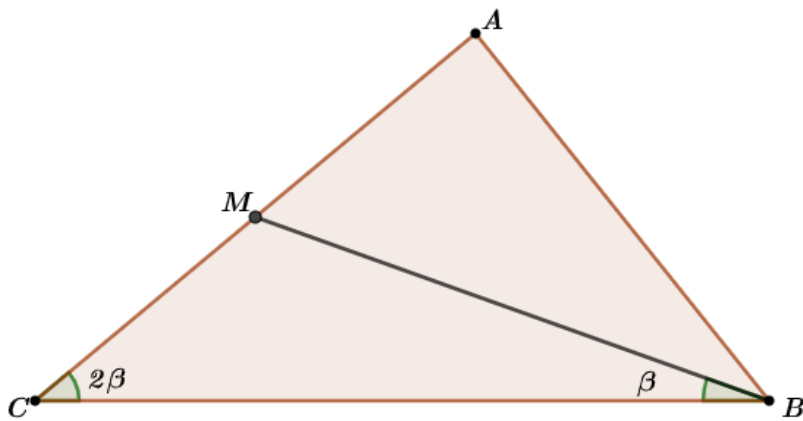


Problema 04. (FUVEST) Na figura abaixo, tem-se que $AD = AE$, $CD = CF$ e $BA = BC$. Se o ângulo EDF mede 80° , então o ângulo ABC mede:

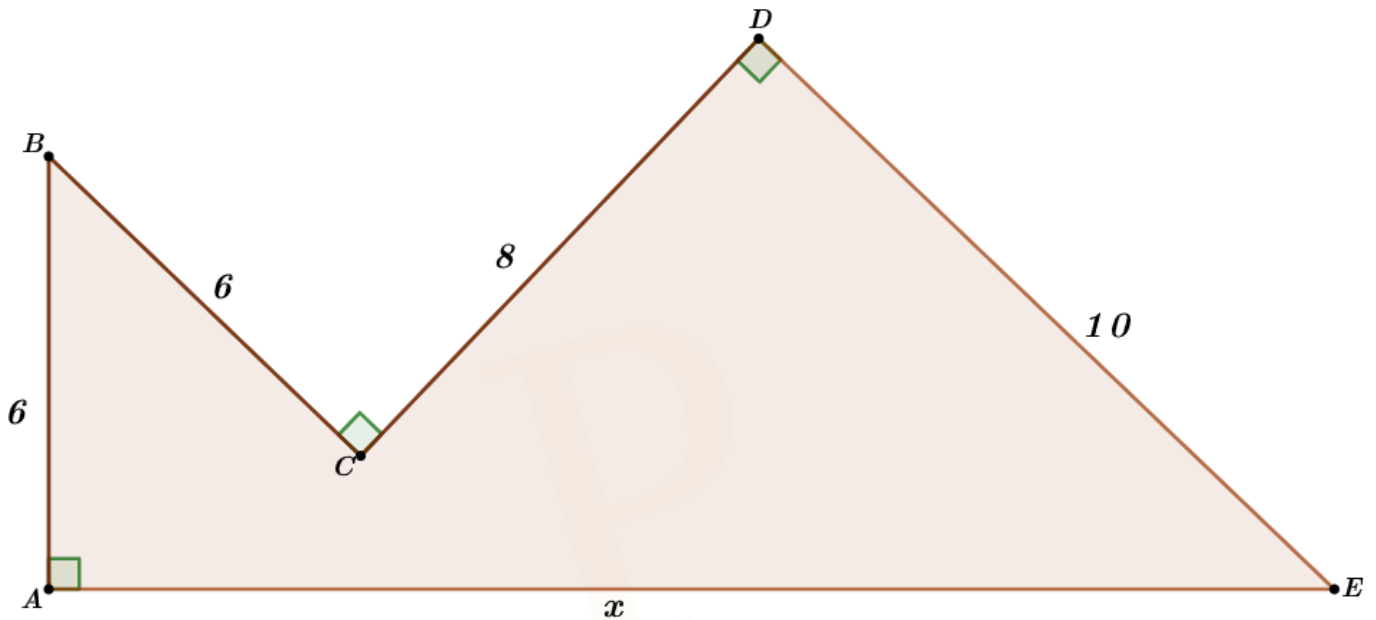


- a) 20°
- b) 30°
- c) 50°
- d) 60°
- e) 90°

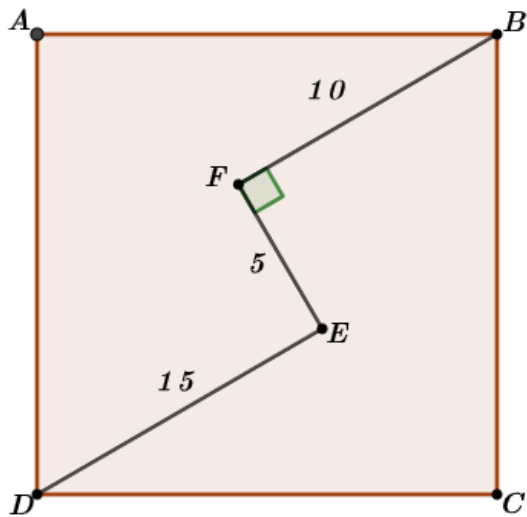
Problema 05. Considere o triângulo ABC abaixo. M é ponto médio de AC e o ângulo $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Determine o valor de β .



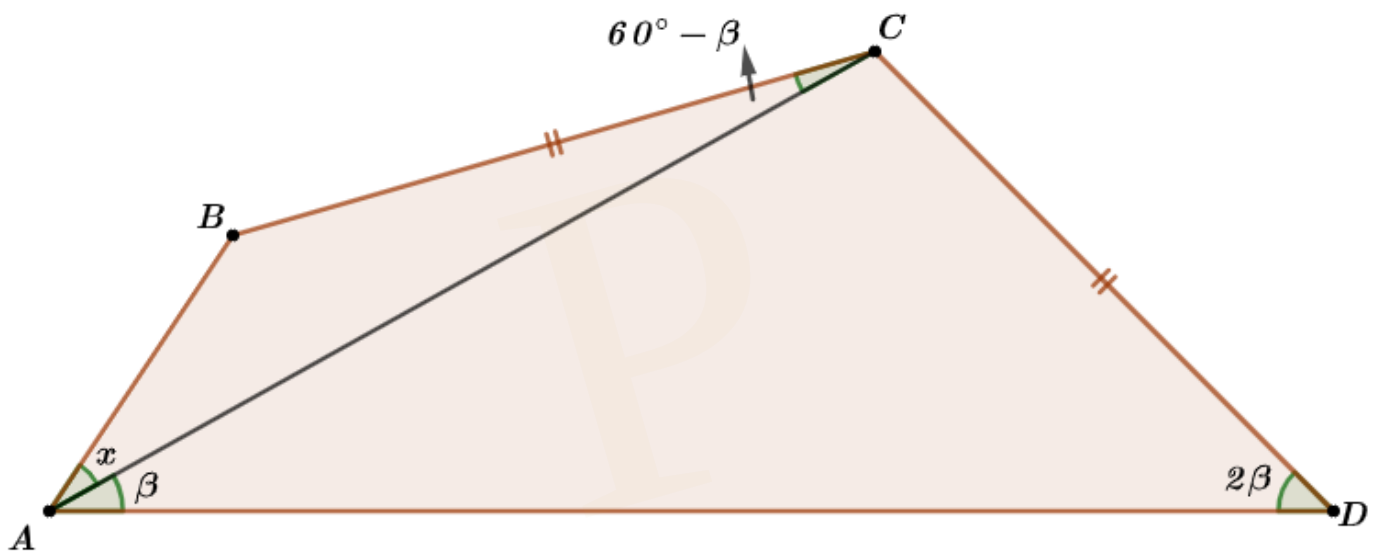
Problema 06. No pentágono côncavo abaixo, temos $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$; $\overline{CD} = 8$, $\overline{DE} = 10$. Além disso, $\overline{AE} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ e $\overline{CD} \perp \overline{DE}$. Determine o valor do segmento $\overline{AE}$.



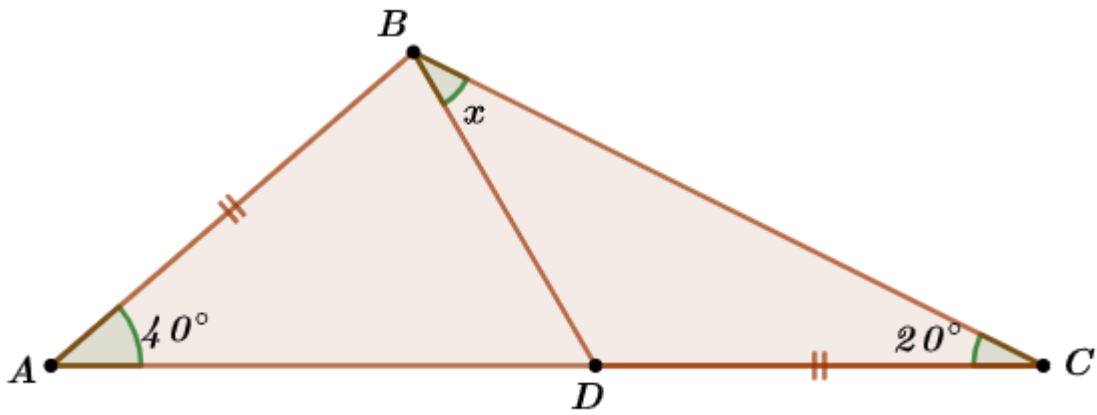
Problema 07. O quadrilátero abaixo trata-se de um quadrado. Munido das condições métricas do problema, calcule a área deste quadrado.



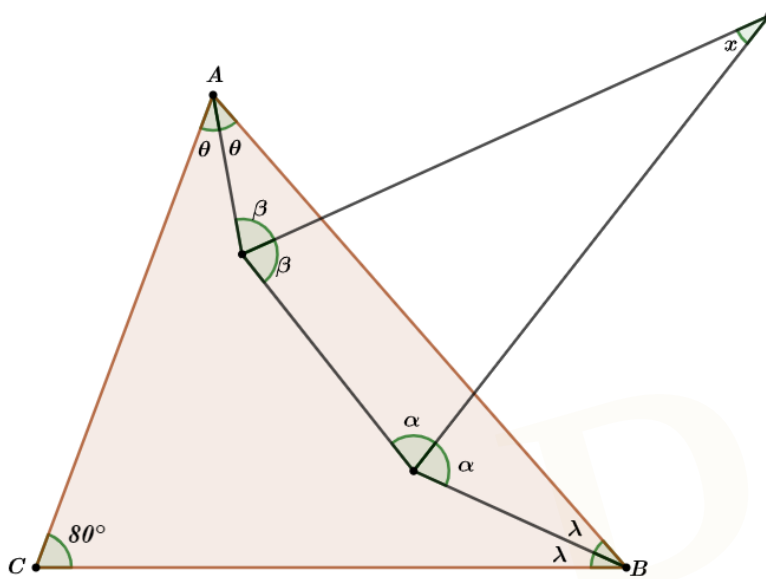
Problema 08. Na figura abaixo, quer-se o valor de x . Os segmentos BC e CD são congruentes.



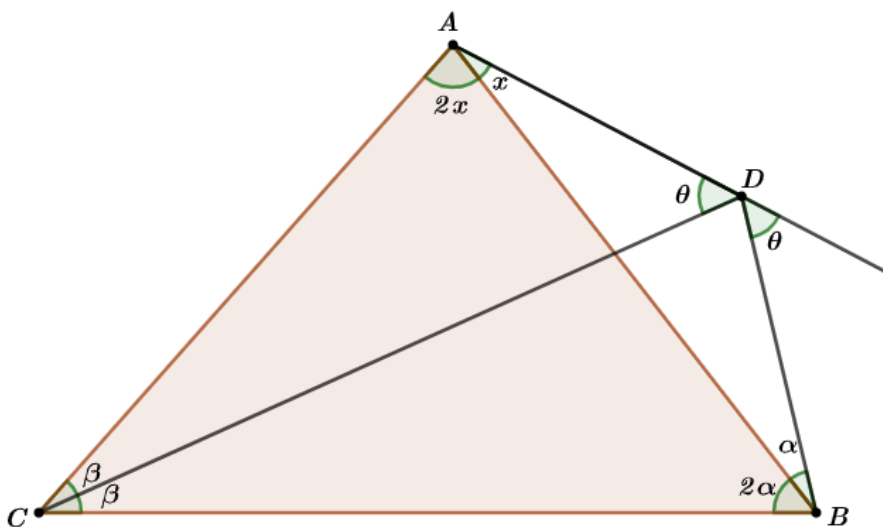
Problema 09. Na figura, quer-se o valor de x . Os segmentos AB e CD são congruentes.



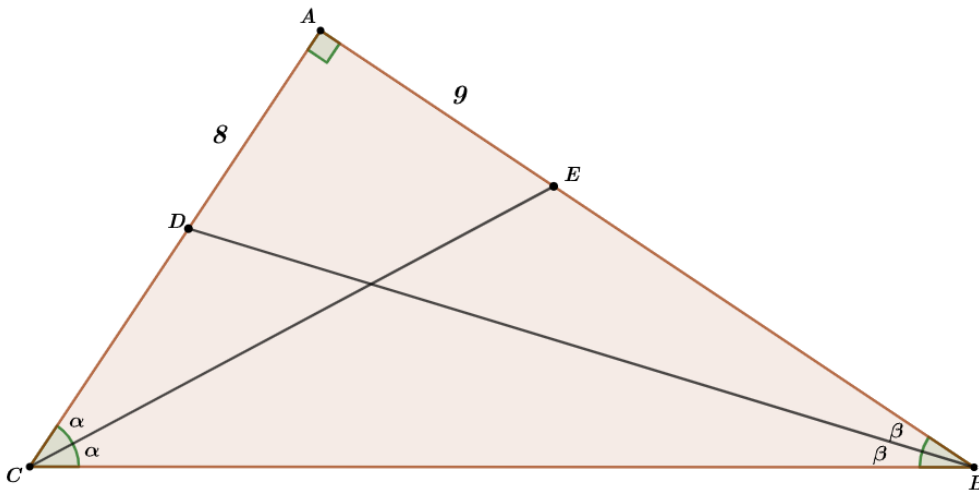
Problema 10. Considere a figura abaixo. Determine o valor de x .



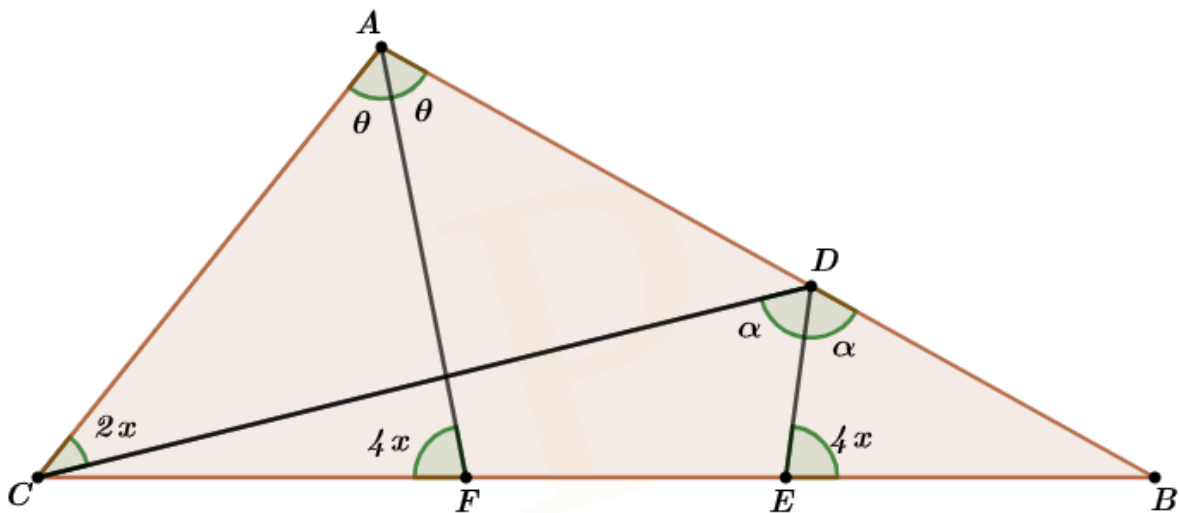
Problema 11. Quer-se x .



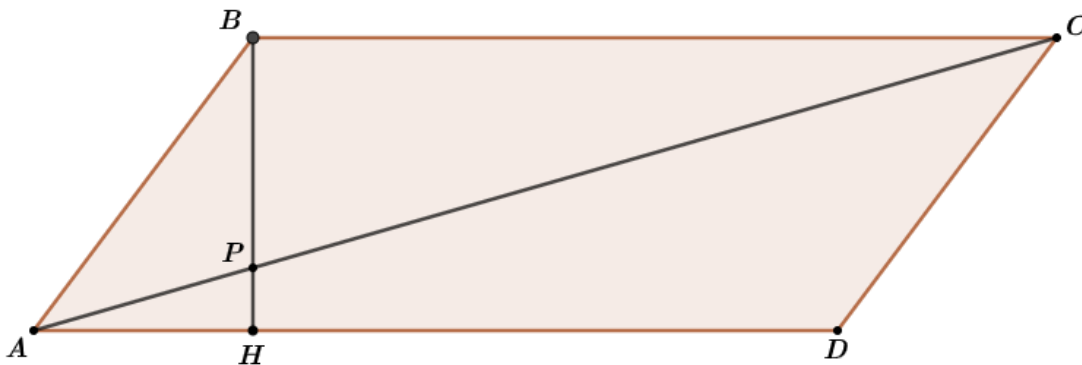
Problema 12. Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em A. CE e BD são bissetrizes dos ângulos C e B respectivamente. Tome $AD=8$ e $AE=9$. Calcule o perímetro do triângulo ABC.



Problema 13. Encontre o valor de x na figura abaixo.



Problema 14. Num Paralelogramo ABCD: $B\hat{A}P = 2.P\hat{A}H$; $\overline{CD} = 6$; $\overline{BH} \perp \overline{AD}$. Determine a medida de $\overline{PQ}$.

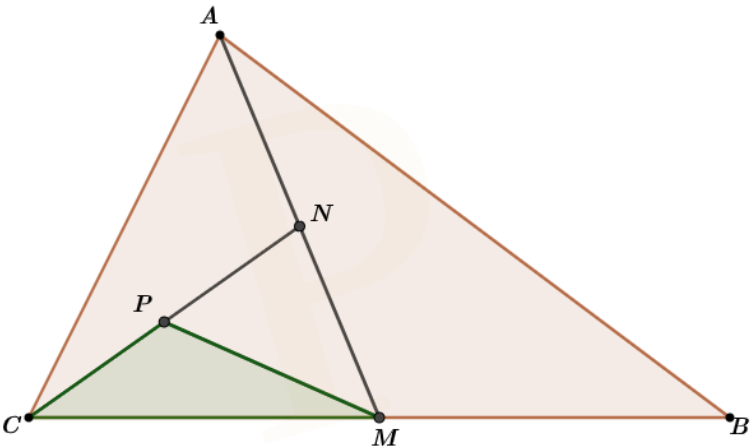


r

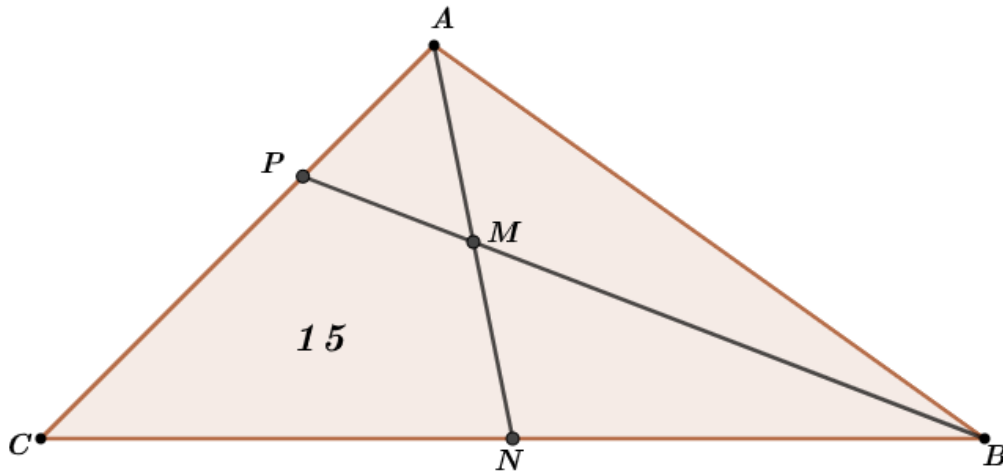
s

Problema 19. (MORGADO) Em um triângulo de lados 4, 6 e 8, calcule, se possível, o comprimento da tangente traçada pelo circuncentro ao círculo inscrito.

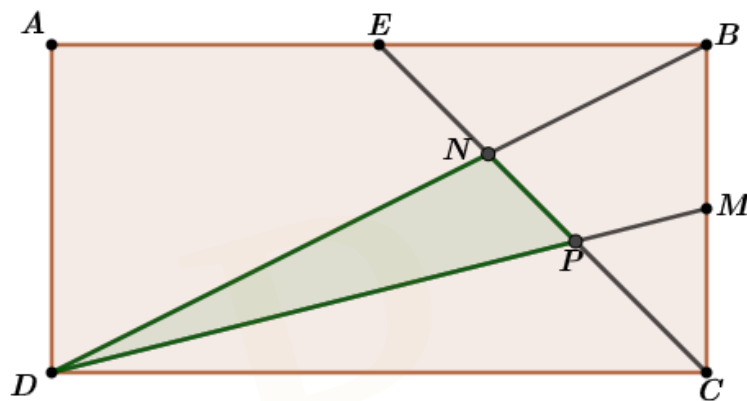
Problema 20. A área do triângulo ABC abaixo é 20. Os pontos M, N e P são médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ e $\overline{CN}$. Calcule a área do triângulo CPM.



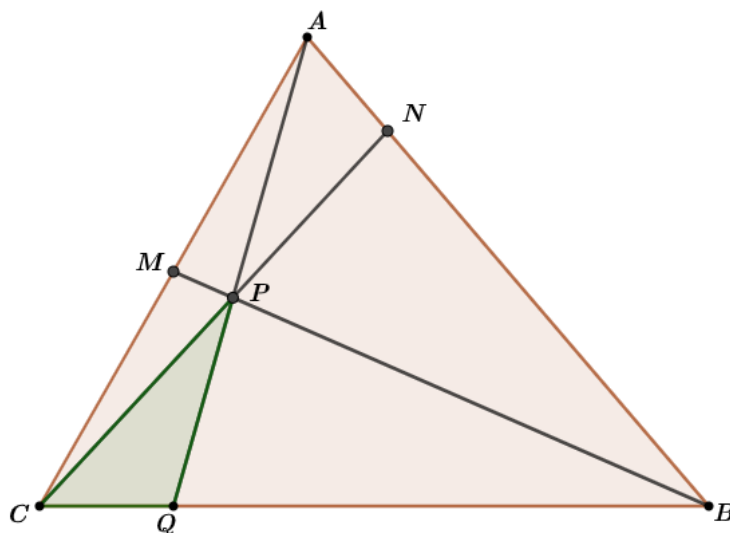
Problema 21. Na figura abaixo, M e N são pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BC}$. O número 15 indica a área do quadrilátero MNCP. Dessa forma, calcule a área do triângulo ABC.



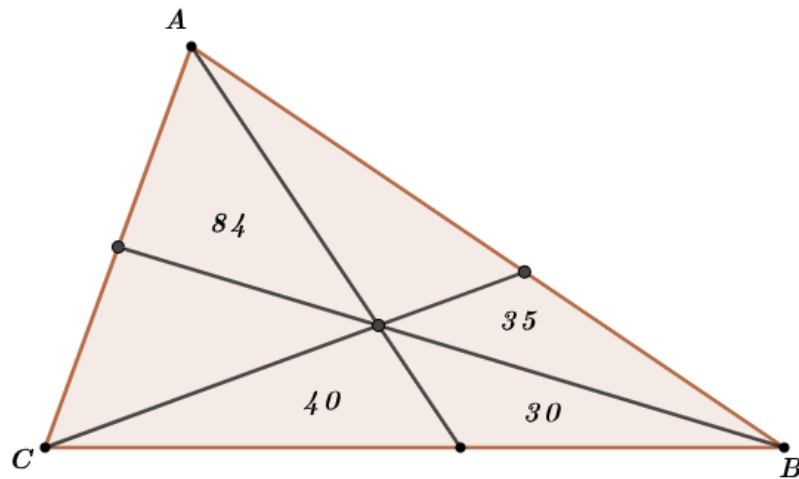
Problema 22. O retângulo ABCD abaixo possui base igual a 4 e altura 2. Os pontos E e M são pontos médios, respectivamente, da base e da altura. Dessa forma, quer-se a área do triângulo DPN.



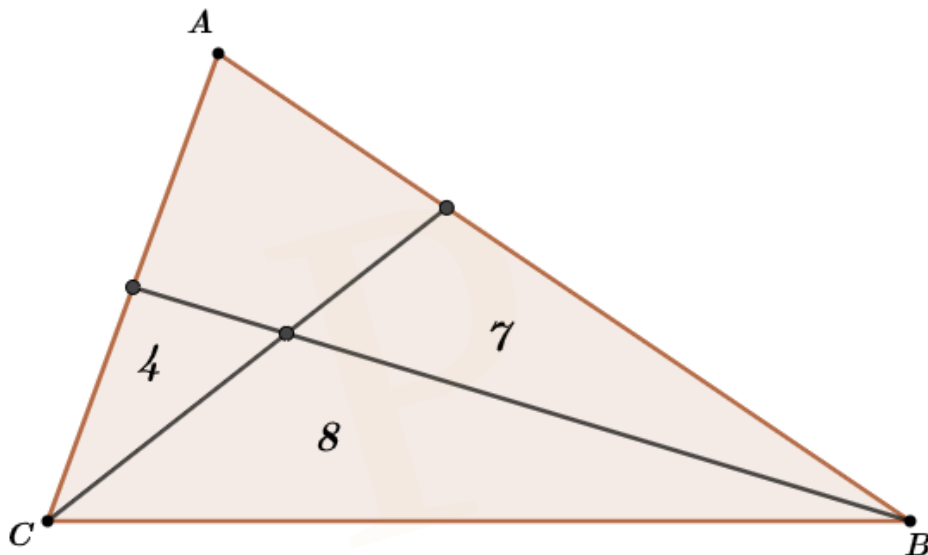
Problema 23. No triângulo ABC abaixo, M é ponto médio de $\overline{AC}$ e a área do triângulo CMP é igual a 10. Além disso, os pés das cevianas AQ e CN dividem os lados, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ numa razão de 1:4. Calcule a área do triângulo CPQ.



Problema 24. (IME) No triângulo abaixo, os números indicados em cada região correspondem as suas respectivas áreas. Dessa forma, calcule a área do triângulo ABC.

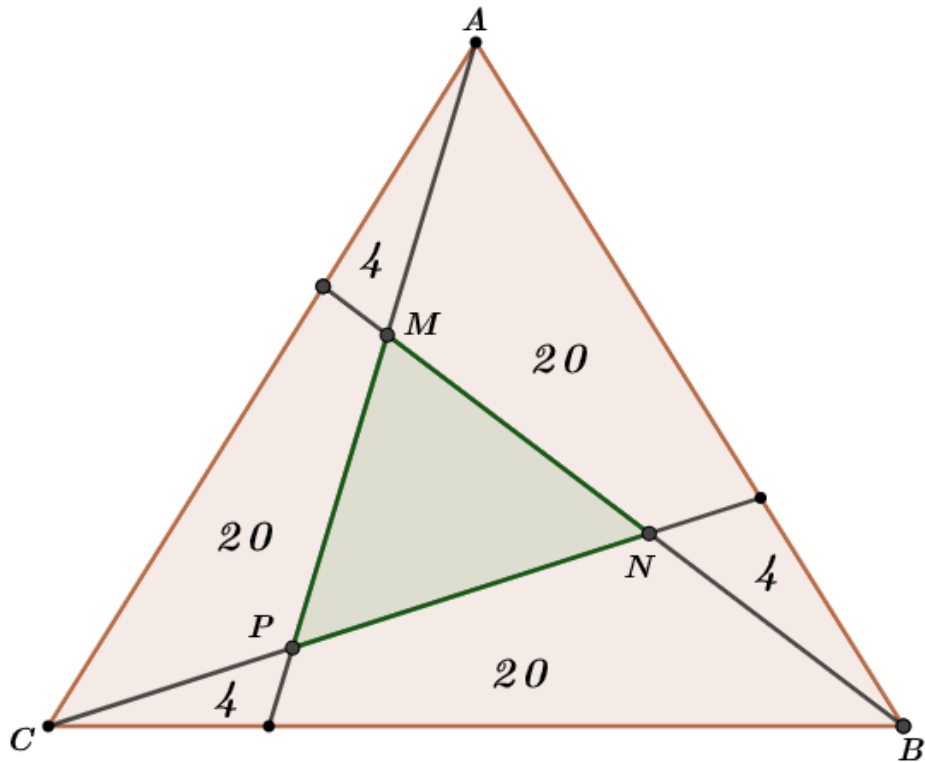


Problema 25. Calcule a área do triângulo ABC, sabendo que os números indicados nas regiões representam suas respectivas áreas.

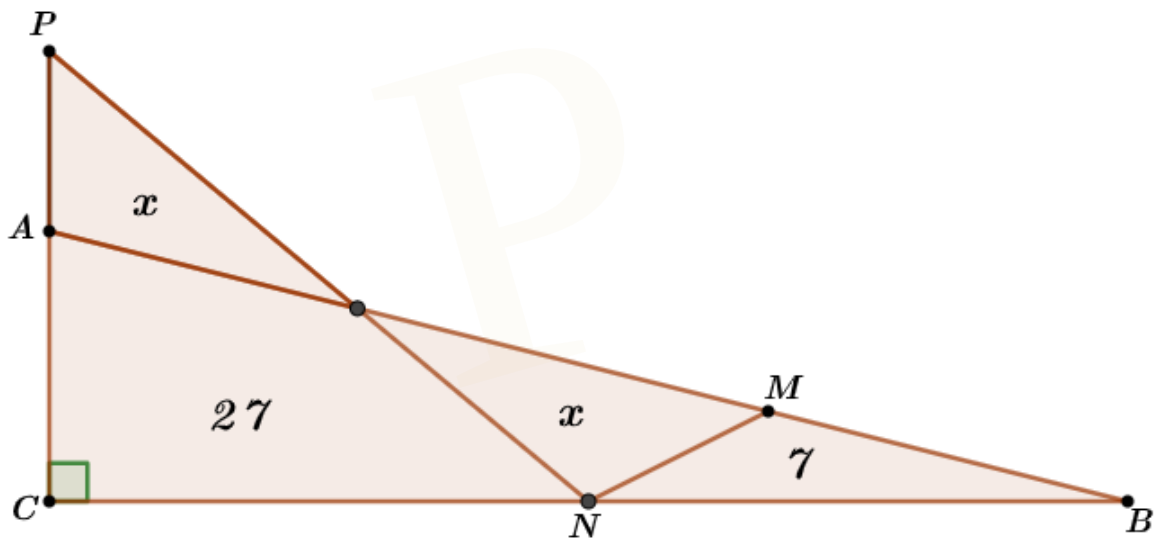


Problema 26. O triângulo ABC abaixo é equilátero e o números indicados em cada região representam suas respectivas áreas.

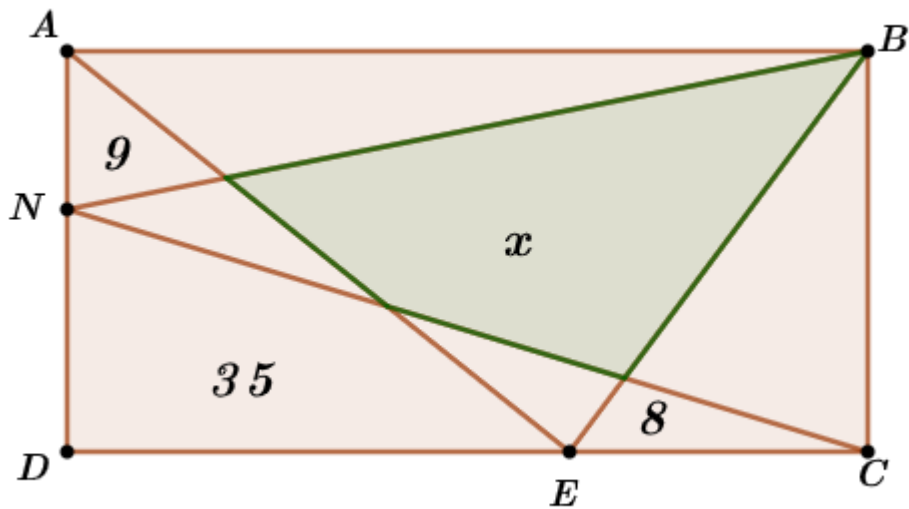
Dessa forma, calcule a área do triângulo MNP.



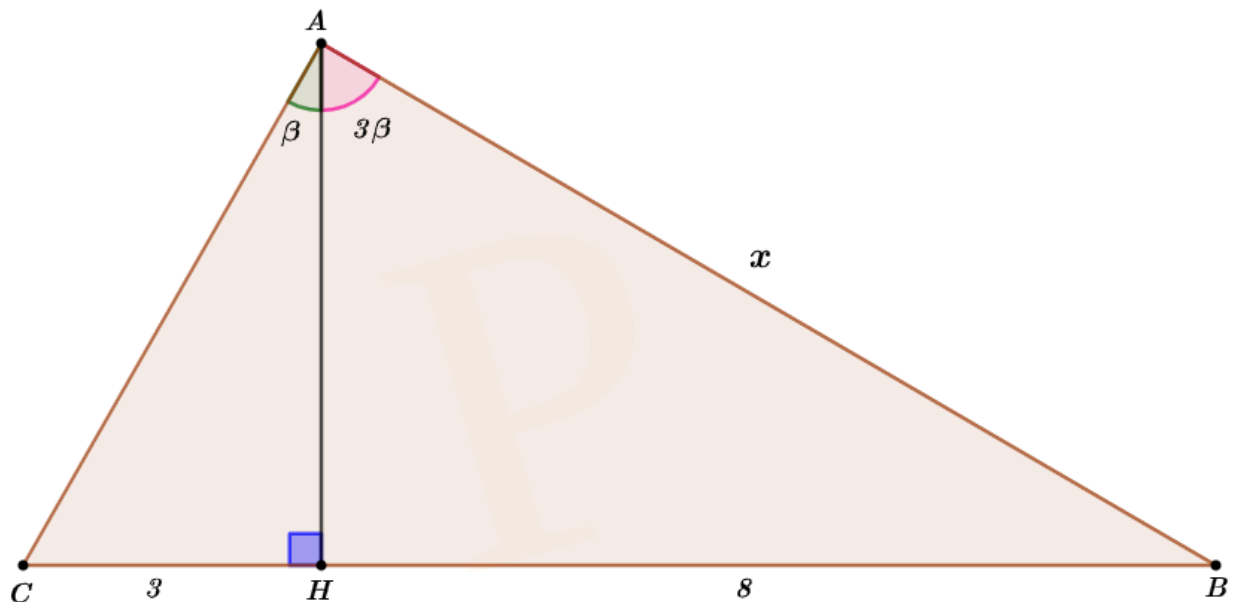
Problema 27. Determine x , sabendo que os números indicados nas regiões representam, respectivamente, suas áreas.



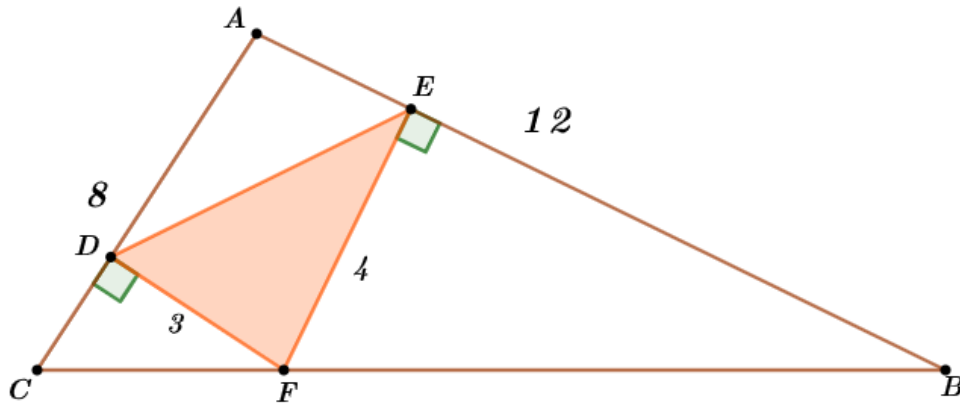
Problema 28. No retângulo $ABCD$ abaixo, os números indicados representam as áreas das regiões. Quer-se x .



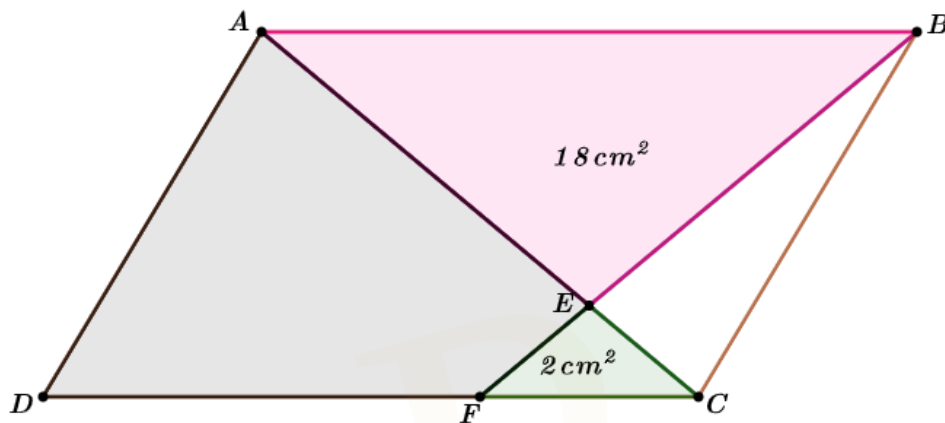
Problema 29. No triângulo ABC abaixo, calcule o valor de x .



Problema 30. No triângulo ABC da figura abaixo, tem-se $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$ e $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$. Tomando $\overline{DF} = 3$ perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{EF} = 4$ perpendicular a $\overline{AB}$, determina-se o triângulo DEF. Calcule a área deste triângulo.



Problema 31. No paralelogramo ABCD abaixo estão indicadas as áreas dos triângulos ABE e CEF, cujas medidas são 18 cm^2 e 2 cm^2 respectivamente. A partir destas informações, calcule a área do quadrilátero AEFD.



Problema 32. Calcule a área de um triângulo cujas alturas são $h_a = \frac{1}{4}$; $h_b = \frac{1}{7}$ e $h_c = \frac{1}{9}$.

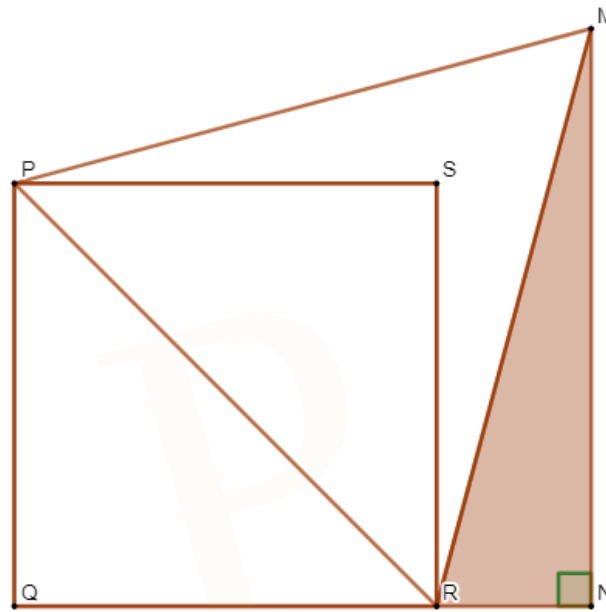
Problema 33. (EN) ABC é um triângulo, Q é o ponto médio de BC e o ponto P (sobre AB) é tal que $3 \cdot AP = 2 \cdot AB$. M é ponto de intersecção das retas CP e AQ. A razão entre as áreas dos triângulos AMB e ABC é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{3}{7}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{7}{18}$
- e) $\frac{1}{4}$

Problema 34. (EN) Considere um triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas CM e BN. A área do quadrilátero AMGN é igual a:

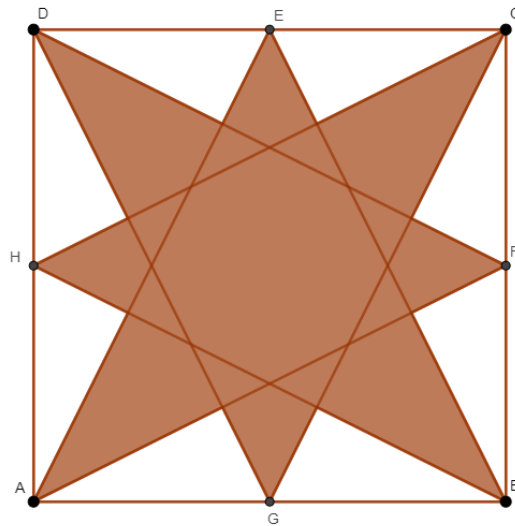
- a) $\frac{S}{2}$
- b) $\frac{2S}{3}$
- c) $\frac{S}{3}$
- d) $\frac{S}{4}$
- e) $\frac{3S}{4}$

Problema 35. (EN) Na figura abaixo, o triângulo PMR é equilátero e o quadrilátero PQRS é um quadrado, cujo lado mede 2 cm. A área do triângulo MNR, em cm^2 , vale:

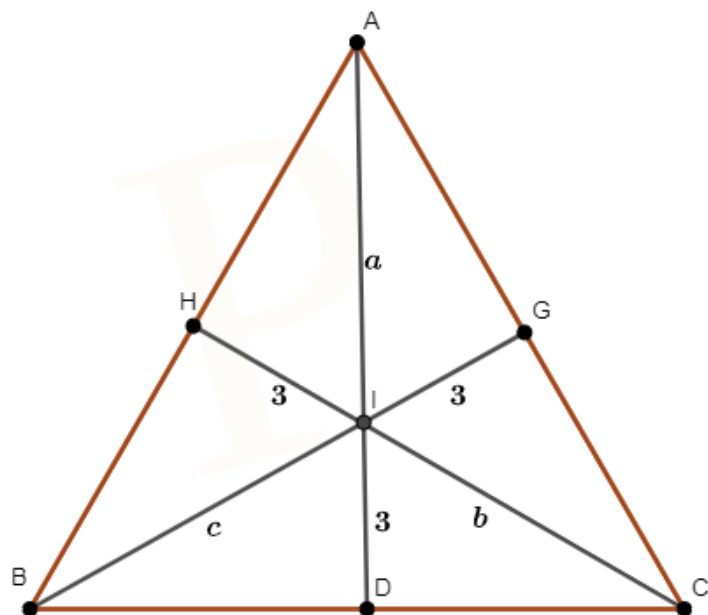


- a) 1
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{6}$
- e) $\sqrt{12}$

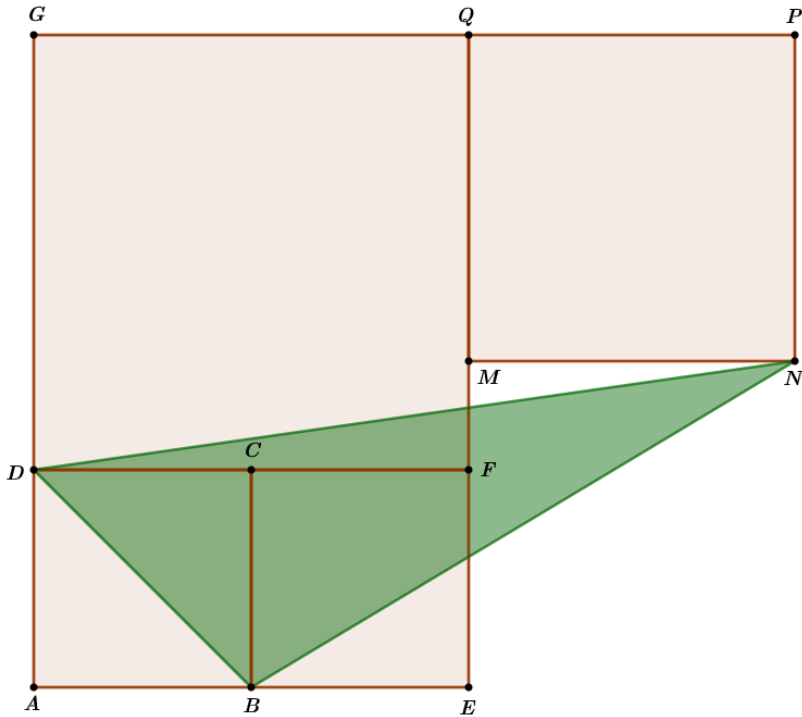
Problema 36. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado L e os pontos E, F G, e H são médios dos lados CD, CB, BA e AD respectivamente. Com base nessas informações, calcule o percentual da área hachurada em relação a área total.



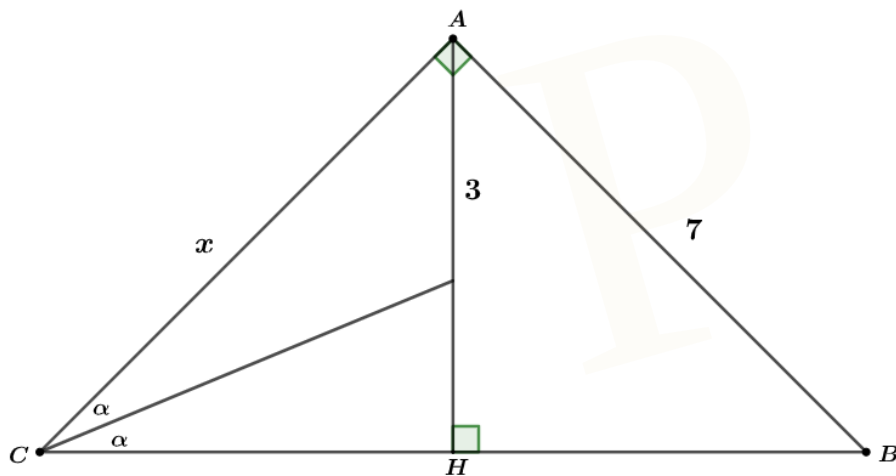
Problema 37. No triângulo ABC abaixo, foram traçadas 3 cevianas concorrentes em I, tal que $IH = IG = ID = 3 \text{ cm}$. Os comprimentos de AI , BI e CI são respectivamente a , b e c , donde $a + b + c = 43 \text{ cm}$. Calcule **a.b.c**.



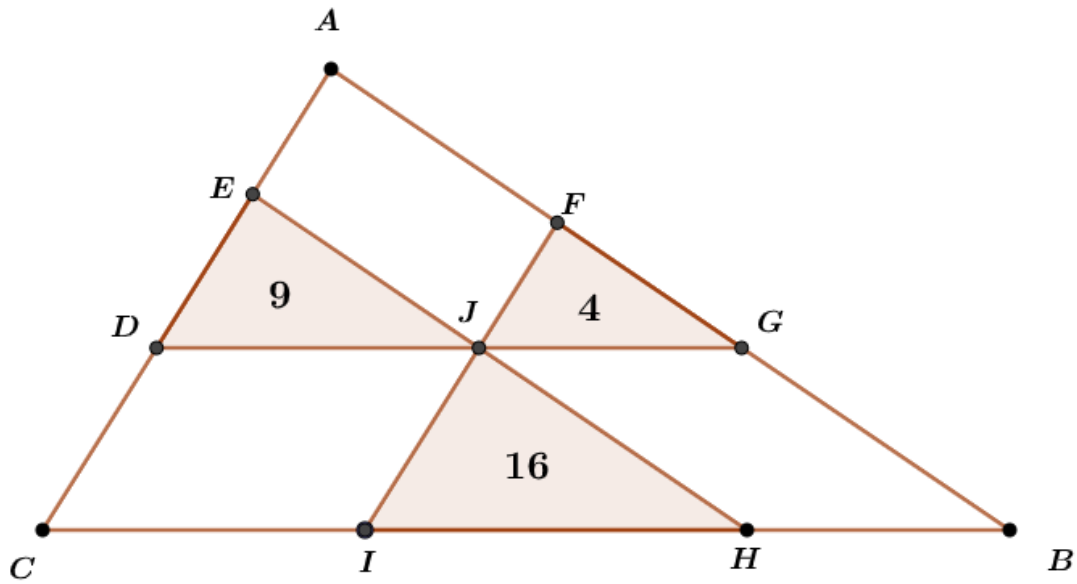
Problema 38. Na figura a seguir, temos os quadrados ABCD, CBEF, DFQG, MNPQ. O ponto M pertence ao segmento QF e a área do quadrado ABCD é 10 cm^2 . Calcule a área do triângulo BDN, em cm^2 .



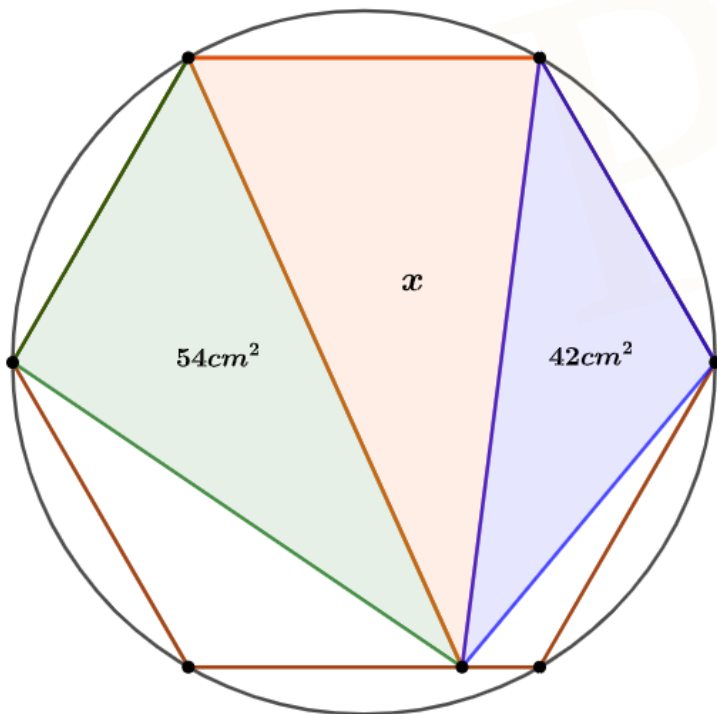
Problema 39. Na figura abaixo, determine o valor de x .



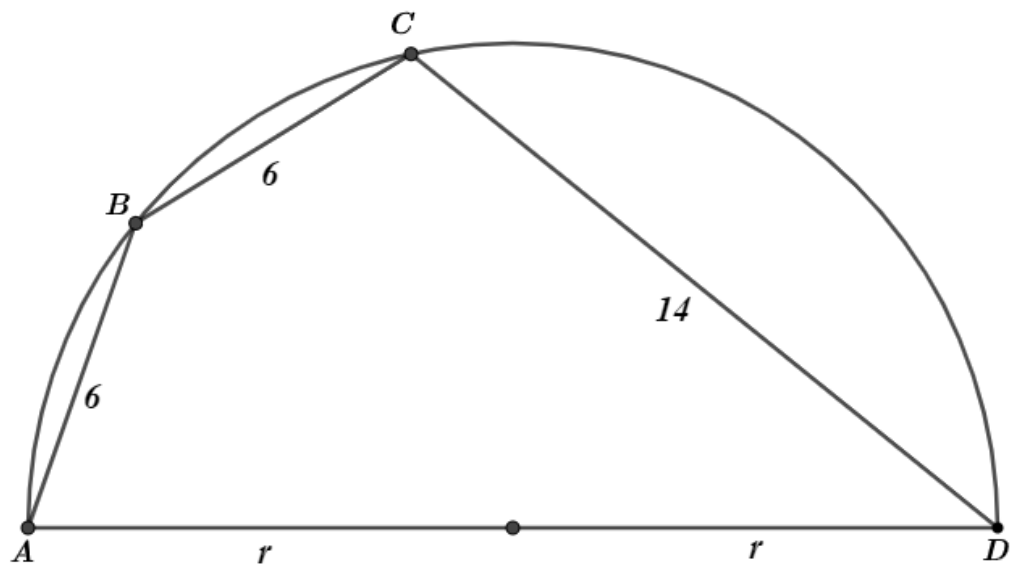
Problema 40. Na figura, temos que DG , EH e FI são paralelos, respectivamente a BC , AB e AC . As áreas dos triângulos EDJ , FJG e IHJ estão indicadas. Munido dessas informações, calcule a área de ABC .



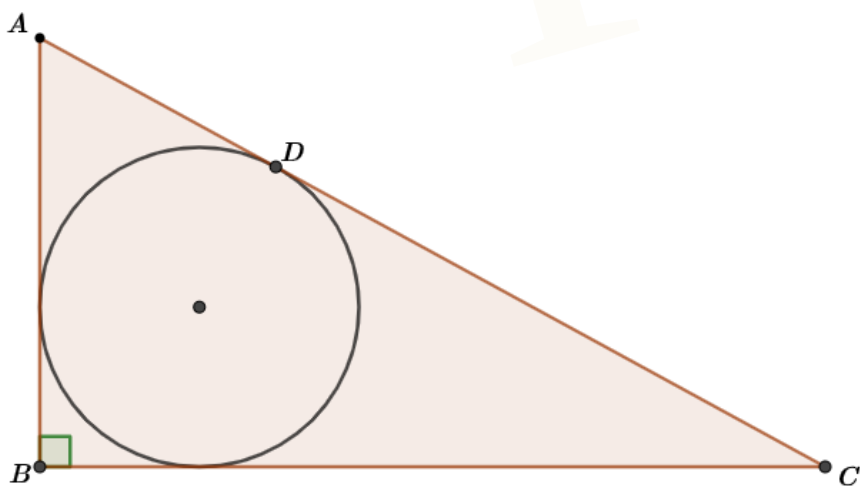
Problema 41. O hexágono da figura abaixo é regular. Os valores indicados nas regiões representam as suas respectivas áreas. Dessa forma, calcule a área indicada pela letra **x**.



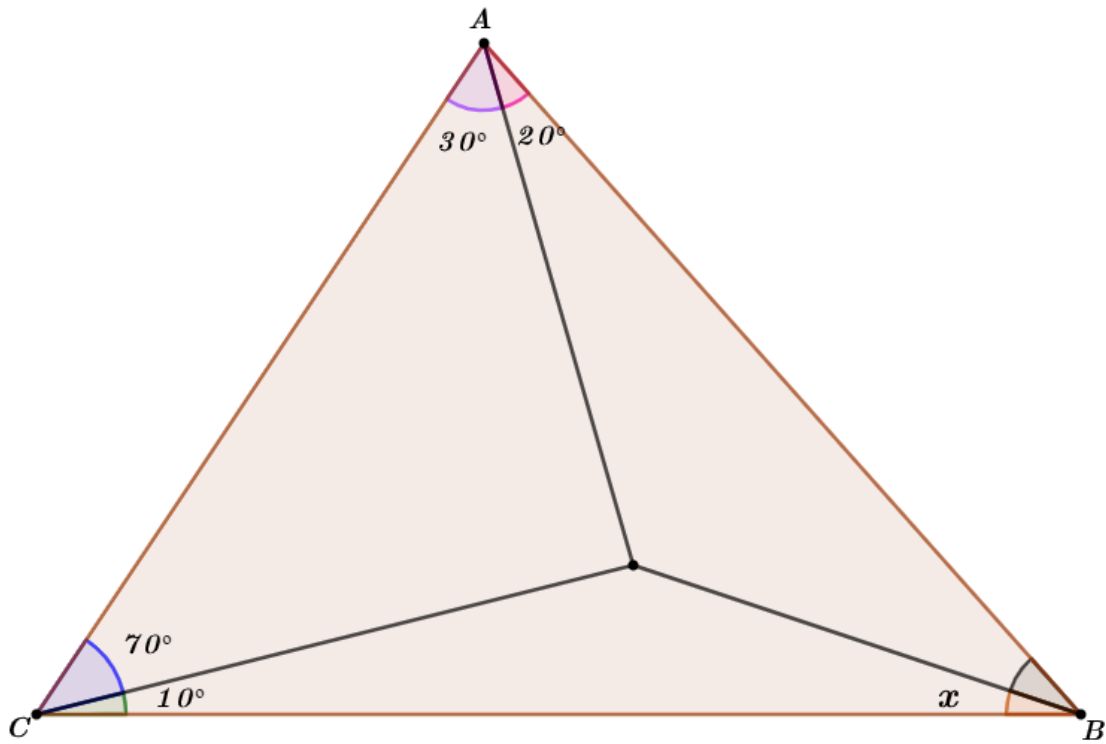
Problema 42. Determine o raio do semicírculo abaixo.



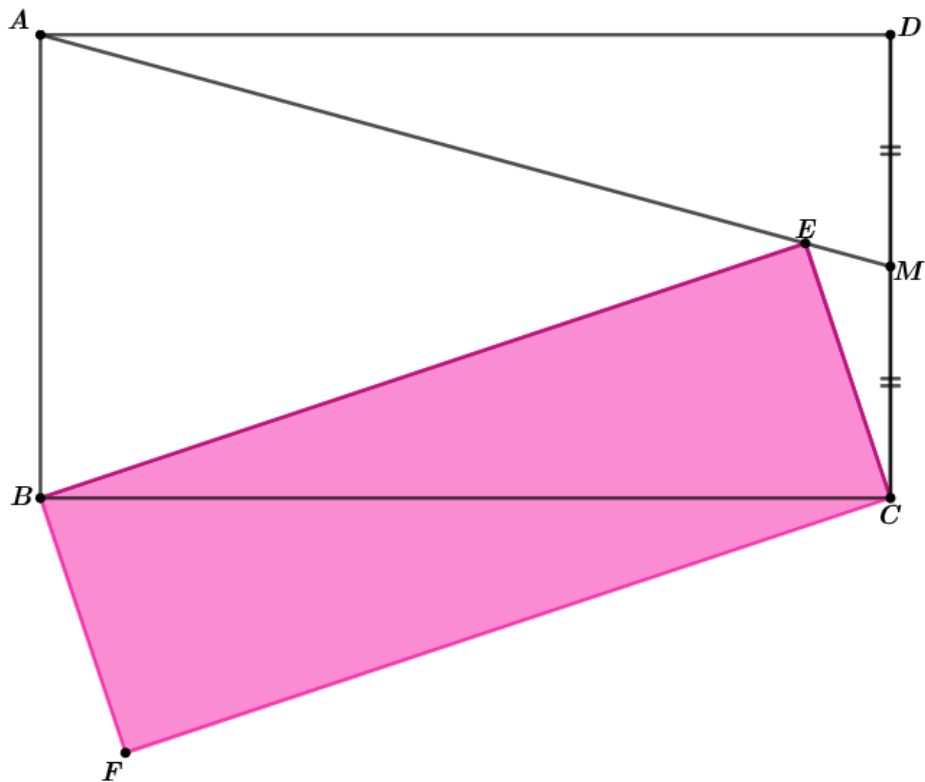
Problema 43. No triângulo abaixo, prove que $\overline{AD} \cdot \overline{DC} = [ABC]$.



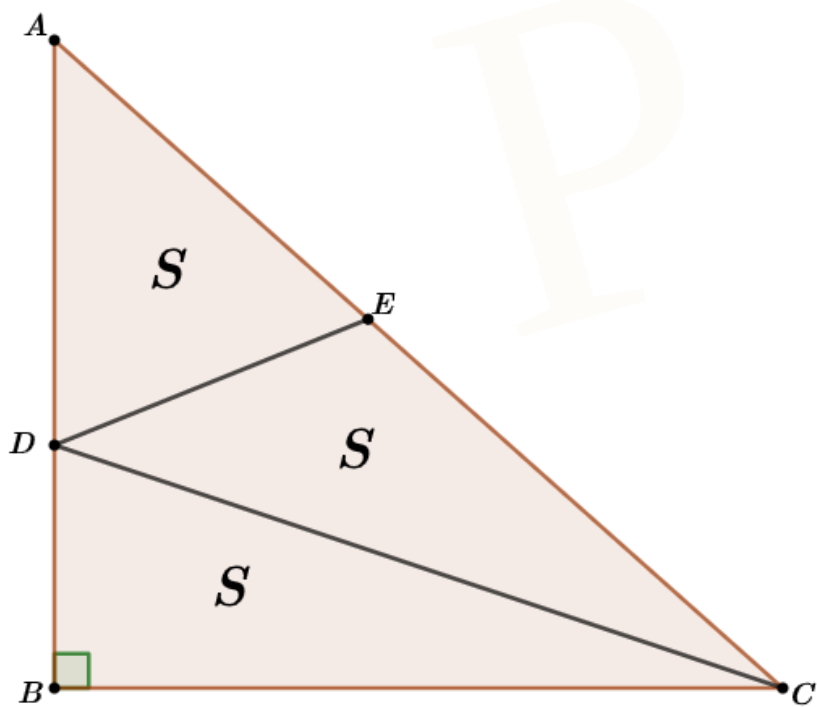
Problema 44. No triângulo ABC abaixo, calcule o valor do ângulo x .



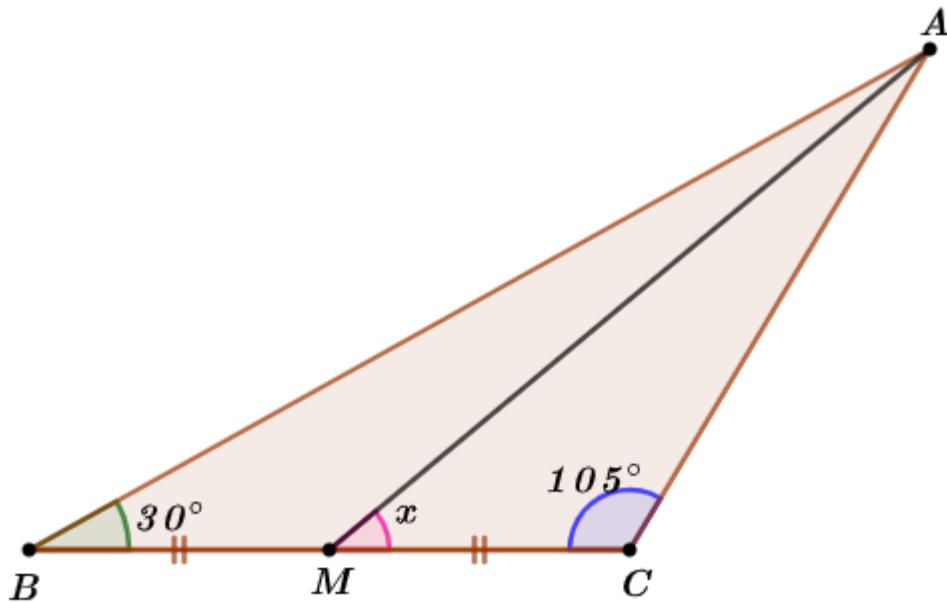
Problema 45. No retângulo $ABCD$ abaixo, M é ponto médio de $\overline{CD}$, $\overline{AE} = 8$ e $\overline{EM} = 2$. Calcule a área do retângulo $BFCE$ hachurado.



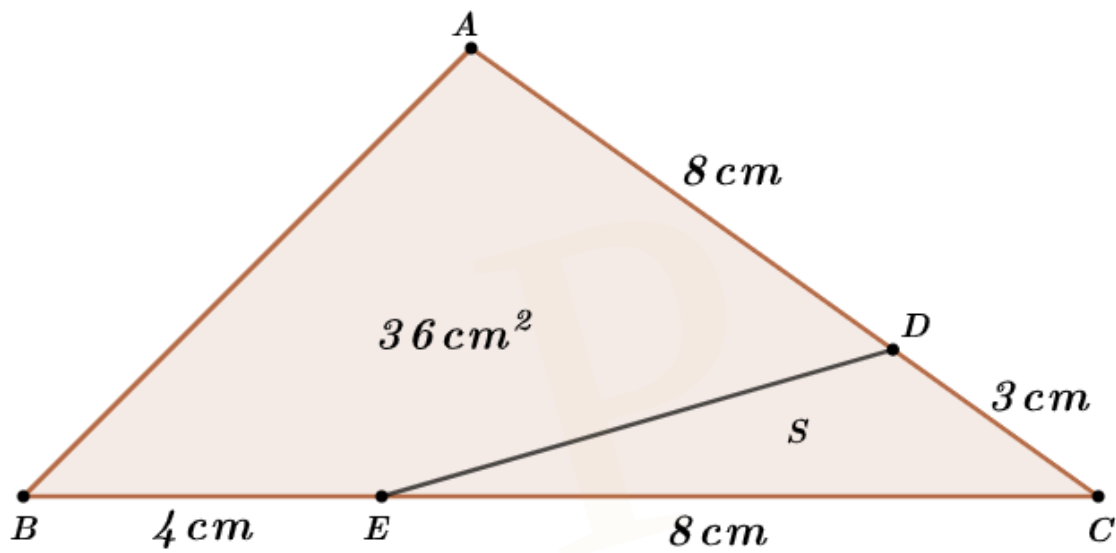
Problema 46. No triângulo retângulo ABC abaixo, $[BCD] = [CDE] = [DEA] = S$. Se $\overline{DE} = 13$, calcule $\overline{DC}$.



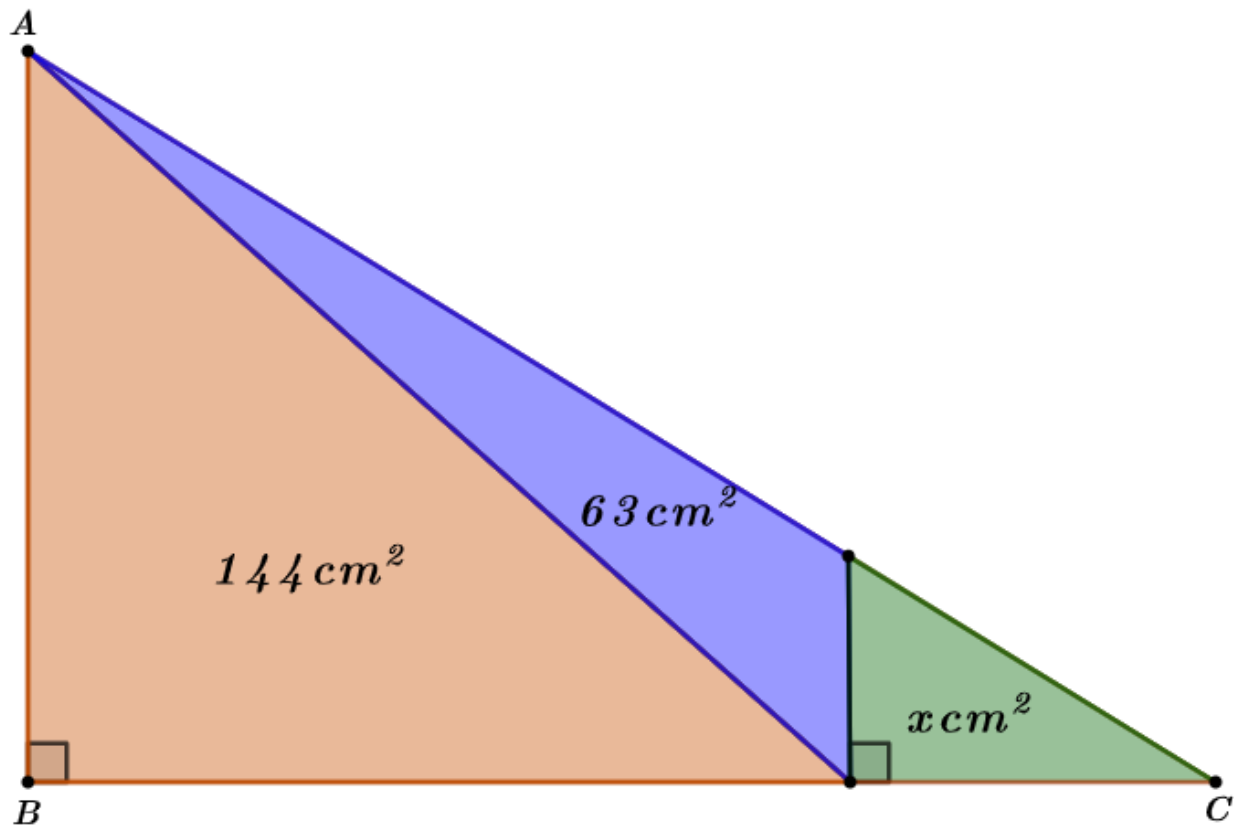
Problema 47. No triângulo ABC abaixo, M é ponto médio de BC. Determine o valor do ângulo x.



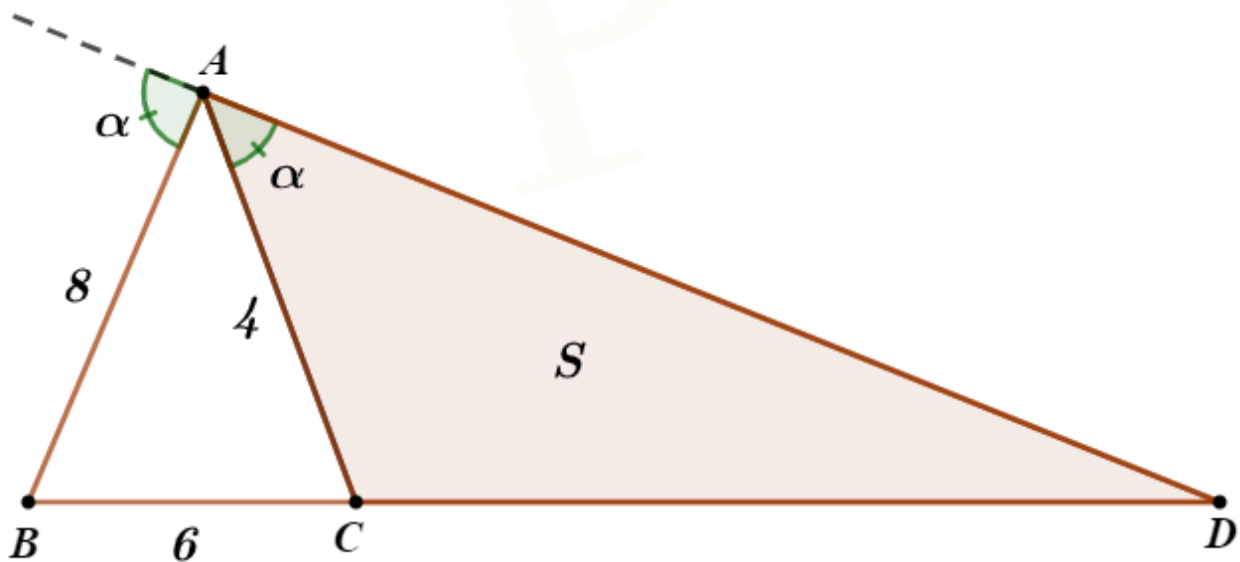
Problema 48. Calcule o valor da área S abaixo.



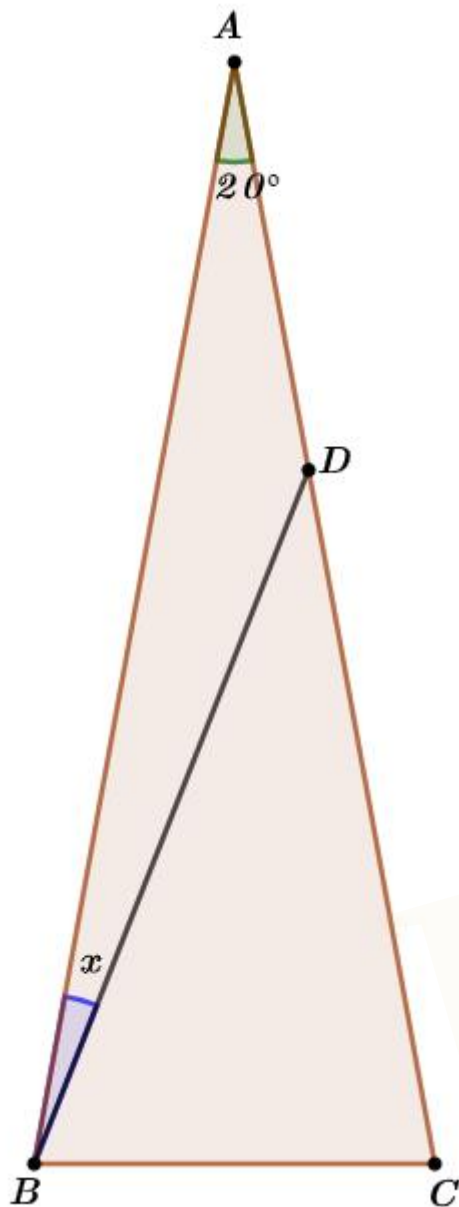
Problema 49. Determine o valor de x no triângulo abaixo.



Problema 50. No triângulo abaixo, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 6$ e $[ACD] = S$. Determine o valor de S .

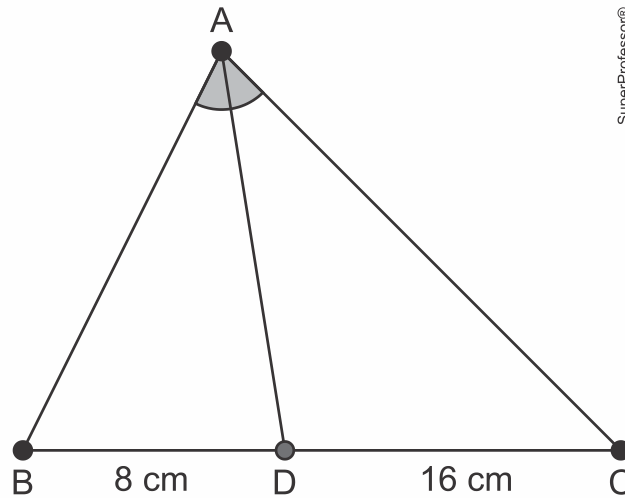


Problema 51. No triângulo ABC abaixo, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\hat{BAC} = 20^\circ$. Determine o valor do ângulo $\hat{ABD}$.



Problema 52. No triângulo ABC, o ângulo interno em A é reto. Constrói-se a altura relativa à hipotenusa- chamaremos este ponto de H-. Tome o ponto médio (M) de BC. Se $\hat{ABC} - 2 \cdot (\hat{ACB}) = 10^\circ$, calcule o valor do ângulo $\hat{MAH}$.

Problema 53. (ESPCEX) Observe o triângulo ABC abaixo:



Desenho ilustrativo - Fora de escala

Sabendo que o segmento de reta $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo do vértice A, que o perímetro do triângulo ABC é igual a 54 cm e que as medidas dos segmentos de retas $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ valem, respectivamente, 8 cm e 16 cm, o produto das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, em cm^2 , é igual a:

- a) 125
- b) 151
- c) 176
- d) 200
- e) 225

Problema 54. (EFOMM) Seja T o triângulo ABC com lados de tamanho 10, 5 e $5\sqrt{3}$, com a relação entre seus ângulos $\widehat{BAC} > \widehat{BCA} > \widehat{ABC}$. Dada a circunferência C inscrita no triângulo ABC, interceptando-o nos pontos $P \in \overline{BC}$, $Q \in \overline{AC}$ e $R \in \overline{AB}$.

Qual é o perímetro do quadrilátero convexo PBRQ?

- a) $\frac{5}{2}(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$
- b) $\frac{5}{3}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})$
- c) $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})$
- d) $\frac{5}{2}(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})$
- e) $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$

Problema 55. (ITA) Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Tome o ponto $R \neq A$ na reta AB tal que $m(\overline{AB}) = m(\overline{BR})$ e o ponto Q na reta AC tal que $m(\overline{AC}) = 2m(\overline{CQ})$ e Q não esteja no segmento $\overline{AC}$. A reta RM corta o lado $\overline{AC}$ no ponto S e a reta QM corta o lado $\overline{AB}$ no ponto P. Sendo 24 a área do triângulo ABC, o valor da área do quadrilátero APMS vale:

- a) 15.
- b) 16.
- c) 17.
- d) 18.

e) 19.

Problema 56. (IME) Dado um plano π e uma reta r nele contida, sejam A e B pertencentes a π dois pontos em um mesmo semiplano definido por r . O ponto A' é o simétrico a A em relação à reta r . Os segmentos de reta AA' e $A'B$ interceptam a reta r nos pontos C e M , respectivamente. Se N é um ponto da reta r distinto de M , prove que

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{NB}$$

Problema 57. (ITA) Seja ABC um triângulo retângulo tal que $B\hat{A}C = 30^\circ$. Considere D um ponto na hipotenusa $\overline{AC}$ e retas r e s passando por D , paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Se $E = r \cap \overline{BC}$, $F = s \cap \overline{AB}$ e $m(\overline{BC})$ o menor valor possível para $m(\overline{EF})$ é

- a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.
- b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- e) $\sqrt{3}$.

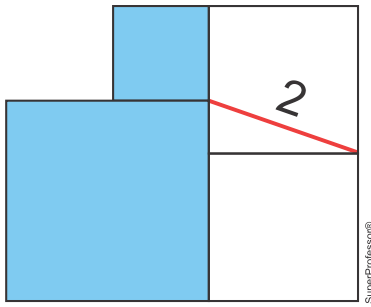
Problema 58. (EN) Considere um triângulo T_1 de área w . Os comprimentos das medianas de T_1 são os comprimentos dos lados de um novo triângulo T_2 , os comprimentos das medianas de T_2 são os comprimentos dos lados de um novo triângulo T_3 e assim sucessivamente, ou seja, a construção dos lados triângulo T_{n+1} é realizada a partir dos comprimentos das medianas do triângulo T_n . Sendo assim, se $w = 3$, é correto afirmar que a soma de todas as áreas dos T_n , com $n \rightarrow \infty$, é um:

- a) número racional não inteiro.
- b) quadrado perfeito.
- c) número primo.
- d) número irracional.
- e) número par.

Problema 59. (ITA) Considere um triângulo ABC tal que $m(\overline{AB}) = 4$, $m(\overline{AC}) = 5$ e $B\hat{A}C = 60^\circ$. Seja D um ponto no lado $\overline{AB}$ tal que $m(\overline{AD}) = 1$. Encontre o raio do círculo inscrito no triângulo BCD .

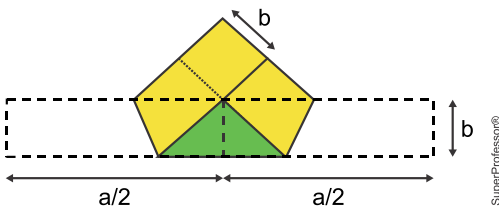
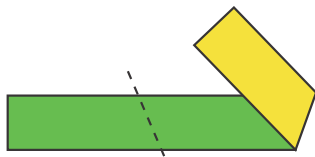
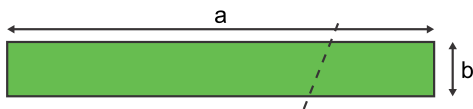
Problema 60. (ITA) Um triângulo tem perímetro 20 e seus ângulos internos α, β e γ satisfazem a igualdade $\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\gamma) = 2$. Sabendo que um dos lados desse triângulo mede 8, determine a medida dos outros dois lados.

Problema 61 (OBMEP) A figura a seguir é formada por quatro quadrados. A medida do segmento destacado em vermelho é 2. Qual é a soma das áreas dos quadrados azuis?



- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

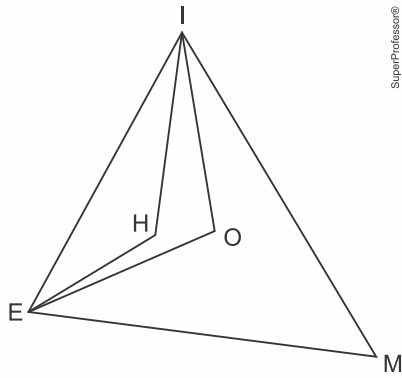
Problema 62. (OBMEP) Uma tira retangular tem comprimento a e largura b . Ao dobrar a tira, a sobreposição de suas pontas formou um quadrado de lado b e o resultado da dobra foi um pentágono sem nenhum buraco no centro, como indicado nas figuras. Qual é a razão a/b ?



- a) $4 + \sqrt{2}$
- b) $2(2 + \sqrt{2})$
- c) $4\sqrt{2}$
- d) $4(\sqrt{2} - 1)$
- e) $4(\sqrt{2} + 1)$

Problema 63. (IME) Seja um triângulo acutângulo $\triangle ABC$ conforme a figura abaixo tal que $\overline{IH} = \overline{IO}$, onde H e O são respectivamente seus ortocentro e circuncentro, interiores ao triângulo e não pertencentes aos lados.

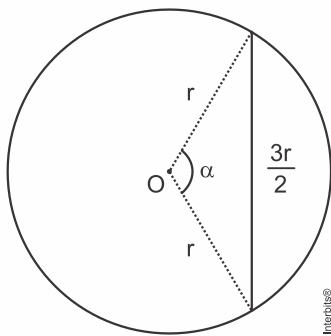
Calcule o ângulo $\widehat{HEO}$, sabendo que os ângulos $\widehat{EIH} = 2\widehat{HIO}$.



Problema 64. (IME) Um triângulo ABC possui incentro I e ex-incentro G relativo ao lado $\overline{BC}$. Se $B\hat{I}C + A\hat{G}C = 155^\circ$, então o ângulo $A\hat{C}B$ é

- a) 30°
- b) 45°
- c) 50°
- d) 60°
- e) 90°

Problema 65. (EFOMM) Considere o círculo abaixo de centro O e raio r . O valor do seno do ângulo correspondente ao menor arco delimitado por uma corda de comprimento $\frac{3r}{2}$ é



- a) 0
- b) $-\frac{1}{8}$
- c) $\frac{1}{8}$
- d) $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$
- e) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

Problema 66. (ITA) Seja T um triângulo de vértices A, B e C com $m(\overline{AB}) = 2\sqrt{5}$, e $m(\overline{BC}) = 6$. Sabendo que $A\hat{B}C$ é agudo e T é inscritível em uma circunferência de raio $R = 5$, podemos afirmar que:

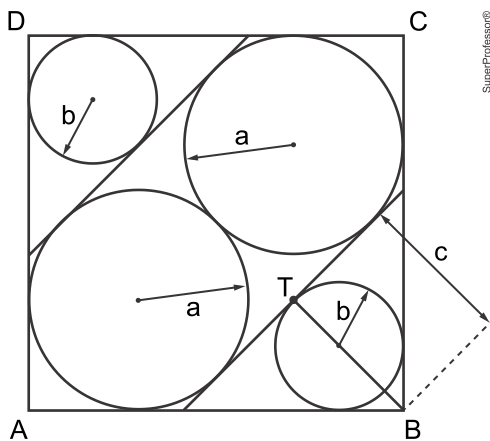
- a) $m(\overline{AC}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- b) $m(\overline{AC}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
- c) $m(\overline{AC}) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.
- d) $m(\overline{AC}) = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.
- e) $m(\overline{AC}) = \frac{14\sqrt{5}}{5}$.

Problema 67. (ITA) Seja Q um quadrilátero de vértices A, B, C e D cujos lados satisfazem $m(\overline{AB}) = 5 = m(\overline{CD})$, $m(\overline{BC}) = 3$ e $m(\overline{DA}) = 8$. Sabendo que Q é inscrito em uma circunferência de raio r , determine r .

Problema 68. (ITA) Considere um triângulo de vértices A, B e C , retângulo em B . Seja r a reta determinada por A e C e seja O um ponto equidistante de A e C no mesmo lado que B com respeito a r . Sabendo que $m(\overline{AO}) = 85$, $m(\overline{AB}) = 10$ e $m(\overline{BC}) = 24$ temos que a distância de O a r é

- a) 64.
- b) 66.
- c) 74.
- d) 76.
- e) 84.

Problema 69. (OBMEP) A figura a seguir mostra um quadrado $ABCD$ de lado 1 e quatro circunferências, todas tangentes aos lados do quadrado e aos segmentos, como indicado. O raio das duas circunferências maiores é a , e o raio das duas circunferências menores é b . O segmento BT tem medida c .



- a) Mostre que a diagonal do quadrado mede $2(a + c)$.
- b) Mostre que $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
- c) Qual é o valor de b ?

Problema 70. (ESPCEX) Os lados AB, AC e BC de um triângulo ABC medem, respectivamente, 4 cm , 4 cm e 6 cm . Então a medida, em cm , da mediana relativa ao lado AB é igual a

- a) $\sqrt{14}$.
- b) $\sqrt{17}$.
- c) $\sqrt{18}$.
- d) $\sqrt{21}$.
- e) $\sqrt{22}$.

Problema 71. (ITA) Considere um triângulo ABC tal que $m(\overline{AB}) = 14$, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{5}$ e $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{5}{13}$. Então, o raio da circunferência inscrita ao triângulo é igual a:

- a) 2.
- b) $2\sqrt{2}$.
- c) 3.
- d) 4.
- e) $4\sqrt{2}$.

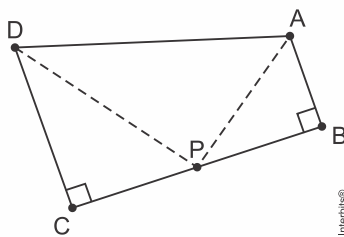
Problema 72. (IME) Considere um trapézio de bases AB e CD, com o ponto I sendo a interseção de suas diagonais. Se as áreas dos triângulos AIB e CID formados pelas diagonais são 9 cm^2 e 16 cm^2 , respectivamente, a área do trapézio, em cm^2 , é:

- a) Não é possível determinar por terem sido fornecidos dados insuficientes.
- b) 63
- c) 50
- d) 49
- e) 45

Problema 73. (CN) Considere o triângulo ABC acutângulo e não equilátero, onde O é o seu circuncentro e H o seu ortocentro. A reta que passa por O e H intersecta o lado AB no ponto P, e a reta que passa por C e H intersecta o mesmo lado AB no ponto Q. Se a reta suporte de HP é a bissetriz do ângulo $\widehat{AHQ}$ e o segmento $HP = 4 \text{ cm}$, é correto afirmar que a medida em cm do perímetro do triângulo AHP é igual a:

- a) $4 + 2\sqrt{3}$
- b) $4 + 3\sqrt{2}$
- c) $4 + 6\sqrt{3}$
- d) $8 + 4\sqrt{2}$
- e) $8 + 4\sqrt{3}$

Problema 74. (CN) Observe a figura a seguir.



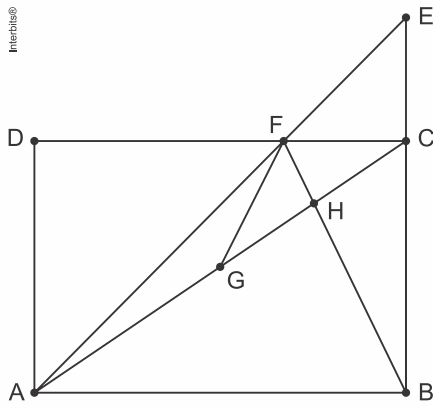
Ela apresenta um trapézio retângulo com bases AB e CD. Sabe-se também que as bissetrizes internas com vértices em A e em D e o lado BC, se intersectam em P. Sendo assim, analise as afirmações a seguir.

- (i) $\widehat{APD} = 90^\circ$
- (ii) $BP = CP$
- (iii) $AD^2 = BP^2 + CP^2$
- (iv) $AD = AB + CD$

São verdadeiras:

- a) i, ii e iii apenas
- b) i, ii e iv apenas
- c) i, iii e iv apenas
- d) ii, iii e iv apenas
- e) i, ii, iii e iv.

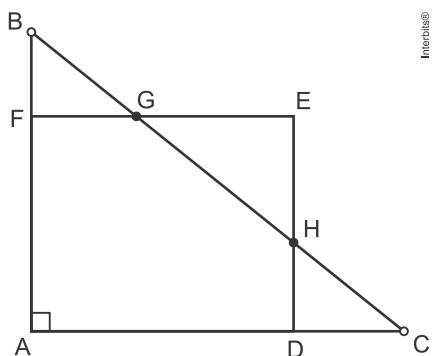
Problema 75. (CN) Observe a figura a seguir:



Ela apresenta um quadrado ABCD com lado medindo 2 unidades de comprimento (u.c.). Sabe-se que G é o centro desse quadrado e que $\overline{CE} = 1$ u.c. é o prolongamento do lado $\overline{BC}$. Se s_1 é a área do triângulo FHC e s_2 é a área do triângulo FHG, é correto afirmar que a razão $\frac{s_1}{s_2}$ é igual

- a) $\frac{7}{8}$
- b) $\frac{8}{9}$
- c) $\frac{9}{10}$
- d) 1
- e) $\frac{6}{5}$

Problema 76. (CN) Observe a figura a seguir:



Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos p e q e hipotenusa s, ADEF é um quadrado de lado unitário com vértice E externo ao triângulo ABC. Utilizando p, q e s para representar a soma $\overline{FG} + \overline{DH}$ obtém-se:

- a) $q + s - \frac{p^2}{q^2}$
- b) $q + s + \frac{p^2}{4sq}$
- c) $q + s - \frac{p^2}{sq}$
- d) $q - s + \frac{p^2}{2sq}$
- e) $q - s - \frac{p}{sq}$

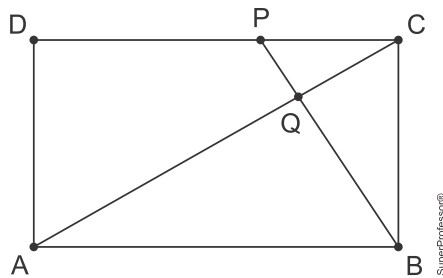
Problema 77. (EN) Seja o triângulo ABC, retângulo em B, com $AB = 8\sqrt{2}$ e $BC = 6\sqrt{2}$.

Sabendo que $\overline{CD}$ é bissetriz de $\angle C$, D é centro da circunferência de raio BD e x é a razão $\frac{EF}{CE}$, podemos afirmar que x é tal que

Problema 81. (CN) O perímetro do triângulo ABC mede x unidades. O triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e sua área é 36 vezes a área do triângulo ABC. Nessas condições, é correto afirmar que o perímetro do triângulo DEF é igual a:

- a) $2x$
- b) $3x$
- c) $6x$
- d) $9x$
- e) $10x$

Problema 82. (OBMEP) Sabendo que as áreas dos triângulos BCQ e QCP da figura são, respectivamente, 6 e 2, qual é a área do retângulo ABCD?



- a) 48
- b) 50
- c) 52
- d) 54
- e) 56

Problema 83. (ESPCEX) Os centros de dois círculos distam 25 cm . Se os raios desses círculos medem 20 cm e 15 cm , a medida da corda comum a esses dois círculos é

- a) 12 cm .
- b) 24 cm .
- c) 30 cm .
- d) 32 cm .
- e) 26 cm .

Problema 84. (ESPCEX) Em um triângulo ABC , $\overline{BC} = 12\text{ cm}$ e a mediana relativa a esse lado mede 6 cm . Sabendo-se que a mediana relativa ao lado AB mede 9 cm , qual a área desse triângulo?

- a) $\sqrt{35}\text{ cm}^2$.
- b) $2\sqrt{35}\text{ cm}^2$.
- c) $6\sqrt{35}\text{ cm}^2$.
- d) $\frac{\sqrt{35}}{2}\text{ cm}^2$.
- e) $3\sqrt{35}\text{ cm}^2$.

Problema 85. (EFOMM) Foram construídos círculos concêntricos de raios 5 cm e 13 cm . Em seguida, foi construído um segmento de reta com maior comprimento possível, contido internamente na região interna ao círculo maior e externa ao menor.

O valor do segmento é

- a) $8,5\text{ cm}$
- b) $11,75\text{ cm}$
- c) $19,25\text{ cm}$

- d) 24 cm
e) 27 cm

Problema 86. (CN) A circunferência λ , inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas 'p' e 'q' a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos 'b' e 'c' desse triângulo é igual a:

- a) $(pq)^2$
b) $(2pq)^2$
c) $\sqrt{pq}$
d) $\sqrt{2pq}$
e) $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

Problema 87. (EN) Considere um semicírculo de diâmetro ML e sua reta tangente em L . Suponha que F é um ponto desta reta tal que $FL = \frac{FM}{2}$. Calcule a área da porção do triângulo FML situado no exterior do semicírculo e assinale a opção correta.

- a) $\left(\frac{5\sqrt{3}-2}{12}\right) \cdot r^2$
b) $\left(\frac{5\sqrt{3}-\pi}{12}\right) \cdot r^2$
c) $\left(\frac{\sqrt{3}-2\pi}{12}\right) \cdot r^2$
d) $\left(\frac{5\sqrt{2}-2\pi}{12}\right) \cdot r^2$
e) $\left(\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{12}\right) \cdot r^2$

Problema 88. (ITA) Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Tome o ponto $R \neq A$ na reta AB tal que $m(AB) = m(BR)$ e o ponto Q na reta AC tal que $m(AC) = 2m(CQ)$ e Q não esteja no segmento $\overline{AC}$. A reta RM corta o lado $\overline{AC}$ no ponto S e a reta QM corta o lado $\overline{AB}$ no ponto P. Sendo 24 a área do triângulo ABC, o valor da área do quadrilátero APMS vale:

- a) 15.
b) 16.
c) 17.
d) 18.
e) 19.

Problema 89. (EFOMM) Um terreno triangular equilátero possui, em seu interior, uma árvore plantada. As distâncias perpendiculares dessa árvore até cada um dos três lados do terreno medem 3m, 4m e 5m. Qual a área do terreno em metros quadrados?

- a) $48\sqrt{3}m^2$
b) $36\sqrt{3}m^2$
c) $24\sqrt{3}m^2$
d) $24\sqrt{2}m^2$

e) $12\sqrt{2}m^2$

Problema 90. (ESPCEX) Considere ABC um triângulo retângulo em B e uma circunferência λ a ele inscrita, sendo $D \in \overline{AB}$, e $F \in \overline{AC}$ os pontos de tangência entre os lados do triângulo e a circunferência. Sabendo-se que os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 16 cm e 12 cm, calcule, em cm^2 , a área do quadrilátero $DBEF$.

a) $\frac{136}{5}$.

b) $\frac{216}{5}$.

c) $\frac{480}{5}$.

d) $\frac{128}{5}$.

e) $\frac{96}{5}$.

Problema 91. (ESPCEX) Um quadrilátero $ABCD$ tem as diagonais perpendiculares entre si medindo 5 cm e 7 cm. A área do quadrilátero, em cm^2 , é igual a:

a) 6

b) 7

c) 12

d) 17,5

e) 35

Problema 92. (AFA) Considere um triângulo retângulo cujo perímetro mede 15 unidades de comprimento e que seus lados estão em uma progressão aritmética crescente. A partir desse triângulo, podemos inscrever uma circunferência de raio r , bem como circunscrever outra circunferência de raio R . Então, a razão entre o raio da circunferência circunscrita e o raio da circunferência inscrita, nessa ordem, pertence ao intervalo:

a) $[1, 2[$

b) $[2, 3[$

c) $[3, 4[$

d) $[4, 5]$

Problema 93. (ESPCEX) Um depósito de munições no formato retangular será construído em um campo de instrução do Exército Brasileiro. A planta da construção prevê que esse retângulo esteja inscrito em uma área cujo formato é de um triângulo isósceles de base 24m e altura 16m. A área máxima do depósito que atende a essas condições é igual a:

a) $32 m^2$

b) $48 m^2$

c) $64 m^2$

d) $72 m^2$

e) 96 m^2

P