

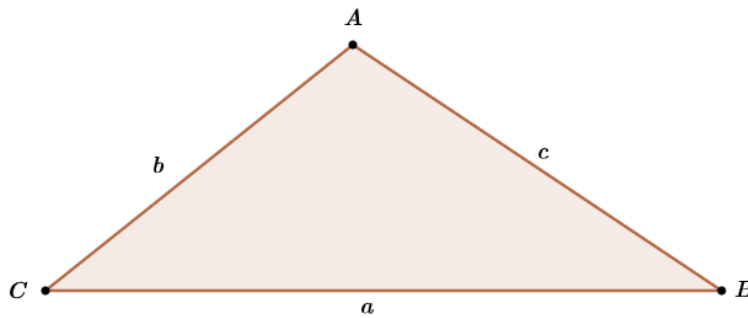
Triângulos (TEORIA COM EXERCÍCIOS)

Professor Yuri Politano

Nota: Em algumas demonstrações dos teoremas presentes neste material são utilizadas ferramentas que presumo ser do conhecimento do(a) leitor(a).

1. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Considere um triângulo ABC abaixo cujos lados serão representados por a, b e c .



A sua existência está atrelada as seguintes desigualdades:

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

1.1 SÍNTESE DE CLAIRAUT

Considere um triângulo qualquer ABC . O maior lado deste triângulo representaremos por a e os outros dois menores b e c . Segue:

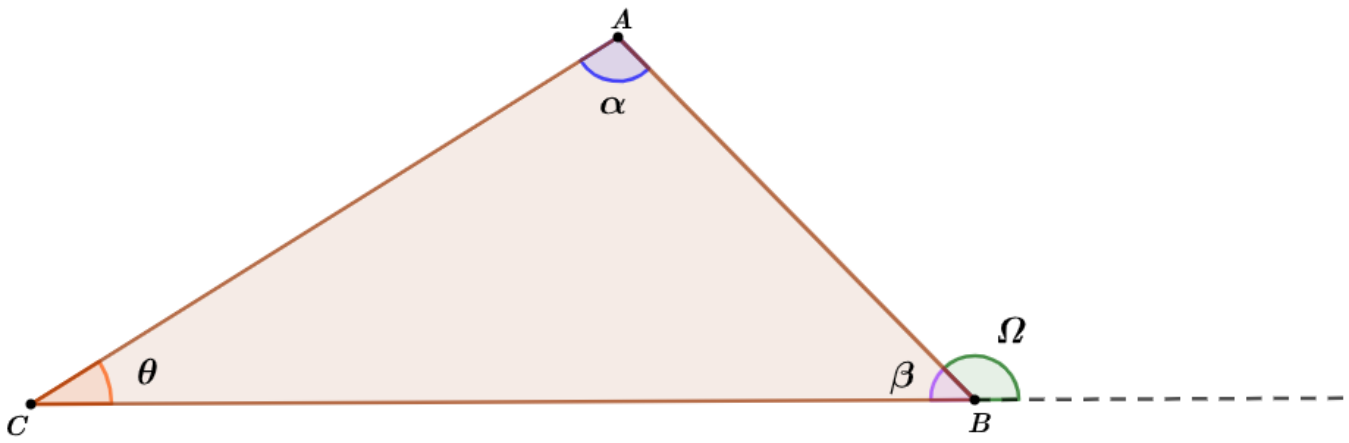
$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{triângulo retângulo}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{triângulo obtusângulo}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{triângulo acutângulo}$$

2. TEOREMAS

Seja ABC um triângulo qualquer.



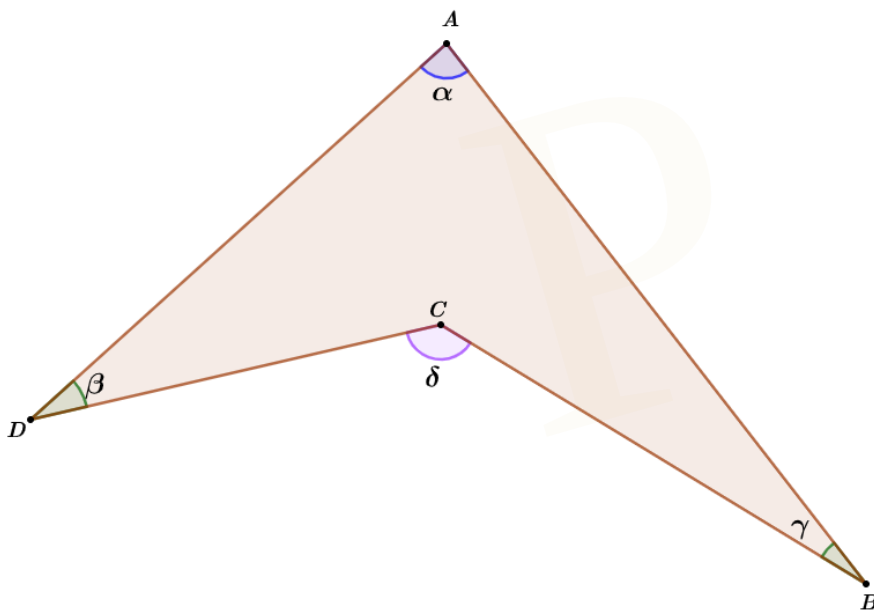
→ Lei angular de Tales:

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

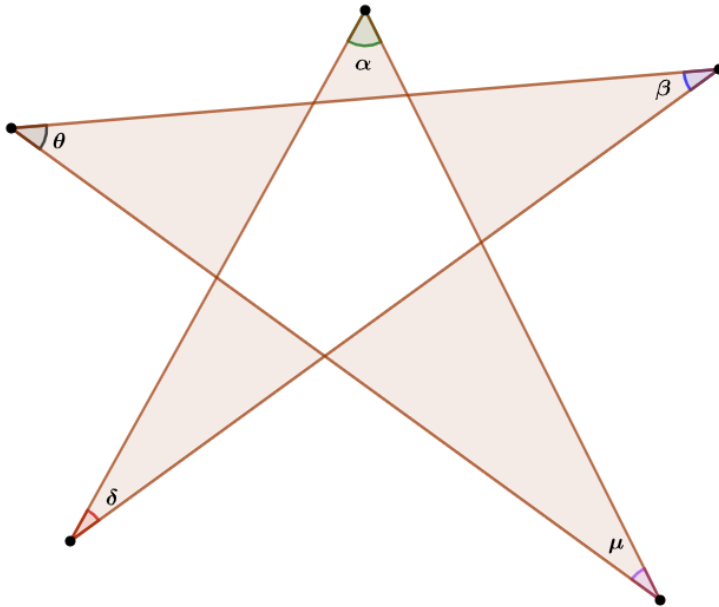
→ Teorema do Ângulo Externo

$$\Omega = \alpha + \theta$$

Consequências:



$$\delta = \gamma + \alpha + \beta$$



$$\alpha + \beta + \mu + \delta + \theta = 180^\circ$$

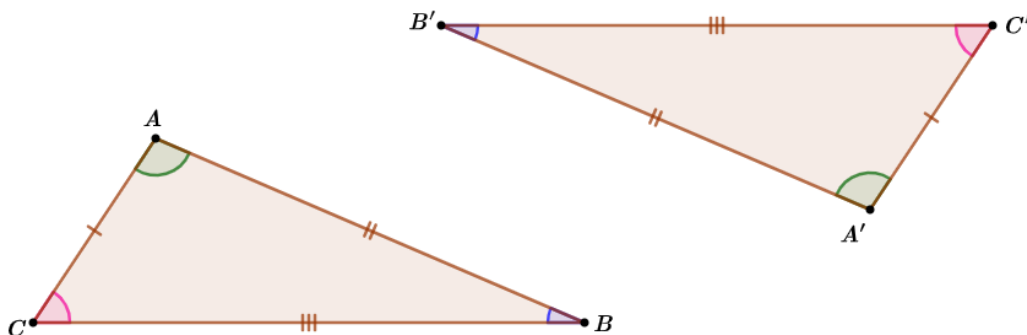
3. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são ditos congruentes se, e somente se, puderem ser sobrepostos utilizando movimentos rígidos no espaço, sem deformá-los.

Em suma, um triângulo ABC é congruente a um triângulo A'B'C' quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices, tal que:

- (i) Os ângulos internos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;
- (ii) Os lados opostos a vértices correspondentes tenham comprimentos iguais.

Nota-se: $\boxed{ABC \equiv A'B'C'}$



Casos de congruência:

1 – Lado, Lado, Lado (**LLL**)

2 – Lado, Ângulo, Lado (**LAL**)

3 – Ângulo, Lado, Ângulo (**ALA**)

4 – Lado, Ângulo, Ângulo Oposto (**LAA_o**)

5 – Cateto, Hipotenusa (**CH**)

4. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

(DEF). Dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, e escrevemos $\Delta(ABC) \sim \Delta(A'B'C')$, se:

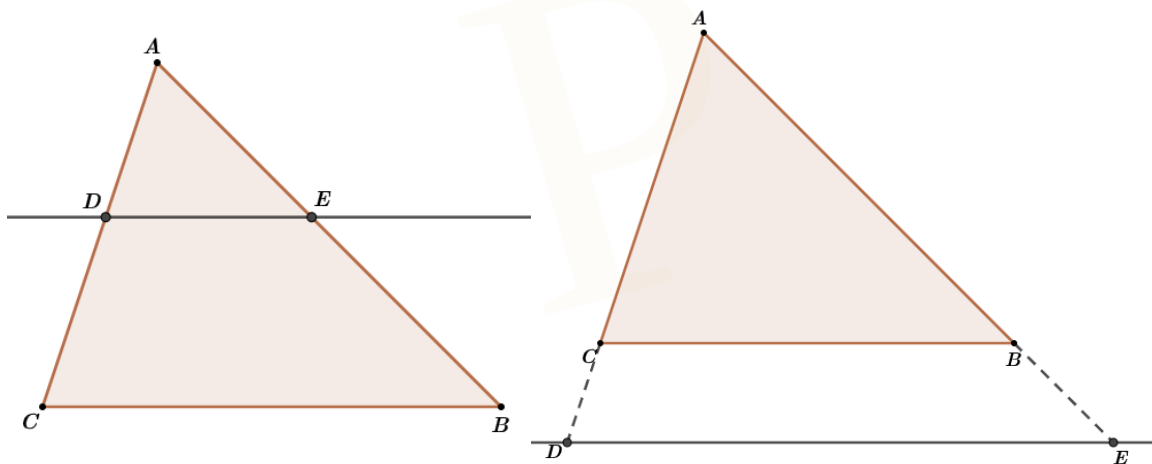
- i) $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C'}$;
- ii) $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$ (razão de semelhança)

Tome nota:

→ A razão entre dois segmentos quaisquer correspondentes dos triângulos ABC e A'B'C' é igual a razão de semelhança k.

→ A razão entre os raios das circunferências circunscritas aos triângulos semelhantes também é igual a k.

→ Seja r uma reta paralela a um dos lados de um triângulo ABC. A intersecção desta reta com os lados (ou prolongamentos) do triângulo, produz um novo triângulo semelhante a ABC.



Casos de semelhança:

1 – Ângulo, Ângulo (**AA**)

2 – Lado, Ângulo, Lado (**LAL**)

3 – Lado, Lado, Lado (**LLL**)

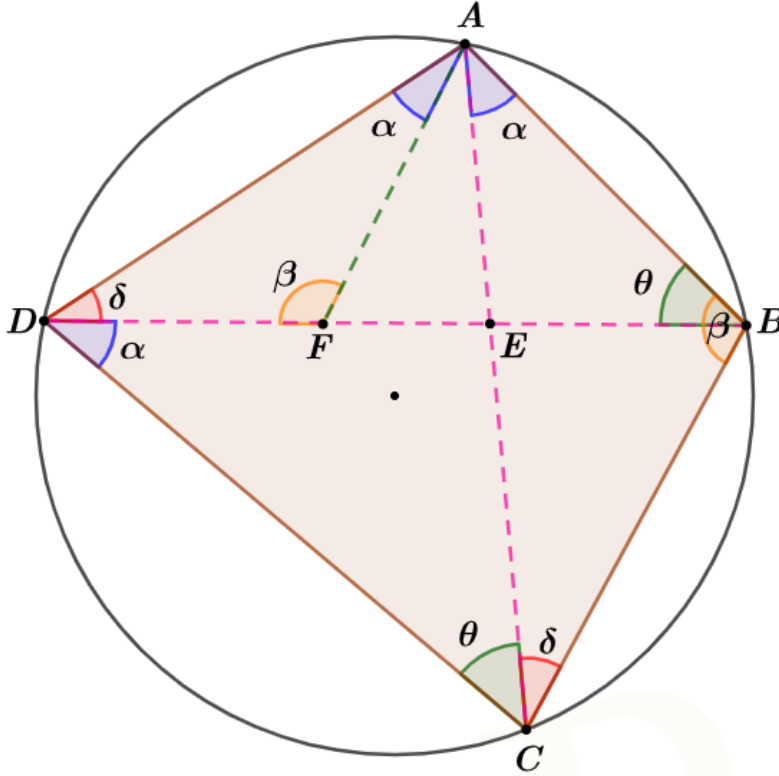
Temos ainda:

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = k^2$$

Tome nota:**Teorema de Ptolomeu (Quadriláteros inscritíveis)**

Num quadrilátero ABCD inscritível, vale:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$$

(Demonstração)

Tracemos AF (isogonal de AC em relação a AB e AD). Note que os triângulos AFD e ABC são **semelhantes**. Com efeito,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BC}} \quad (i)$$

Temos ainda AFB semelhante a ADC. Logo,

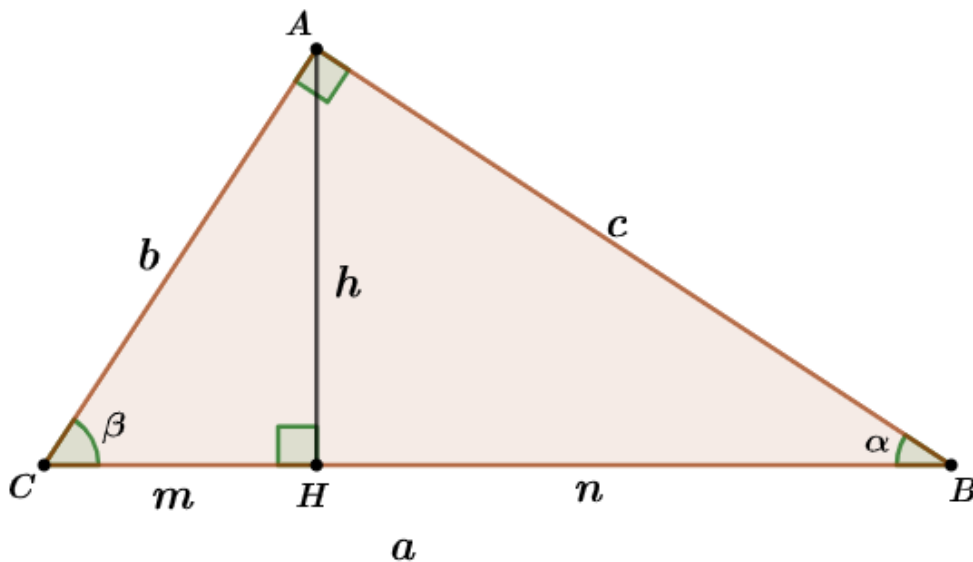
$$\frac{\overline{FB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (ii)$$

Isolando DF e FB e, somando ambas as equações temos:

$$\overline{DF} + \overline{FB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$$

■

4.1 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



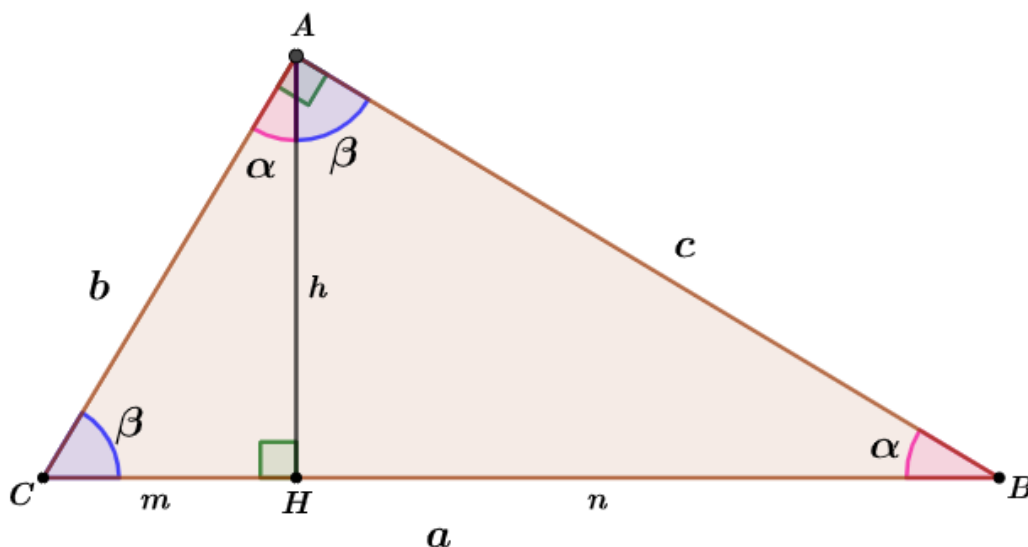
No triângulo acima, valem as seguintes relações:

- 1) $b^2 = a \cdot m$
- 2) $c^2 = a \cdot n$
- 3) $h^2 = m \cdot n$
- 4) $a \cdot h = b \cdot c$
- 5) $a^2 = b^2 + c^2$
- 6) $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$

Todas as relações acima podem ser demonstradas via semelhança entre os triângulos AHC, AHB e ABC ou via trigonometria (Tópico 4.2)

4.2 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja ABC um triângulo retângulo em A, com ângulos em B e C medindo α e β , respectivamente. Valem as relações abaixo.



$$\boxed{\text{Sen}(\beta) = \frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c} = \text{Cos}(\alpha)}$$

$$\boxed{\text{Cos}(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{m}{b} = \frac{h}{c} = \text{Sen}(\alpha)}$$

$$\boxed{\text{Tan}(\beta) = \frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h} = \frac{1}{\text{Tan}(\alpha)} = \frac{\text{Sen}(\beta)}{\text{Cos}(\beta)}}$$

Note ainda que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow \boxed{\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1}$$

Além disso, definiremos:

$$\text{Secante de } \alpha = \frac{1}{\text{cosseno de } \alpha}$$

$$\text{Cossecante de } \alpha = \frac{1}{\text{seno de } \alpha}$$

$$\text{Cotangente de } \alpha = \frac{1}{\text{tangente de } \alpha}$$

Com efeito,

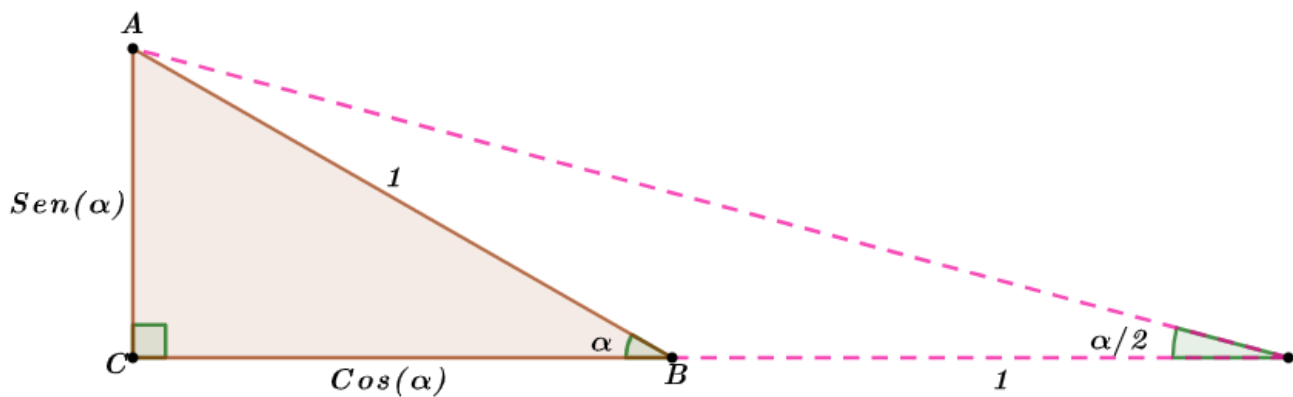
$$\boxed{1 + \text{cotan}^2(\alpha) = \text{cossec}^2(\alpha)}$$

e,

$$\boxed{1 + \text{tan}^2(\alpha) = \text{sec}^2(\alpha)}$$

Tome nota:

Tomemos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa unitária. Prolonguemos a base BC com comprimento unitário e conectamos a extremidade deste prolongamento em A. Veja:



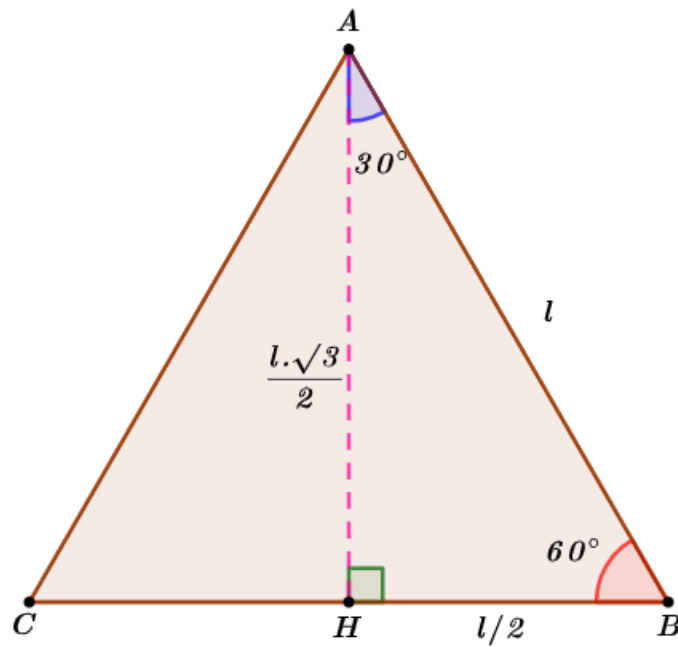
Com efeito,

$$\boxed{\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{Sen}(\alpha)}{1 + \text{Cos}(\alpha)}}$$

4.2.1 ÂNGULOS NOTÁVEIS

Neste tópico trataremos dos ângulos de $15^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 54^\circ, 60^\circ$ e 75° .

→ Triângulo Equilátero

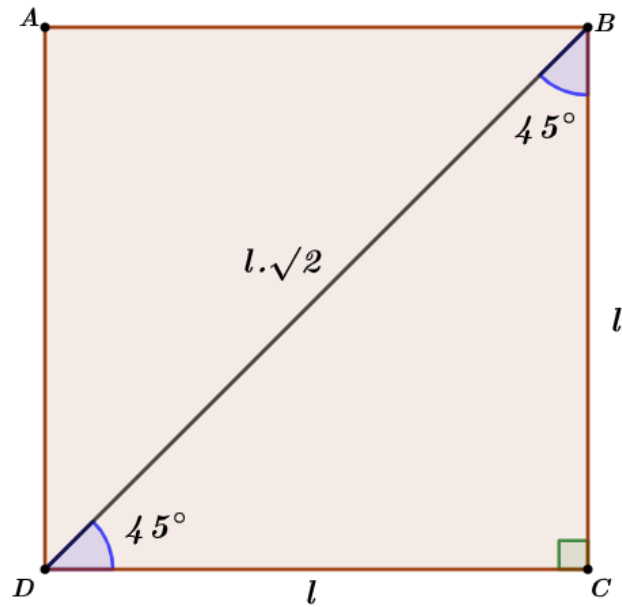


$$\text{Sen}(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Cos}(30^\circ)$$

$$\text{Cos}(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} = \text{Sen}(30^\circ)$$

$$\text{Tan}(60^\circ) = \frac{\text{Sen}(60^\circ)}{\text{Cos}(60^\circ)} = \sqrt{3} = \frac{1}{\text{Tan}(30^\circ)}$$

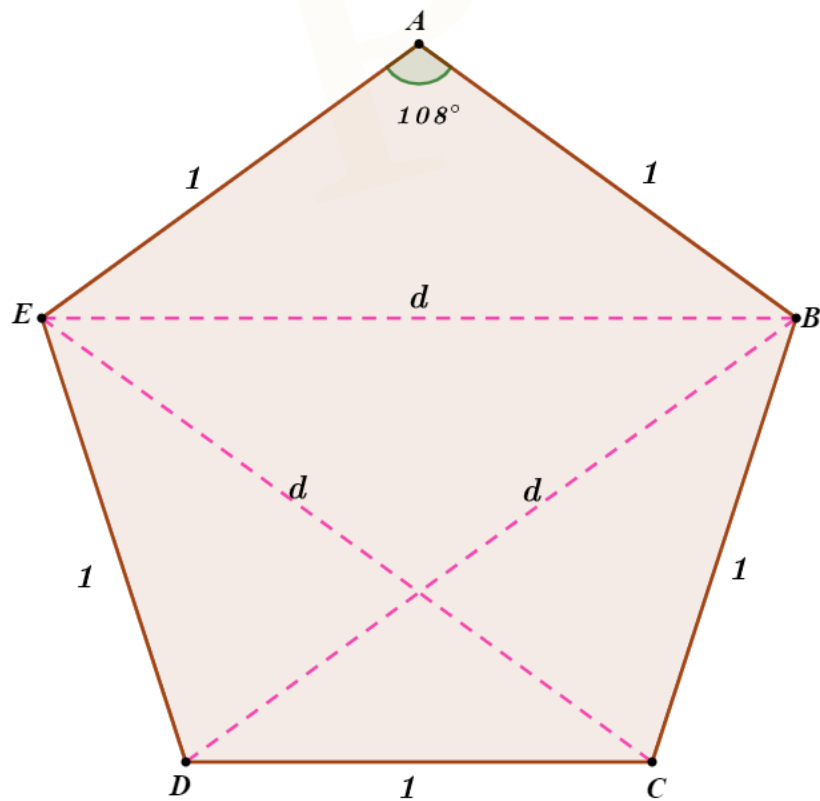
→ Quadrado



$$\text{Sen}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Cos}(45^\circ)$$

$$\text{Tan}(45^\circ) = \frac{\text{Sen}(45^\circ)}{\text{Cos}(45^\circ)} = 1$$

→ Pentágono Regular (**Lado unitário**)



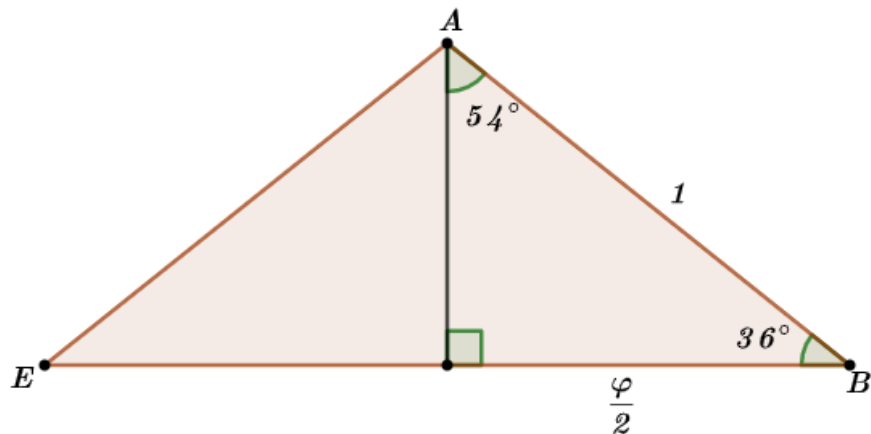
Existem dois caminhos legais para determinarmos o comprimento da diagonal do pentágono regular. Via semelhança ou através do teorema de Ptolomeu no trapézio isósceles BCDE. Utilizaremos a segunda maneira.

$$d \cdot d = d \cdot 1 + 1 \cdot 1 \Leftrightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Daí,

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

No triângulo ABD, pode-se baixar a altura em relação a BE. Note:

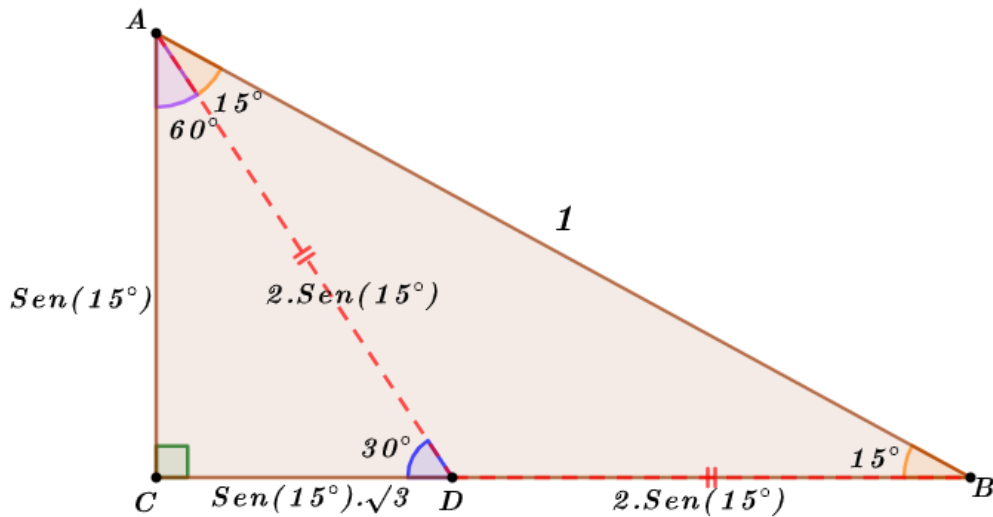


Daí,

$$\text{Sen}(54^\circ) = \frac{\varphi}{2} = \text{Cos}(36^\circ)$$

→ Sobre o ângulo de 15°

Tomemos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa unitária. Considere o ângulo localizado no vértice B igual a 15° . Vamos traçar uma ceviana partindo de A e dividindo internamente BC através de D de modo que $\overline{AD} = \overline{DB}$. Veja:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$$1^2 = \text{Sen}^2(15^\circ) + \left(\text{Sen}(15^\circ) \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \text{Sen}(15^\circ) \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = \text{Sen}^2(15^\circ) + \text{Sen}^2(15^\circ) \cdot (3) + 4\sqrt{3} \cdot \text{Sen}^2(15^\circ) + 4 \cdot \text{Sen}^2(15^\circ) \Leftrightarrow$$

$$1 = \text{Sen}^2(15^\circ) \cdot (8 + 4\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$4\text{Sen}^2(15^\circ) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

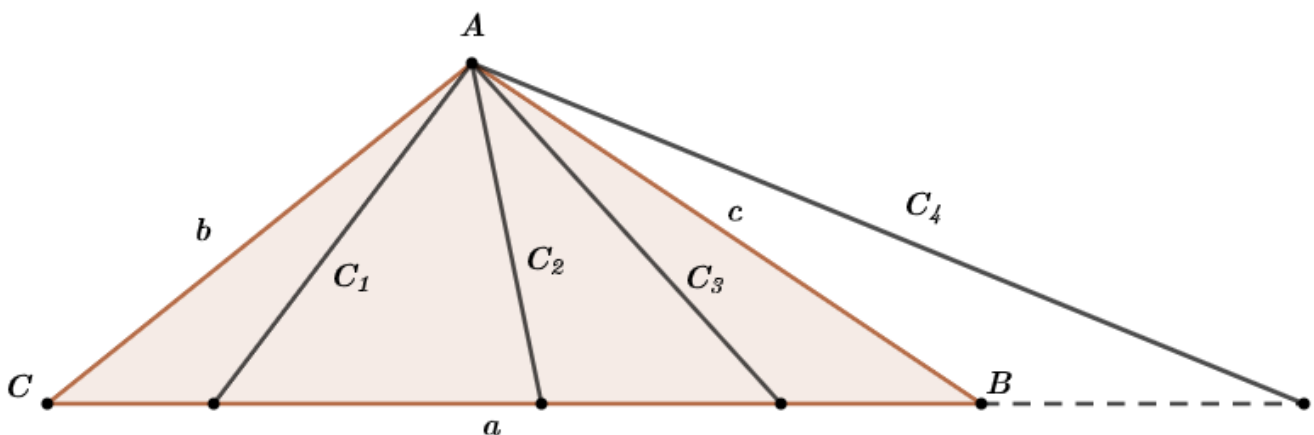
$$\boxed{\text{Sen}(15^\circ) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \text{Cos}(75^\circ)}$$

Ou ainda,

$$\boxed{\text{Sen}(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \text{Cos}(75^\circ)}$$

5. CEVIANAS

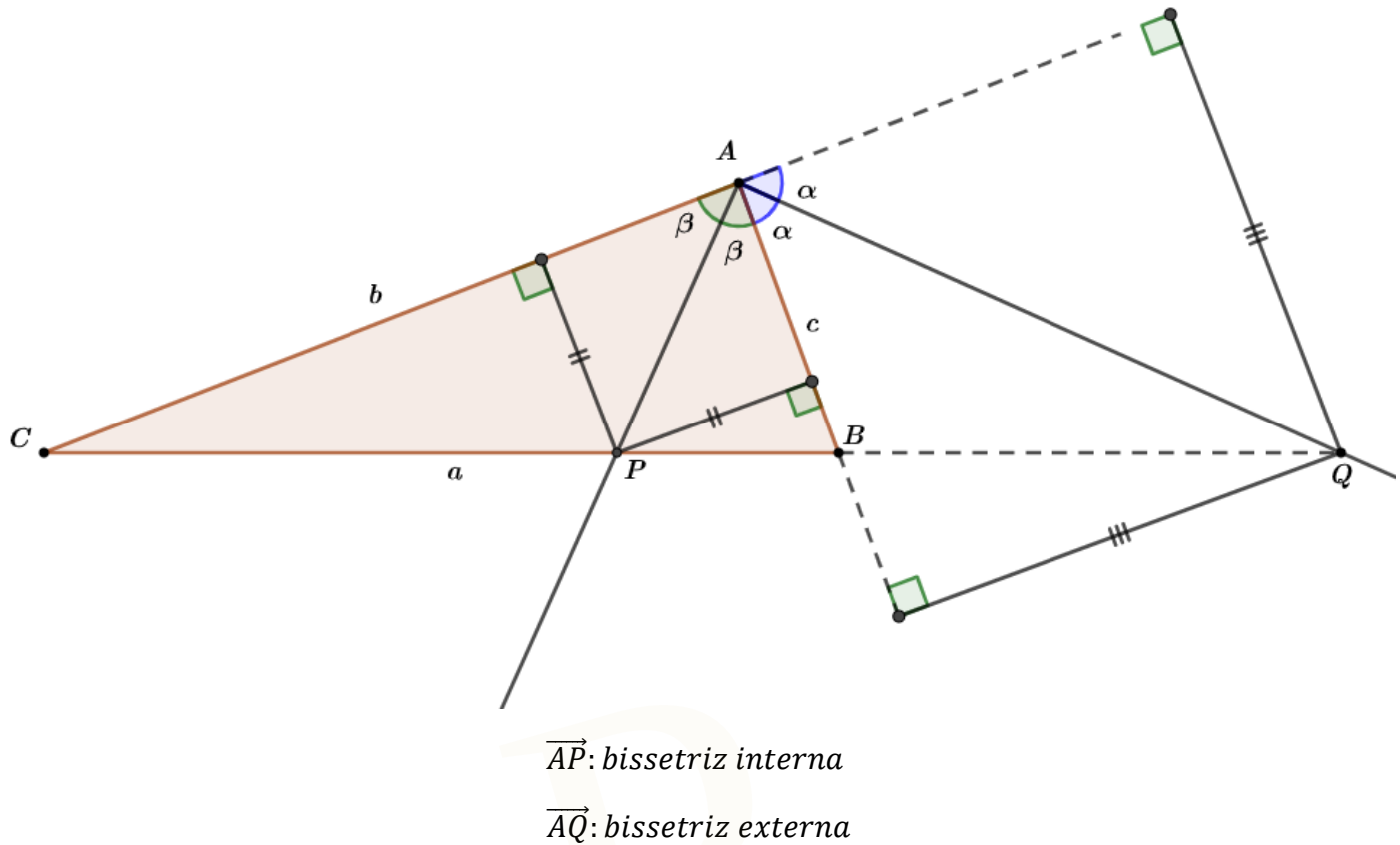
Ceviana é qualquer semirreta que parte de um vértice de um triângulo e toca no lado oposto (ou no prolongamento). As principais cevianas são: Bissetriz, Altura e Mediana.



→ C_1, C_2, C_3 e C_4 são exemplos de cevianas.

5.1 BISSETRIZ

A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam os lados do ângulo. Tal ângulo divide-se em dois ângulos de mesma medida.



Para fins de cálculos, temos que:

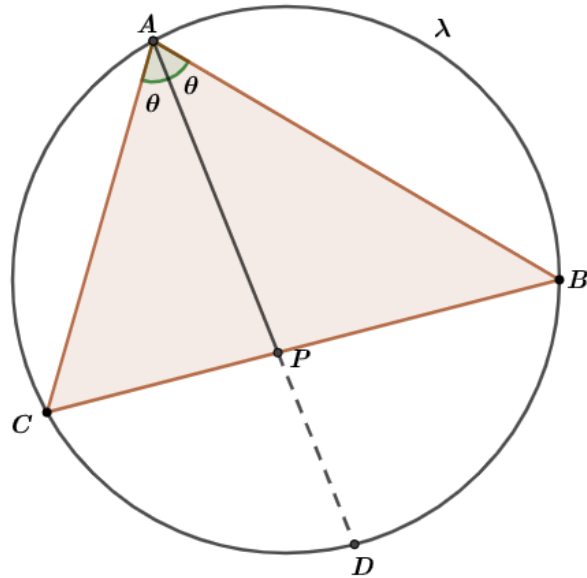
$$\boxed{AP^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{PC} \cdot \overline{PB}} \quad (1)$$

$$\boxed{AQ^2 = \overline{CQ} \cdot \overline{BQ} - \overline{AC} \cdot \overline{AB}} \quad (2)$$

(Demonstração)

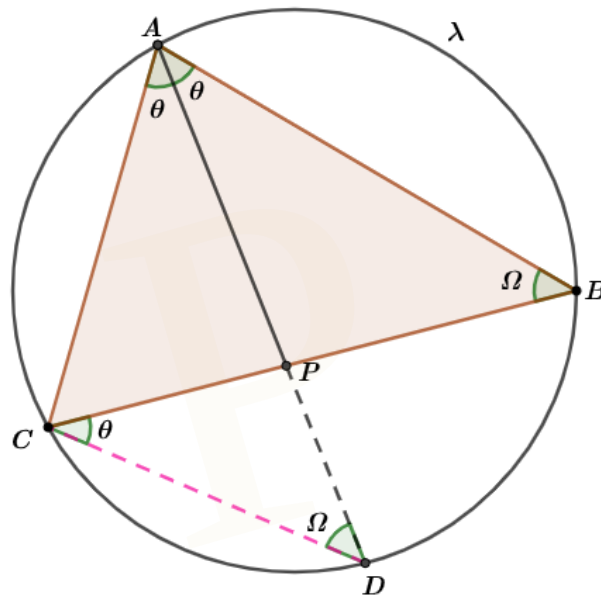
1. Bissetriz interna

Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência λ , onde AP é o segmento que representa a bissetriz interna deste triângulo.



O prolongamento de AP encontra λ em D.

Ao conectarmos D em C, temos: $ABP \sim ACD$



Daí,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP} + \overline{PD}} \text{ (via semelhança)}$$

Além disso,

$$\overline{AP} \cdot \overline{PD} = \overline{PC} \cdot \overline{PB} \text{ (via teorema das cordas)}$$

Logo,

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PD} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{PC} \cdot \overline{PB}$$

■

A demonstração do item (2) fica a cargo do Leitor.

5.1.1 QUÁDRUPLA HARMÔNICA

Um segmento qualquer BC estará dividido harmonicamente se, e somente se, os pontos que o dividem internamente e externamente, P e Q , respectivamente, formarem a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}}$$

Os pés das bissetrizes interna e externa, dividem BC harmonicamente.

Para que tal igualdade seja verificada, basta aplicarmos os teoremas da bissetriz interna e externa.

TBI (Teorema da Bissetriz Interna)

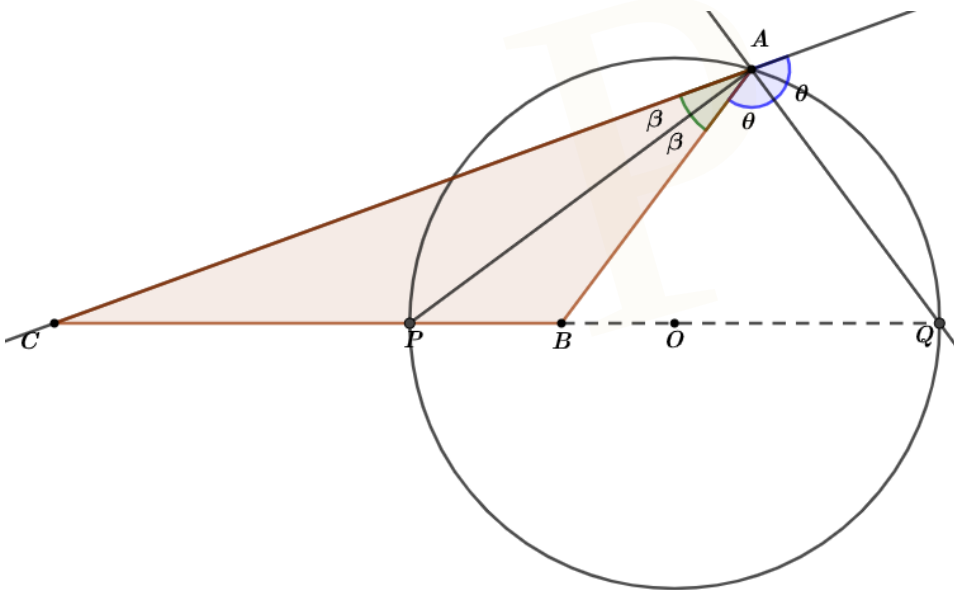
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = k$$

TBE (Teorema da Bissetriz Externa)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = k$$

5.1.2 CÍRCULO DE APOLÔNIO

Considere um triângulo ABC , donde BC é fixo e $\frac{AC}{AB} = k$ (*constante*). O círculo de Apolônio é o lugar geométrico dos pontos que preservam a razão $\frac{AC}{AB}$.



O raio do círculo pode ser obtido através da seguinte relação:

$$r = k \cdot \frac{\overline{BC}}{|k^2 - 1|}$$

(Demonstração)

Vamos considerar o segmento BC abaixo dividido internamente e externamente pelos pontos P e Q , respectivamente, numa mesma razão.



Nosso objetivo consiste em determinar a distância entre os divisores harmônicos. Chamemos $\overline{PB} = a$ e $\overline{BQ} = b$. Com efeito,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{BC} - a}{a} = k \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\overline{BC}}{k + 1}}$$

Analogamente,

$$\boxed{b = \frac{\overline{BC}}{k - 1}}$$

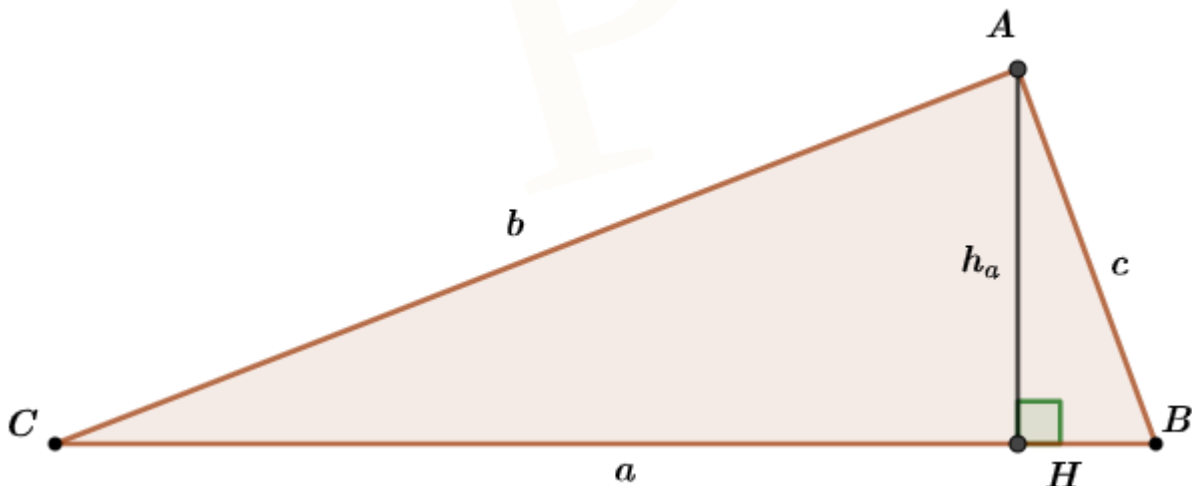
Logo,

$$\overline{PQ} = \frac{2k \cdot \overline{BC}}{k^2 - 1}$$

■

5.2 ALTURA

A altura de um triângulo qualquer é a ceviana que parte de um vértice, toca no lado oposto ou no seu prolongamento, formando um ângulo reto a esse lado.



h_a : altura relativa ao lado a

Para fins de cálculos, temos que:

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}}$$

Onde, p é o semiperímetro do triângulo ABC.

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

(Demonstração)

Para a demonstração desse resultado iremos utilizar a Lei dos Cossenos tomando $\widehat{BCA} = \alpha$ como referência. Além disso, algumas manipulações algébricas serão necessárias.

Com efeito,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

Como $b \cdot \cos(\alpha) = \overline{CH}$, temos:

$$\overline{CH} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \text{ mas,}$$

$$b^2 = h_a^2 + \overline{CH}^2$$

$$\therefore h_a^2 = b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right]^2$$

$$\begin{aligned} \therefore 4a^2 \cdot h_a^2 &= 4 \cdot a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2) \cdot (2ab - a^2 - b^2 + c^2) = ((a+b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a-b)^2) \\ &= (a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a) \end{aligned}$$

Daí,

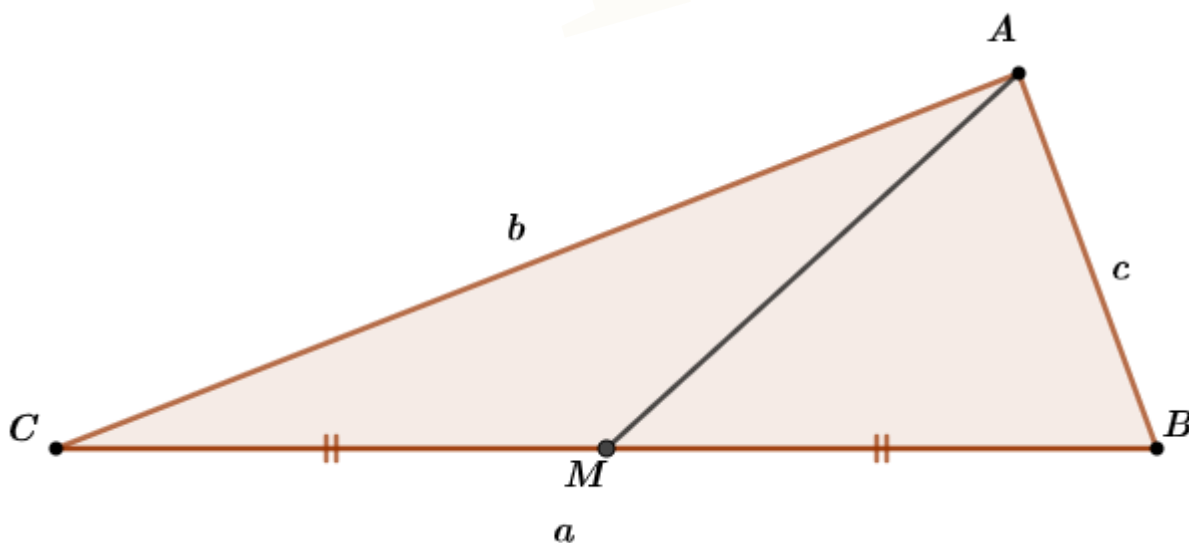
$$4a^2 \cdot h_a^2 = 2p \cdot 2 \cdot (p-c) \cdot 2 \cdot (p-b) \cdot 2 \cdot (p-a)$$

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

■

5.3 MEDIANA

A mediana de um triângulo qualquer é a ceviana que parte de um vértice e toca no ponto médio do lado oposto a esse vértice.



$\overline{AM}$: mediana relativa ao lado a

M : ponto médio de BC

Para fins de cálculos, temos que:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

(Demonstração)

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ACM e AMB:

$$(i) \ b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{AM}^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{AM} \cdot \cos(\widehat{AMC})$$

$$(ii) \ c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{AM}^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{AM} \cdot \cos(\pi - \widehat{AMC})$$

Com efeito,

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{AM}^2 - b^2}{a \cdot \overline{AM}} = \frac{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \overline{AM}^2}{a \cdot \overline{AM}} \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{AM}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{2}$$

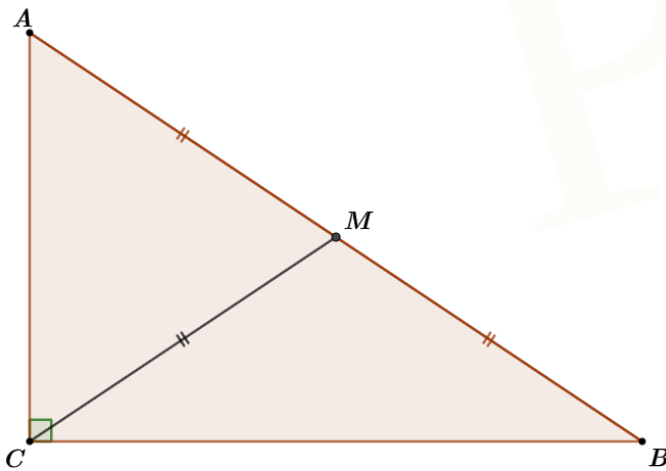
■

OBS:

$$[ACM] = [AMB]$$

-Mediana relativa à hipotenusa-

A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem por medida a metade da hipotenusa.



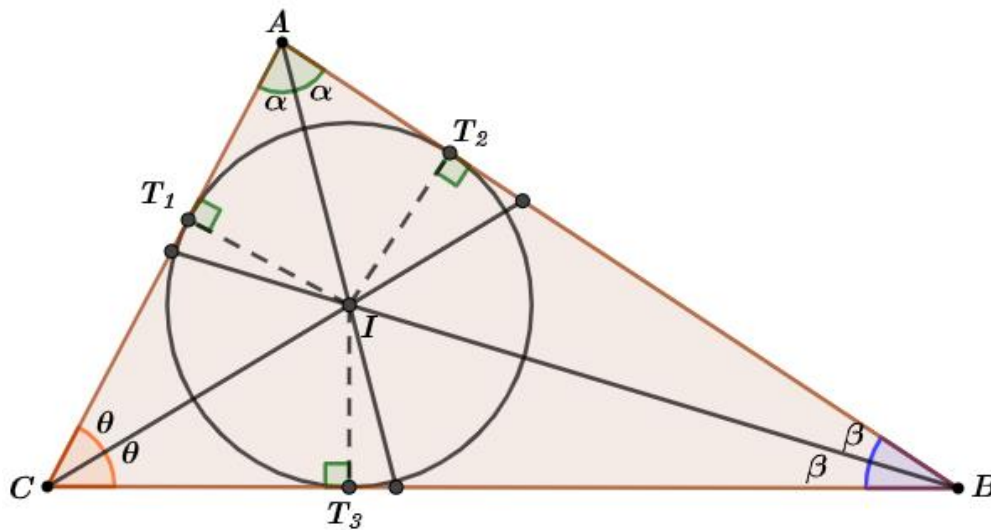
$$CM = AM = MB$$

6. PONTOS NOTÁVEIS

São pontos de intersecção das cevianas. Trataremos do incentro, ex-incentro, ortocentro e baricentro.

6.1 INCENTRO

É o ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.



I : Incentro (centro do círculo inscrito)

T_1, T_2 e T_3 : pontos de tangência

OBSERVAÇÕES

$$\overline{CT_1} = \overline{CT_3};$$

$$\overline{AT_1} = \overline{AT_2};$$

$$\overline{BT_2} = \overline{BT_3};$$

$$\overline{IT_3} \perp \overline{CB};$$

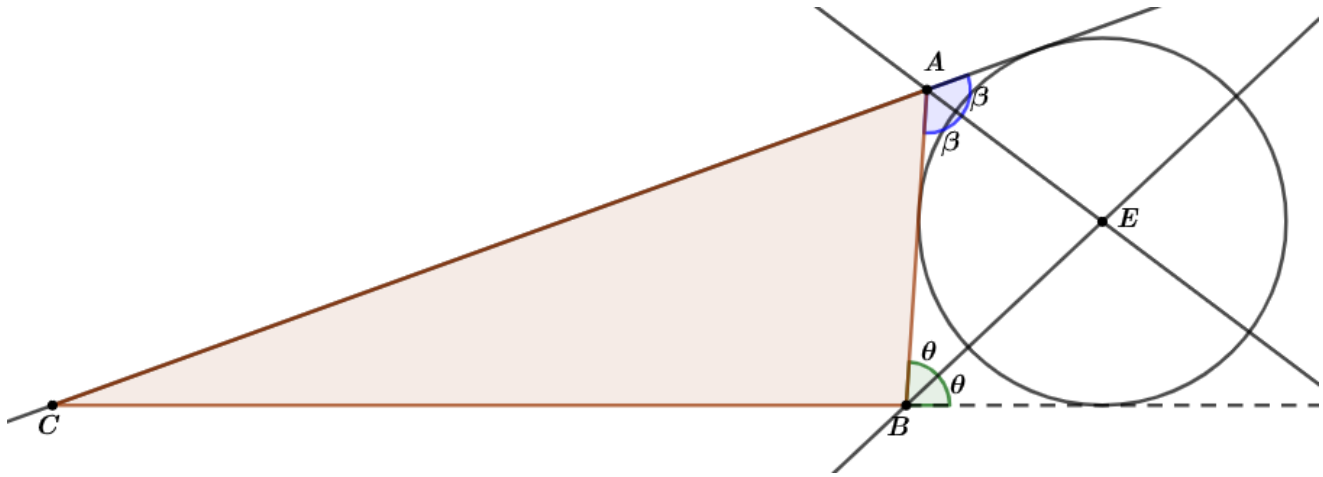
$$\overline{IT_1} \perp \overline{AC};$$

$$\overline{IT_2} \perp \overline{AB};$$

O símbolo $\perp$ indica que os segmentos são perpendiculares.

6.2 EX-INCENTRO

É o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo qualquer.



E : Ex – incentro

-UMA RELAÇÃO ENTRE OS RAIOS-

Seja: $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$

Com a finalidade de facilitar a degustação associada a este assunto, chamaremos:

r_a – raio do círculo ex – inscrito tangente ao lado a e ao prolongamento dos lados b e c .

r_b – raio do círculo ex – inscrito tangente ao lado b e ao prolongamento dos lados a e c .

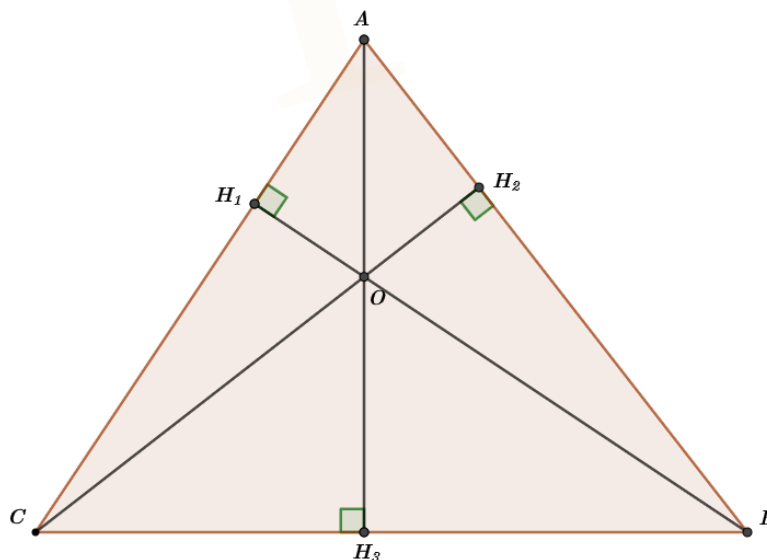
r_c – raio do círculo ex – inscrito tangente ao lado c e ao prolongamento dos lados b e a .

Sendo r o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC , vale a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

6.3 ORTOCENTRO

É o ponto de encontro das alturas de um triângulo.

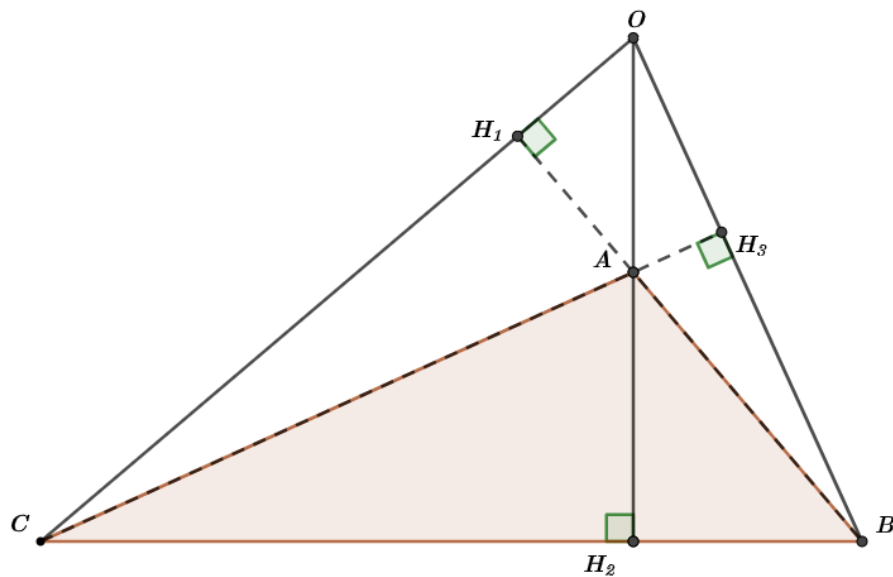


O : Ponto Órtico

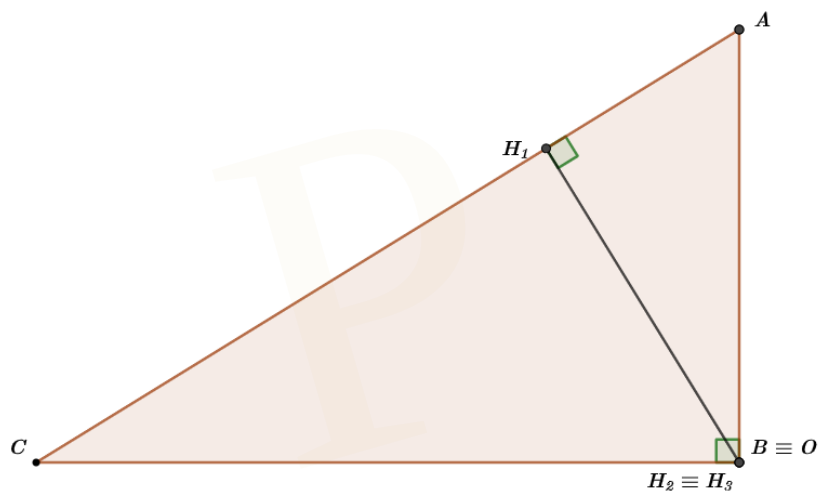
H_1, H_2, H_3 : Pés das alturas relativas aos lados

OBSERVAÇÕES

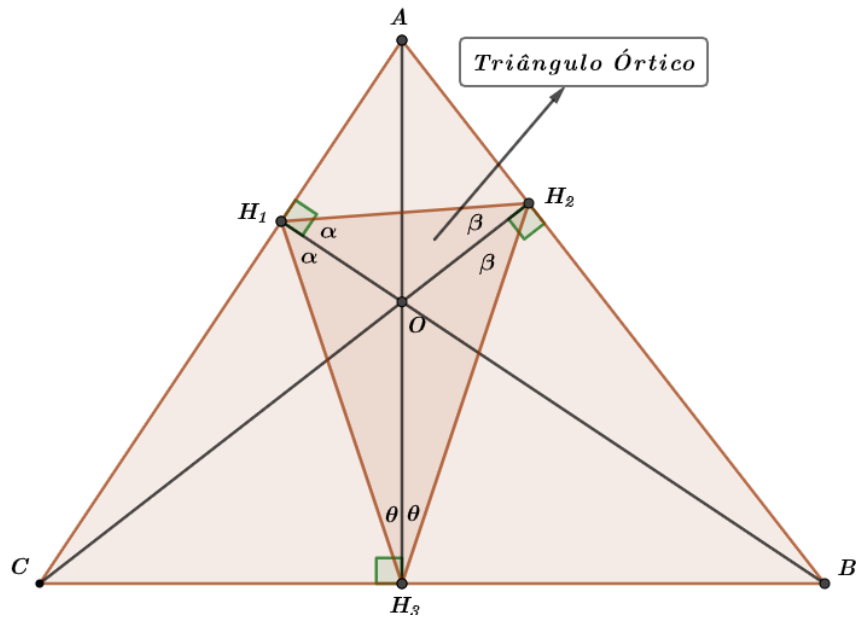
→ O ortocentro será um ponto externo ao triângulo, caso ele seja obtusângulo.



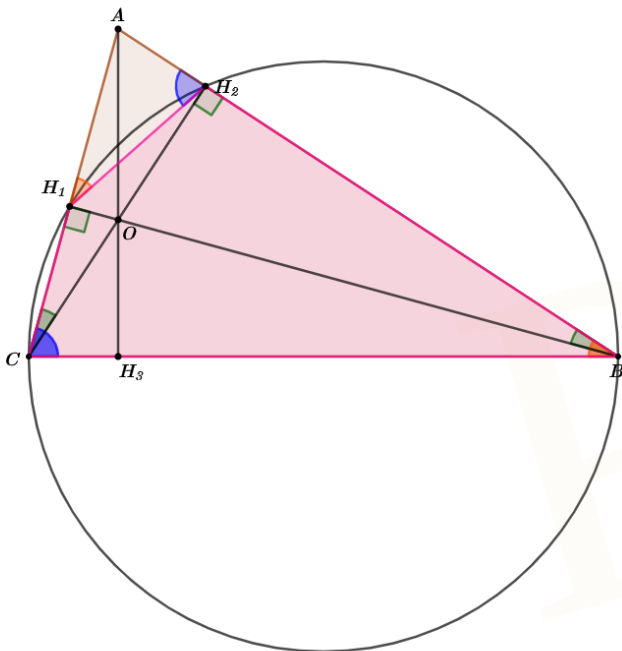
→ O ortocentro será um dos vértices do triângulo, caso ele seja retângulo.



→ O triângulo formado pelos pés das alturas é chamado **triângulo órtico**. O ortocentro, no triângulo órtico, exerce papel de incentro.

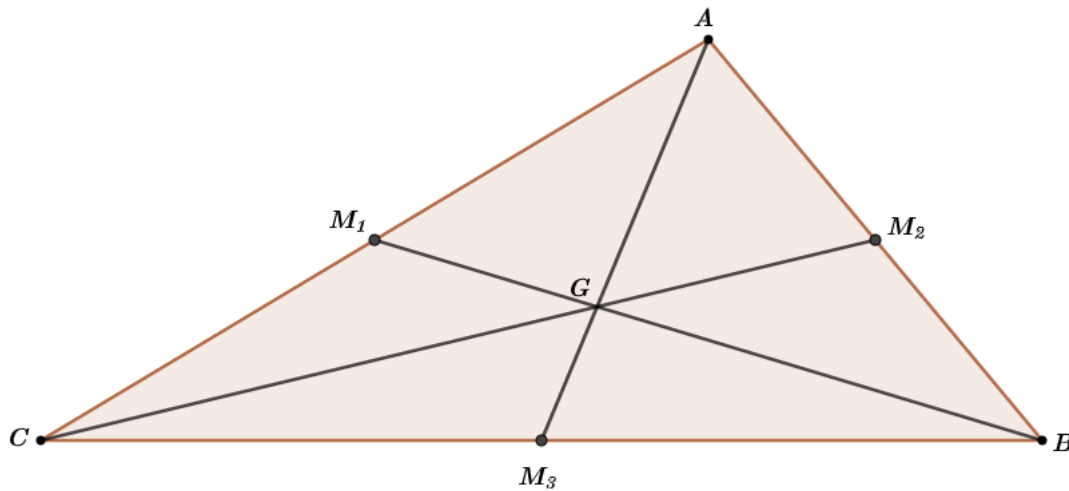


OBS: O quadrilátero CH_1H_2B é cíclico.



6.4 BARICENTRO

O baricentro, também conhecido como ponto gravitacional, é o ponto de encontro das medianas de um triângulo.



G : Baricentro

M_1, M_2 e M_3 : Pontos médios dos lados

TEOREMA 1

$$\overline{GA} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

$$\overline{GB} = 2 \cdot \overline{GM_1}$$

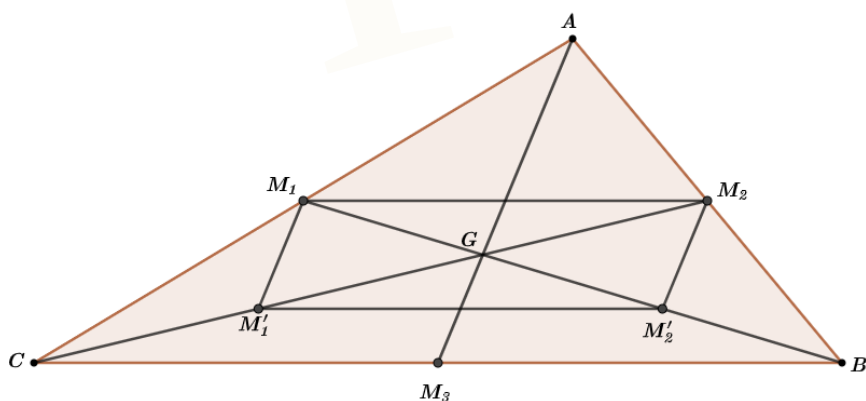
$$\overline{GC} = 2 \cdot \overline{GM_2}$$

(Demonstração)

Tomemos as seguintes construções.

i) Construir $\overline{M_1M'_1} \parallel \overline{AM_3} \parallel \overline{M_2M'_2}$

ii) Construir $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{M'_1M'_2} \parallel \overline{BC}$



Note que:

O quadrilátero $M_1M_2M'_1M'_2$ é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{GM_1} = \overline{GM'_2}$ e $\overline{GM'_1} = \overline{GM_2}$

No triângulo ABG , $\overline{M_2M'_2}$ é base média $\Rightarrow \overline{GM'_2} = \overline{BM'_2}$

No triângulo ACG , $\overline{M_1M'_1}$ é base média $\Rightarrow \overline{GM'_1} = \overline{CM'_1}$

Com efeito,

$$\overline{GA} = 2 \cdot \overline{GM}_3$$

$$\overline{GB} = 2 \cdot \overline{GM}_1$$

$$\overline{GC} = 2 \cdot \overline{GM}_2$$

■

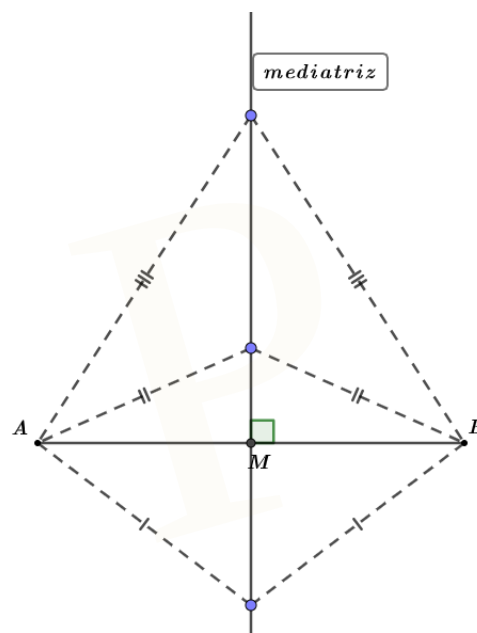
TEOREMA 2

$$(\overline{AM}_1)^2 + (\overline{AM}_2)^2 + (\overline{AM}_3)^2 = \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

7. MEDIATRIZ E CIRCUNCENTRO

A mediatriz e o circuncentro são importantes objetos matemáticos e possuem diversas aplicações. Vamos às definições.

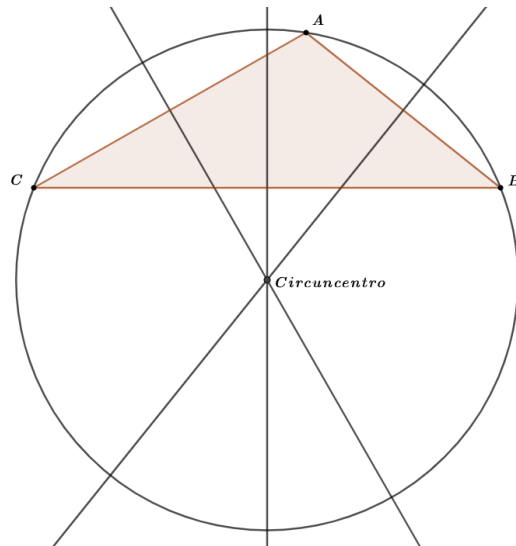
→ *Mediatriz*: É o lugar geométrico dos pontos que equidistam dois pontos fixos no plano.



AB: Segmento fixo

M: ponto médio

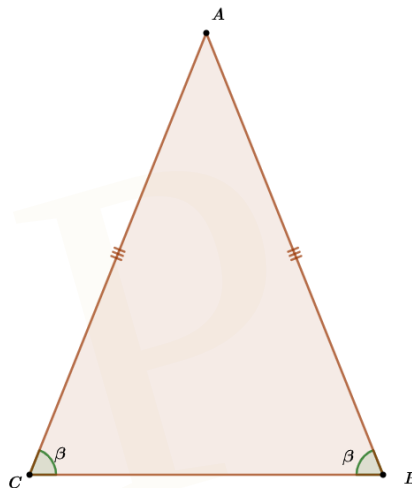
→ *Circuncentro*: É o ponto de encontro das mediatrizes num triângulo qualquer.



O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

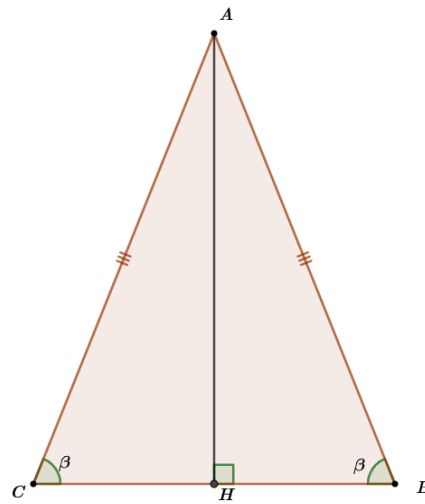
8. TRIÂNGULO ISÓSCELES

Possui dois lados de mesma medida, ou seja, congruentes.



De imediato podemos verificar que os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ possuem a mesma medida, pois, $AC = AB$.

Baixando, a partir de A , a altura relativa a BC , temos:



AH é altura

Note que os ângulos $C\hat{A}H$ e $H\hat{A}B$ são congruentes $\Rightarrow$ ***AH é bissetriz***

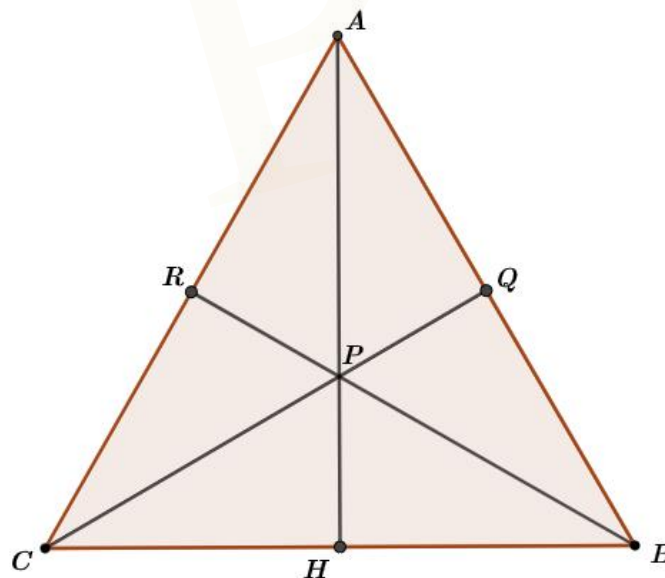
Como os triângulo ACH e ABH são congruentes, temos $CH = HB \Rightarrow$ ***AH é mediana***

9. TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Um triângulo equilátero é aquele em que as medidas dos três lados são congruentes. Consequentemente os três ângulos também são congruentes e medem 60° .

Todo triângulo equilátero é isóscele.

As propriedades do triângulo isósceles vistas no tópico 5 também são aplicadas neste caso que estudaremos agora. Considere o triângulo equilátero ABC abaixo:

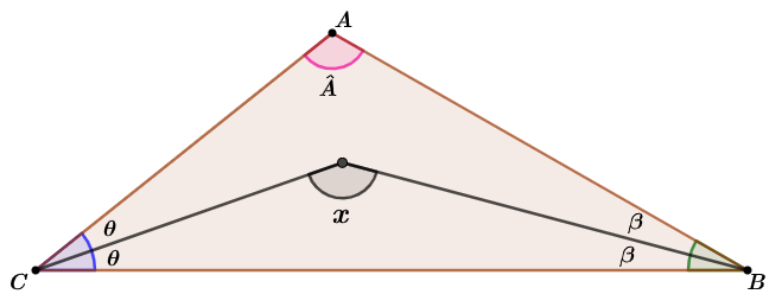


No triângulo equilátero, o ponto P indicado, representa: **Baricentro**, **Incentro**, **Circuncentro**, **Ortocentro**.

OBS: As áreas dos 6 triângulos formados são iguais.

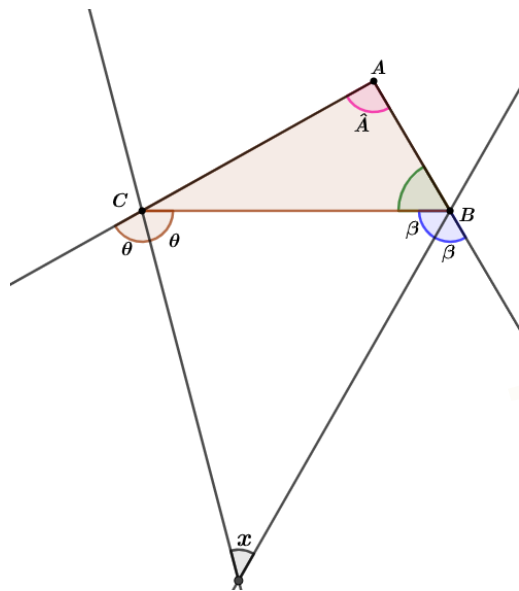
10. ÂNGULOS

Bissetriz interna → Bissetriz interna



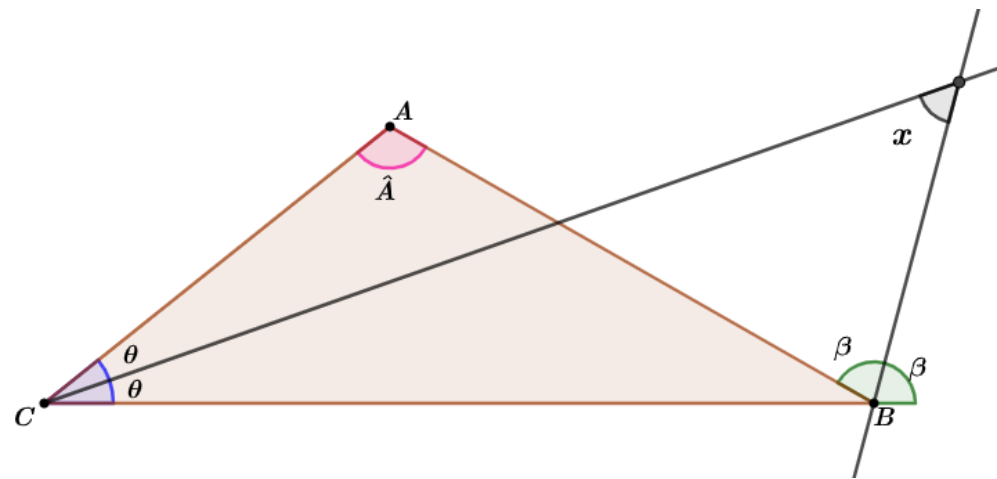
$$x = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

Bissetriz externa → Bissetriz externa



$$x = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

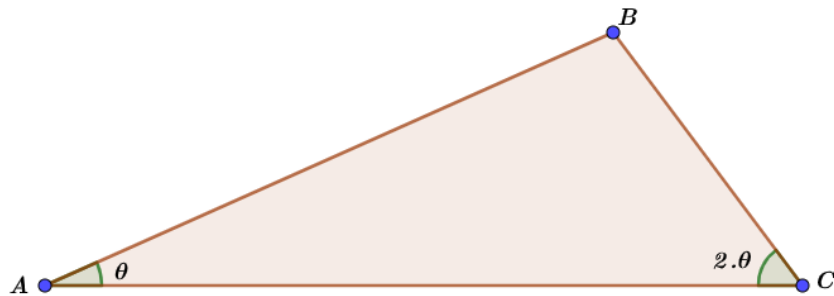
Bissetriz interna → Bissetriz externa



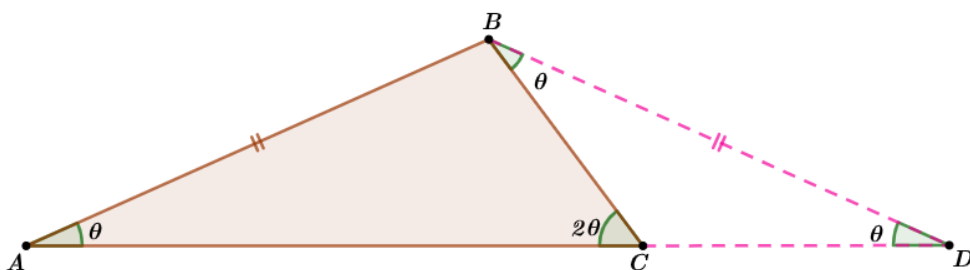
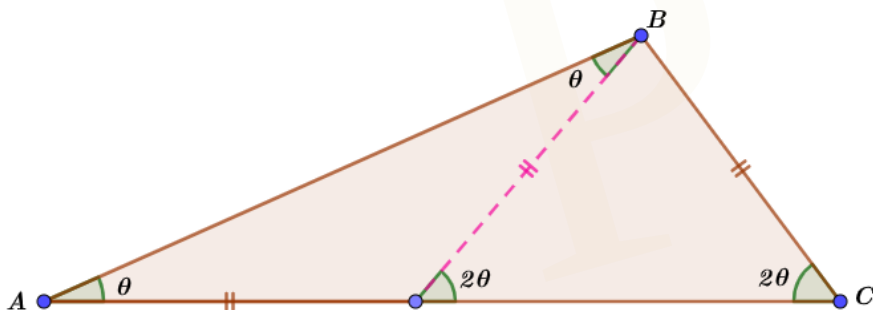
$$x = \frac{\hat{A}}{2}$$

As demonstrações dos teoremas acima ficam a cargo do leitor.

11. UMA IDEIA DE CONSTRUÇÃO AUXILIAR

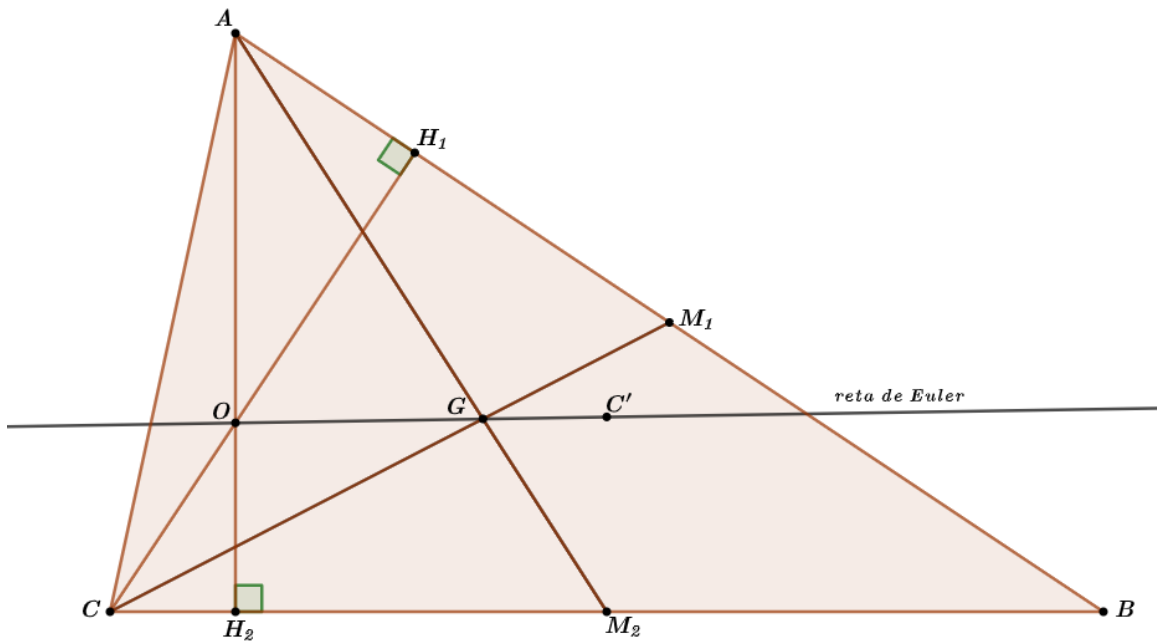


Se num determinado triângulo, a medida de um dos ângulos for o dobro da medida do outro, pode-se traçar uma ceviana de comprimento fixo com objetivo de se criar triângulos isósceles. Veja:



12. A RETA DE EULER

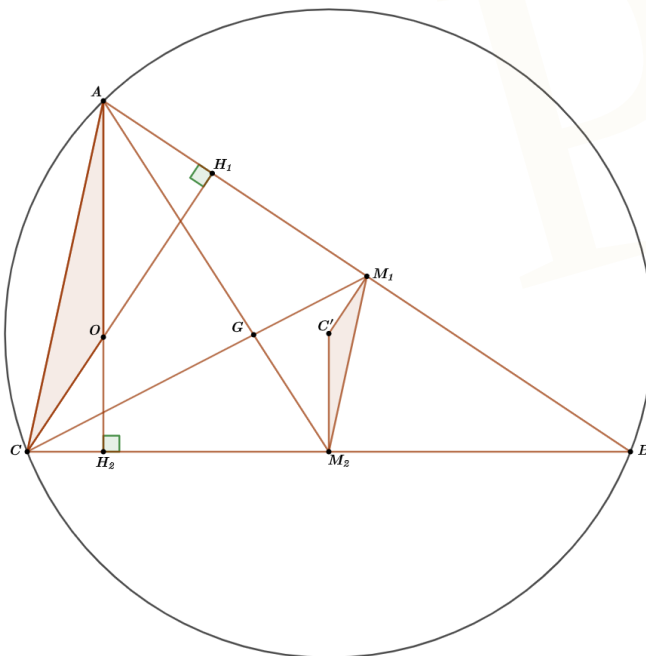
A reta que contém o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo denomina-se *reta de Euler*.



No triângulo acima, os pontos O, G e C' representam, respectivamente, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro do triângulo ABC.

$$\overline{OG} = 2\overline{GC'}$$

(Demonstração)



Note que os triângulos em destaque são semelhantes, uma vez que :

$$\overline{M_1M_2} \parallel \overline{AC}$$

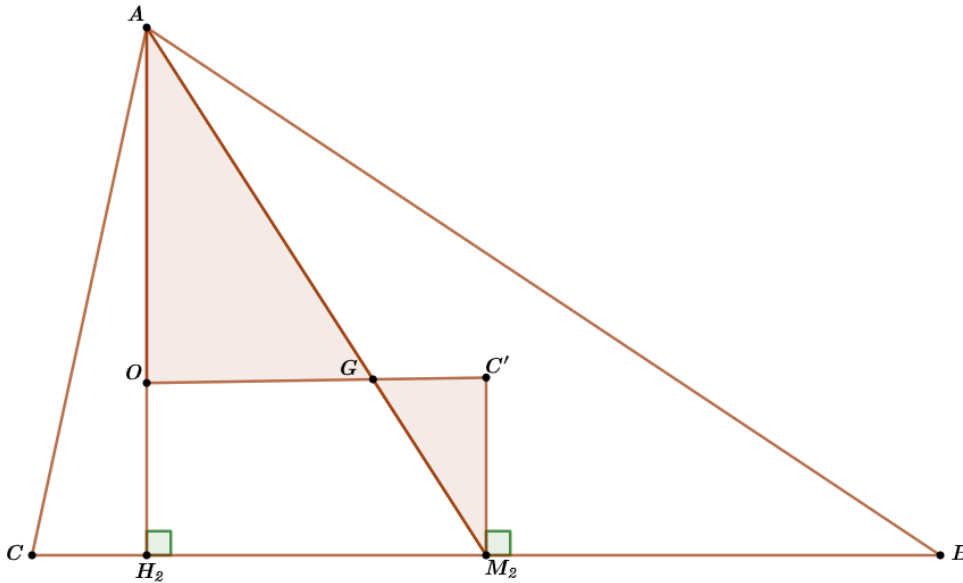
$$\overline{OC} \parallel \overline{C'M_1}$$

$$\overline{AO} \parallel \overline{M_2C'}$$

A razão de semelhança entre os triângulos ACO e $C'M_1M_2$ é $\frac{1}{2}$. Daí:

$$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{C'M_2}$$

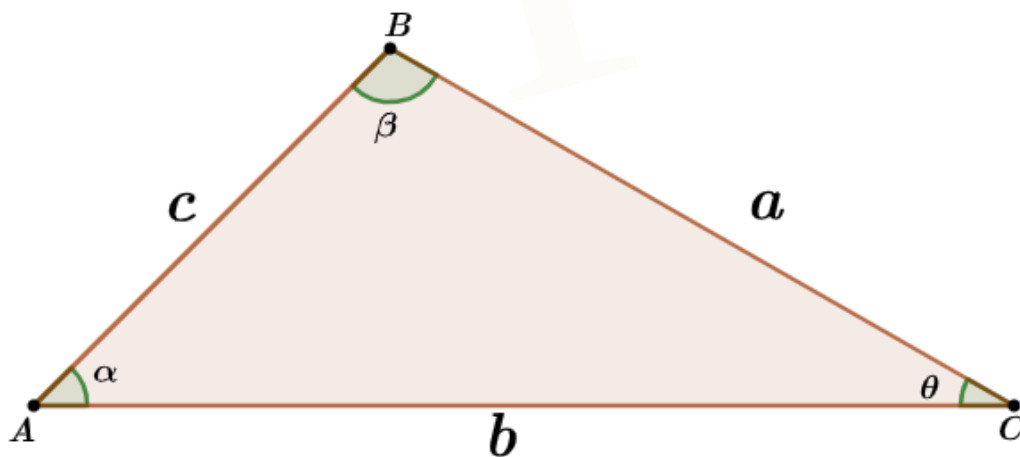
Agora observe que os triângulos AOG e $GC'M_2$ são semelhantes de razão $\frac{1}{2}$.



■

11. LEI DOS COSSENOS

Seja ABC um triângulo qualquer.



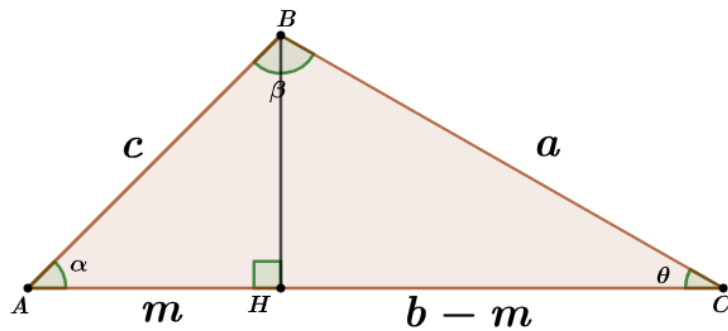
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$$

Dem. 1 (Via teorema de Pitágoras)

Seja H o pé da altura traçada do vértice B ao lado AC.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulo ABH e BCH:

$$c^2 = m^2 + (\overline{BH})^2$$

$$a^2 = (b - m)^2 + (\overline{BH})^2$$

Subtraindo as equações, temos:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2bm \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Como $\cos(\alpha) = \frac{m}{c} \Leftrightarrow m = c \cdot \cos(\alpha)$, concluímos a demonstração.

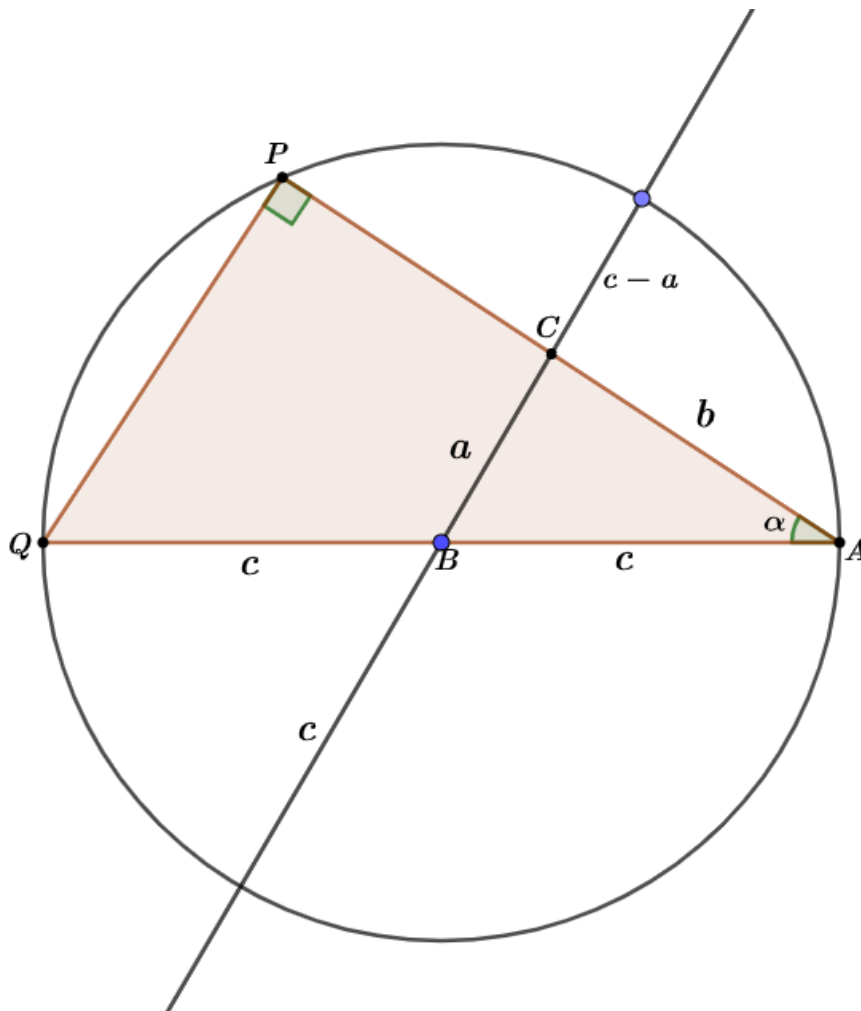
TOME NOTA: Caso o triângulo seja obtusângulo, não esquecer que :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

■

Dem. 2 (Via teorema das cordas)

Tomemos um triângulo retângulo PAQ inscrito numa circunferência de raio “c”. Seja r uma reta que intersecta os lados PA e QA do triângulo nos pontos C e B, respectivamente. Chamemos $BC = a$ e $CA = b$.



Como $PA = 2c \cdot \cos(\alpha)$, temos:

$$PC = 2c \cdot \cos(\alpha) - b$$

Pelo teorema das cordas :

$$(2c \cdot \cos(\alpha) - b) \cdot b = (c - a) \cdot (c + a) \Leftrightarrow 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) - b^2 = c^2 - a^2$$

■

→ Uma outra maneira interessante de se representar a lei dos cossenos é isolando o cosseno do ângulo. Veja:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

Note ainda que, ao somarmos uma unidade em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\cos(\alpha) + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p \cdot (2p - 2a)}{2bc} \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) + 1 = \frac{2p \cdot (p - a)}{bc}}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por 2:

$$\frac{\cos(\alpha) + 1}{2} = \frac{p \cdot (p - a)}{bc}$$

Logo,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p \cdot (p - a)}{bc}}$$

Analogamente,

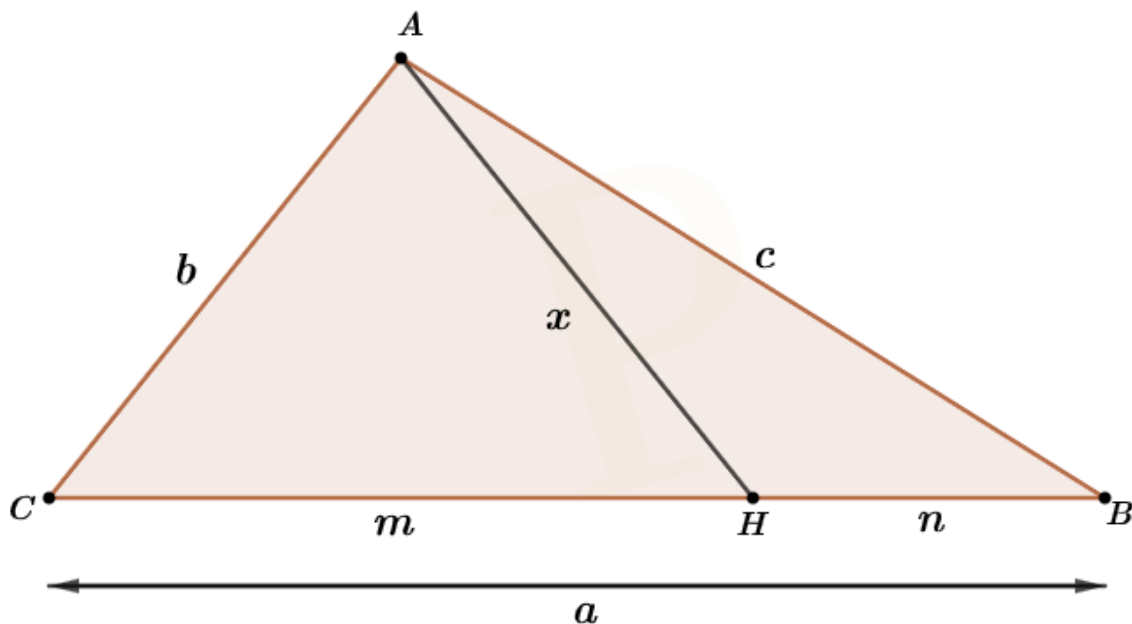
$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{p \cdot (p - b)}{ac}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{p \cdot (p - c)}{ab}}$$

(fórmulas de Briggs)

11.1 O TEOREMA DE STEWART

Seja ABC um triângulo qualquer. Uma ceviana de comprimento x é traçada sobre o lado BC dividindo-o na razão $\frac{m}{n}$.

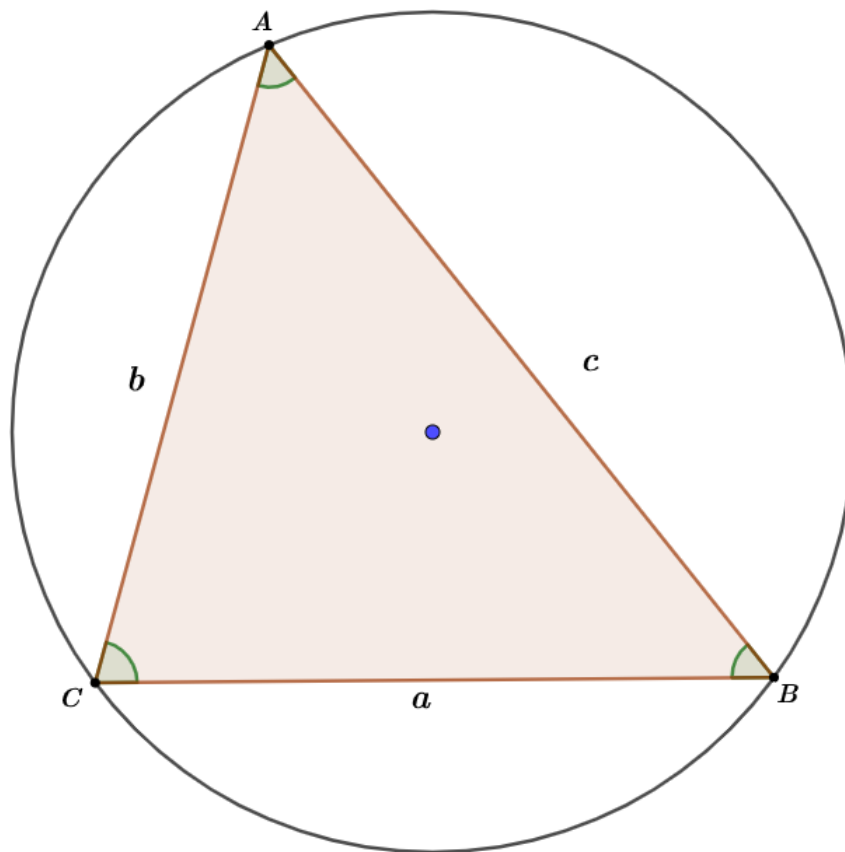


$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m = x^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$$

A demonstração do teorema de Stewart consiste na aplicação de duas leis do cosseno (Nos triângulo ACH e ABH). Deixo a cargo do leitor.

12. LEI DOS SENOS

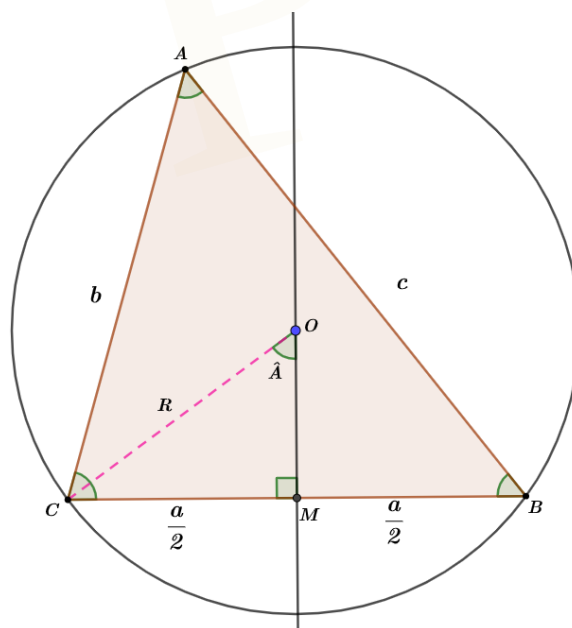
Seja ABC um triângulo qualquer inscrito numa circunferência de raio R.



Vale:

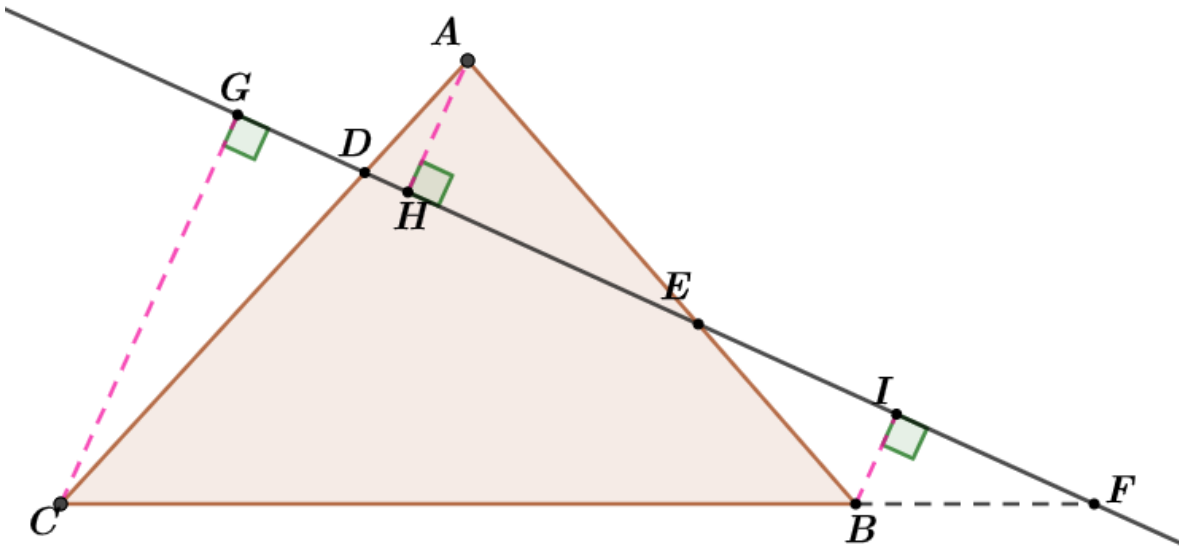
$$\frac{a}{\text{Sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{Sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{Sen}(\hat{C})} = \frac{2p}{\text{Sen}(\hat{A}) + \text{Sen}(\hat{B}) + \text{Sen}(\hat{C})} = 2R$$

(Demonstração)



Tracemos a mediatriz do segmento BC (Naturalmente coincidindo com o centro O da circunferência que circunscreve o triângulo ABC).

Note que $\hat{MOC} = \hat{BAC} = \hat{A}$. Isso ocorre pois o arco BC tem medida igual ao dobro do ângulo A.



Por semelhança de triângulos:

$$(GDC) \sim (ADG)$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CG}} \quad (i)$$

$$(CGF) \sim (BIF)$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BI}} \quad (ii)$$

$$(AHE) \sim (EIB)$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{AH}} \quad (iii)$$

Multiplicando as três equações acima, temos:

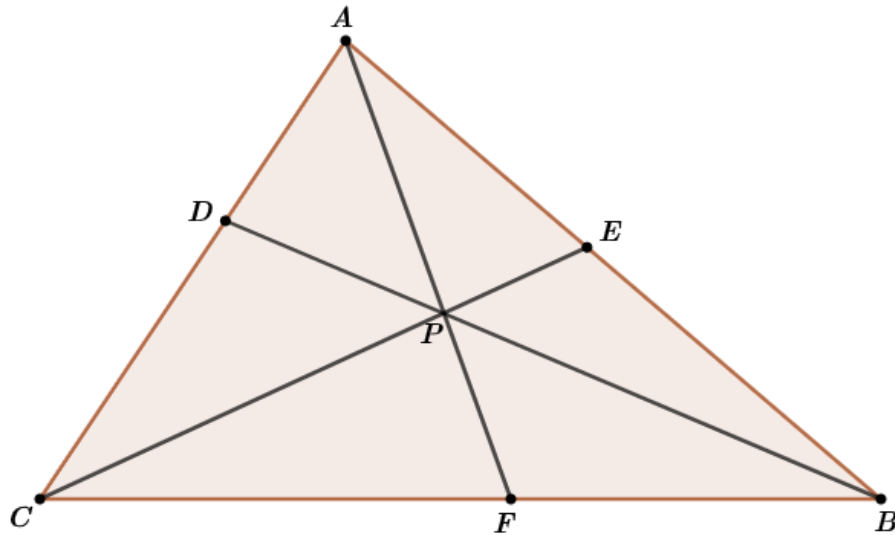
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = 1$$

■

14. TEOREMA DE CEVA

Num triângulo ABC, três cevianas AF, BD e CE concorrem se, e somente se:

$$\boxed{\overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CD} = \overline{DA} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{FC}}$$



(Demonstração)

Aplicando o teorema de menelaus no triângulo ACF:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} \cdot \overline{CB} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BF}}{\overline{AD}}$$

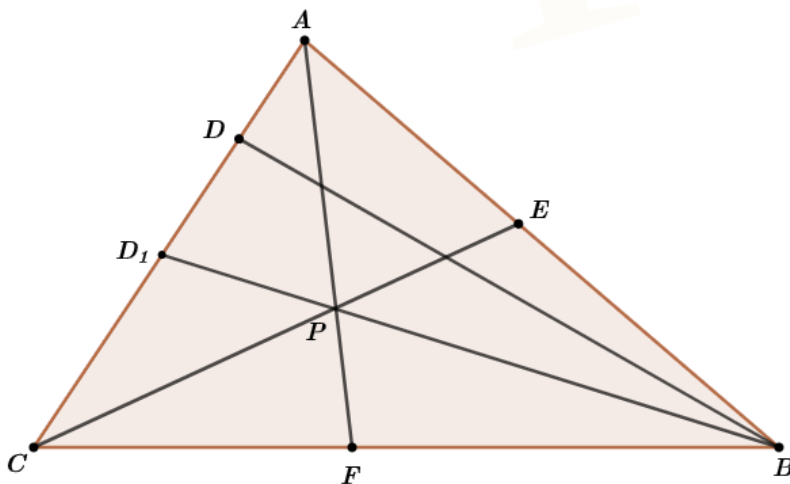
Agora, menelaus em ABF:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} \cdot \overline{BC} = \frac{\overline{EB} \cdot \overline{CF}}{\overline{AE}}$$

Daí,

$$\frac{\overline{EB} \cdot \overline{CF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{BF}}{\overline{AD}} \Rightarrow \boxed{\overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF}}$$

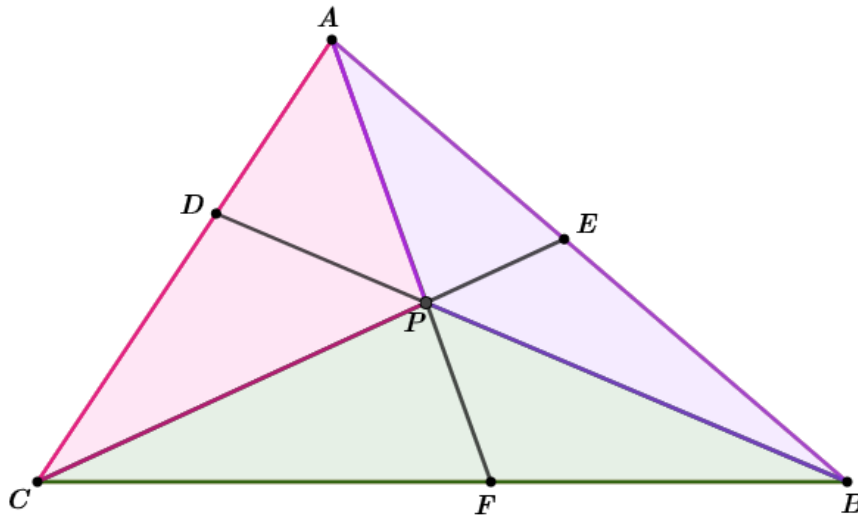
Note ainda que:



$$\overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF} \Rightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{D_1C} = \overline{AD_1} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1C}} \Leftrightarrow D \equiv D_1$$



Uma outra maneira de demonstrarmos a ida do teorema de ceva, é por áreas. Note:



$$[BCP] = S_a$$

$$[CAP] = S_b$$

$$[ABP] = S_c$$

Com efeito,

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} = \frac{S_b}{S_c};$$

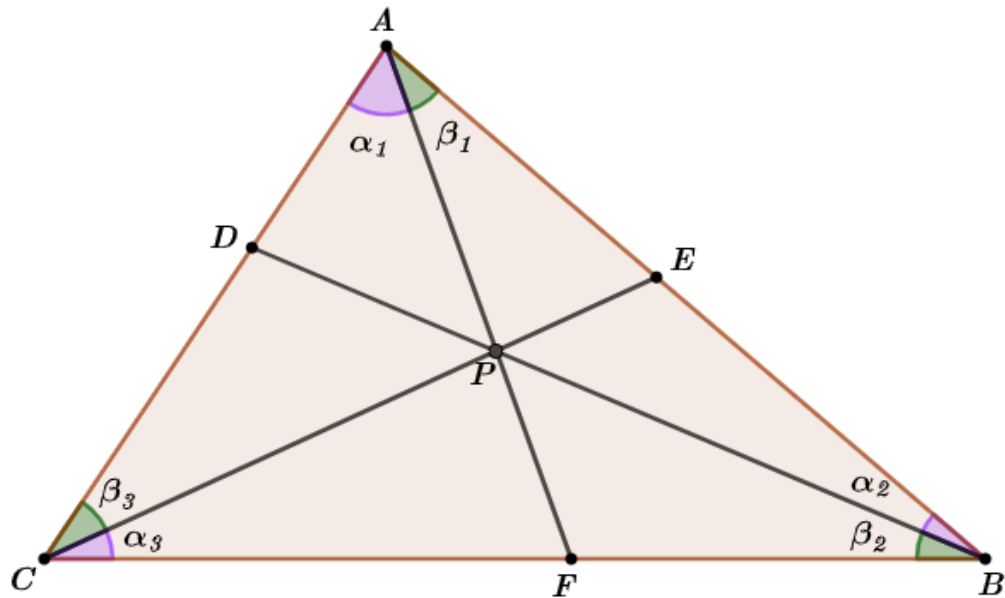
$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{S_c}{S_a};$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} = \frac{S_a}{S_c}$$

Multiplicando-se as equações acima, temos:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{AE}} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CF}$$

14.1 CEVA TRIGONOMÉTRICO



$$\boxed{\text{Sen}(\alpha_1) \cdot \text{Sen}(\alpha_2) \cdot \text{Sen}(\alpha_3) = \text{Sen}(\beta_1) \cdot \text{Sen}(\beta_2) \cdot \text{Sen}(\beta_3)}$$

(Demonstração)

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{PC}}{\text{Sen}(\alpha_1)} = \frac{\overline{PA}}{\text{Sen}(\beta_3)} \Leftrightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\text{Sen}(\alpha_1)}{\text{Sen}(\beta_3)}$$

Analogamente,

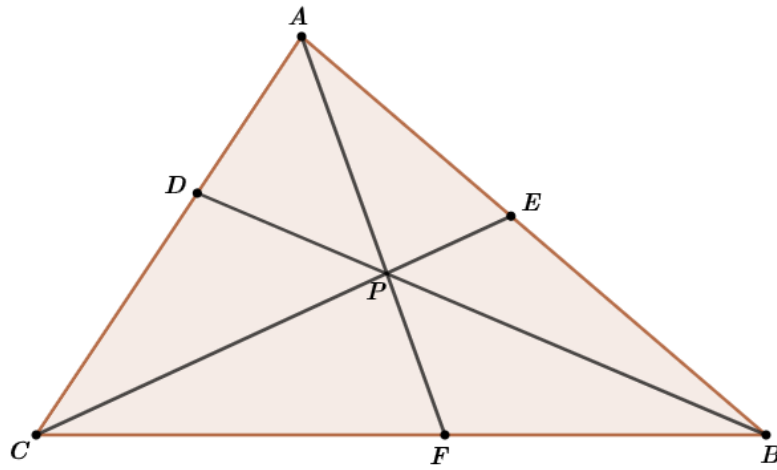
$$\frac{\overline{PA}}{\text{Sen}(\alpha_2)} = \frac{\overline{PB}}{\text{Sen}(\beta_1)} \Leftrightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\text{Sen}(\alpha_2)}{\text{Sen}(\beta_1)}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\text{Sen}(\alpha_3)} = \frac{\overline{PC}}{\text{Sen}(\beta_2)} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\text{Sen}(\alpha_3)}{\text{Sen}(\beta_2)}$$

Agora basta multiplicarmos as equações anteriores membro a membro.

$$\frac{\text{Sen}(\alpha_1)}{\text{Sen}(\beta_3)} \cdot \frac{\text{Sen}(\alpha_2)}{\text{Sen}(\beta_1)} \cdot \frac{\text{Sen}(\alpha_3)}{\text{Sen}(\beta_2)} = 1$$

14.2 TEOREMA DE VAN-AUBEL



$$\boxed{\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}}$$

(Demonstração)

Aplicando o teorema de menelaus em ACF, tem-se:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{FP}}{\overline{DC} \cdot \overline{PA}} \quad (i)$$

Agora, menelaus em AFB:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{PF}}{\overline{EB} \cdot \overline{PA}} \quad (ii)$$

Façamos agora (i) + (ii):

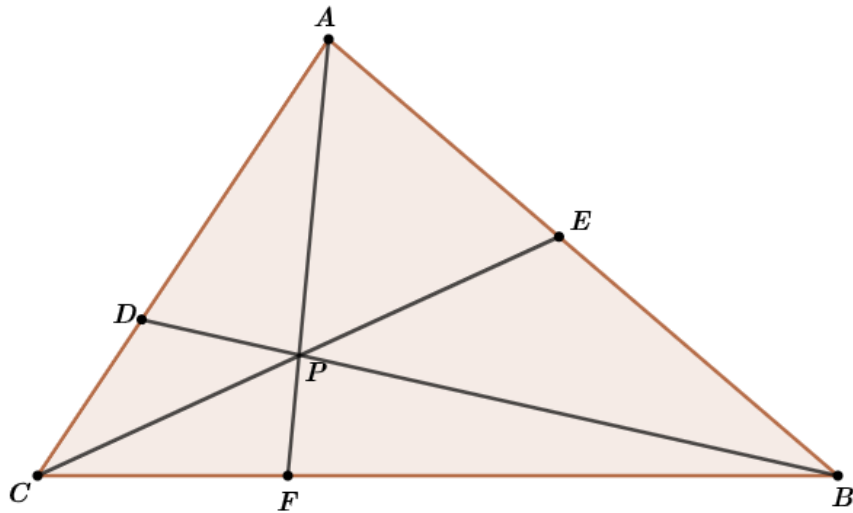
$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{FP}}{\overline{DC} \cdot \overline{PA}} + \frac{\overline{AE} \cdot \overline{PF}}{\overline{EB} \cdot \overline{PA}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \right),$$

Logo:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$$

■

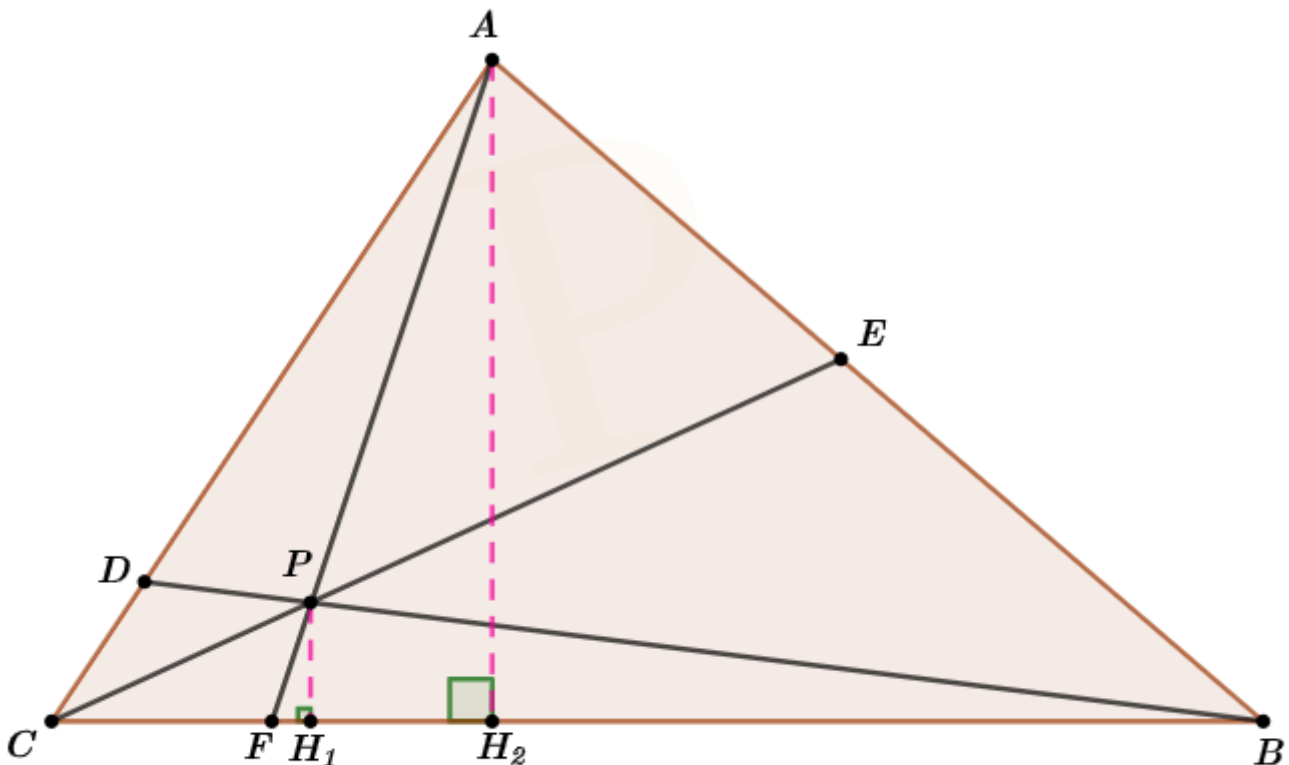
14.3 TEOREMA DE GERGONNE



$$\frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} + \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}} = 1$$

(Demonstração)

Tomemos H_1 e H_2 como os pés das alturas traçadas a partir de P e A sobre o lado BC, respectivamente.



Com efeito,

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{PH_1}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AH_2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{PH_1}}{\overline{AH_2}}$$

Note que os triângulos PBC e ABC possuem a mesma base BC e, portanto, a razão entre as suas áreas será igual a razão entre suas alturas. Dessa forma,

$$\frac{[PCF] + [PBF]}{[ABC]} = \frac{\overline{PH_1}}{\overline{AH_2}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}}$$

$$\frac{[PCF] + [PBF]}{[ABC]} = \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}}$$

Analogamente,

$$\frac{[APD] + [PCD]}{[ABC]} = \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{[APE] + [BPE]}{[ABC]} = \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}}$$

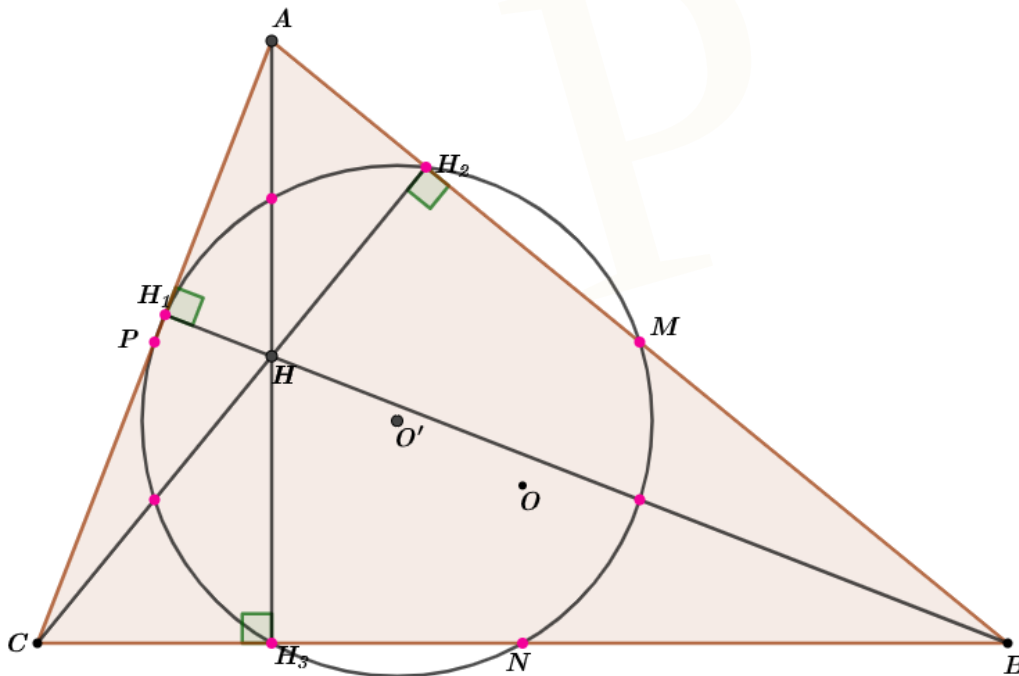
Agora basta somarmos as equações acima membro a membro

$$\frac{[PCF] + [PBF]}{[ABC]} + \frac{[APD] + [PCD]}{[ABC]} + \frac{[APE] + [BPE]}{[ABC]} = 1 = \frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} + \frac{\overline{PD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{CE}}$$

■

15. O CÍRCULO DE 9 PONTOS

Seja ABC um triângulo qualquer. Tomemos o seu ponto órtico (H) e os pontos médios M, N e P dos lados AB, BC e AC respectivamente. O círculo que contém os pés das alturas, os pontos médios dos lados do triângulo e os pontos médios das distâncias do ortocentro aos vértices de ABC é chamado **círculo de 9 pontos**.

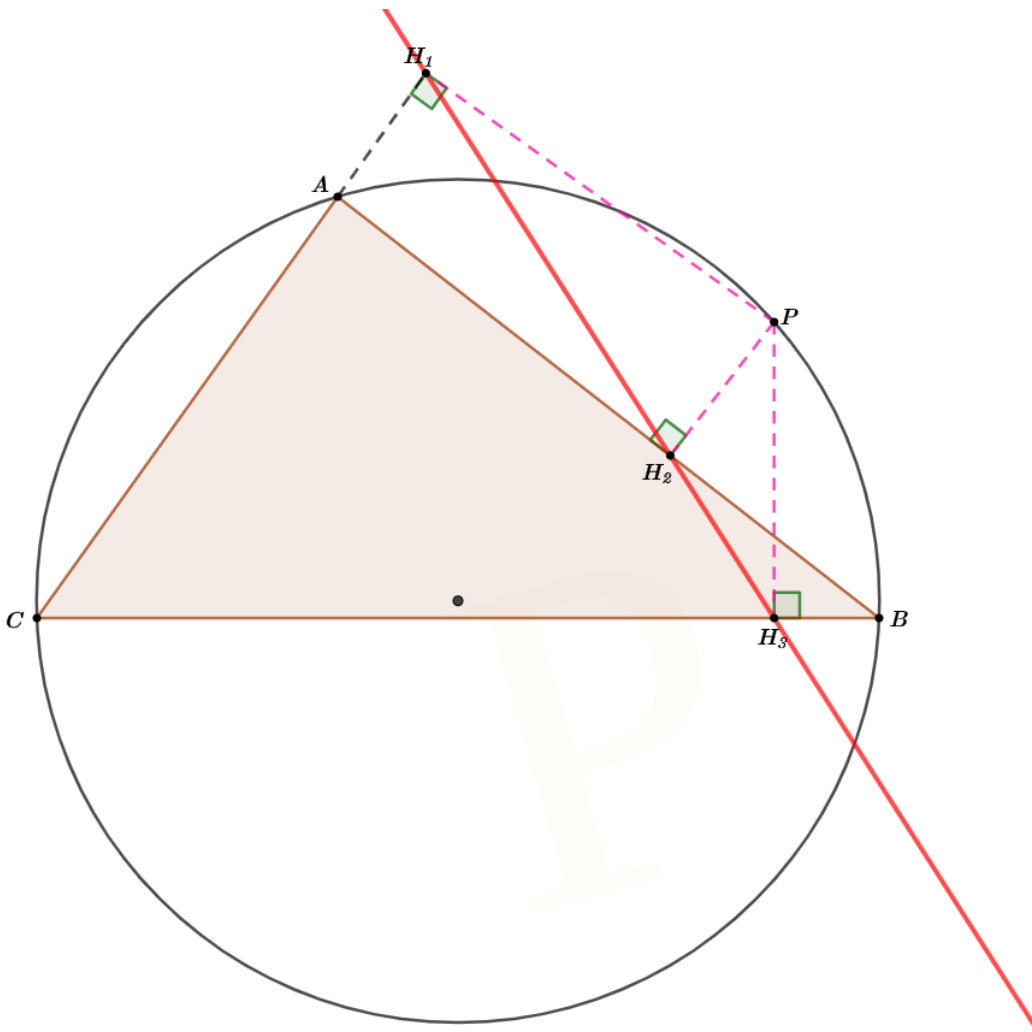


OBS:

- 1- O centro O' é ponto médio de H e O , sendo O o circuncentro do triângulo ABC .
- 2- O círculo de 9 pontos possui raio $\frac{R}{2}$.
- 3- Os triângulos ABC , BCH , BAH e ACH possuem o mesmo círculo de 9 pontos.

16. RETA DE SIMPSOM-WALACE

Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto do círculo circunscrito a um triângulo aos lados desse triângulo, são colineares.



Note que os quadriláteros PH_2AH_1 e PH_2H_3B são inscritíveis, o que implica em:

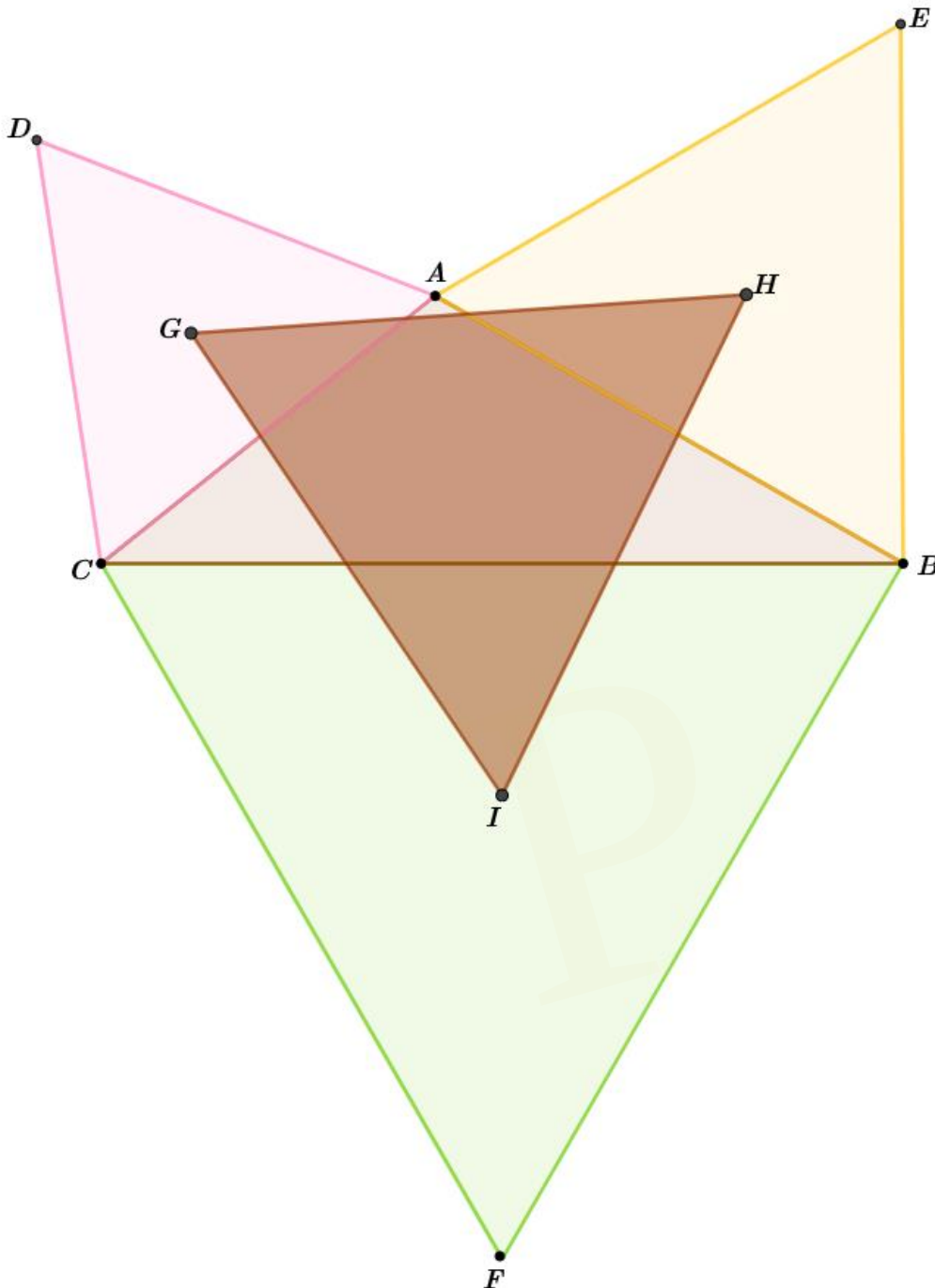
$$H_1\hat{P}A = H_1\hat{H}_2A \text{ e } B\hat{P}H_2 = B\hat{H}_2H_3$$

E ainda os quadriláteros CH_1PH_3 e $CAPB$ também são inscritíveis.

17. O TEOREMA DE NAPOLEÃO

Tome um triângulo ABC qualquer e os triângulos equiláteros ABE, CBF e ACD construídos a partir de seus lados.

Os baricentros H, I e G dos triângulos equiláteros ABE, CBF e ACD, respectivamente, constituem um triângulo equilátero GHI.

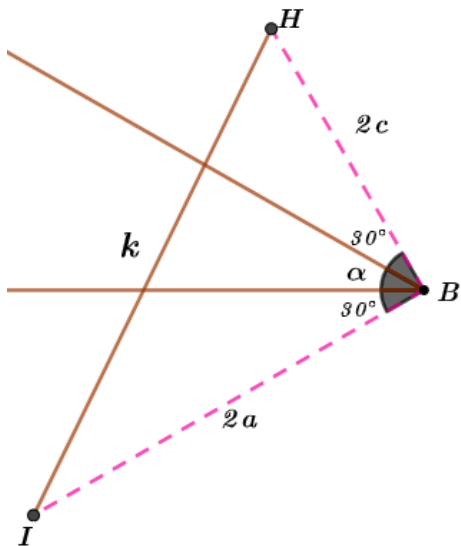


(Demonstração)

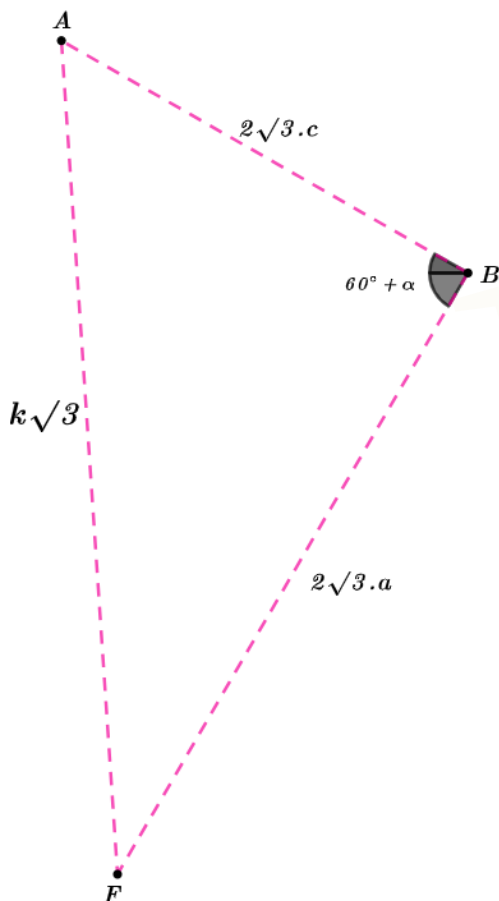
Existe uma abordagem vetorial para essa demonstração, mas neste material focaremos numa demonstração através da geometria plana.

Em primeiro lugar, note que $\overline{AF} = \overline{BD} = \overline{CE}$.

No triângulo BHI, temos:



E no triângulo BAF:



É fácil ver que os triângulos acima são semelhantes (*caso LAL*). A razão de semelhança entre os triângulos é $\sqrt{3}$. Portanto, $\overline{AF} = k \cdot \sqrt{3} = \overline{BD} = \overline{CE}$.

Analogamente, $\overline{HG} = \overline{GI} = k$

■

18. AS RELAÇÕES DE EULER

- Os cinco raios

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

- Distância do incentro ao circuncentro:

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

- Distância do circuncentro a um ex-incentro:

$$\overline{OE_a} = \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_a}$$

$$\overline{OE_b} = \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_b}$$

$$\overline{OE_c} = \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_c}$$

- Distância do incentro a um ex-incentro:

$$\overline{IE_a} = 2\sqrt{R(r_a - r)}$$

$$\overline{IE_b} = 2\sqrt{R(r_b - r)}$$

$$\overline{IE_c} = 2\sqrt{R(r_c - r)}$$

- Distância entre dois ex-incentros:

$$\overline{E_a E_b} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot (r_a + r_b)}$$

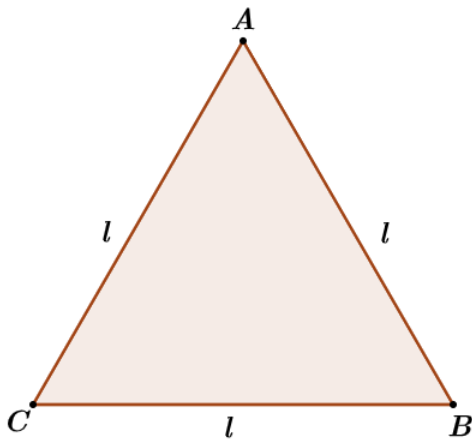
$$\overline{E_a E_c} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot (r_a + r_c)}$$

$$\overline{E_b E_c} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot (r_b + r_c)}$$

19. RELAÇÕES DE ÁREAS

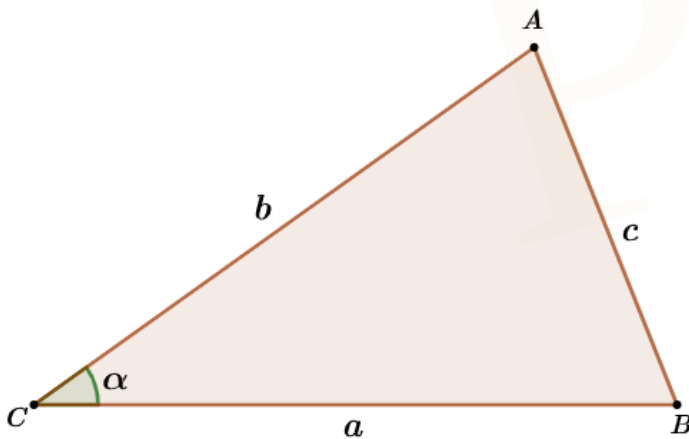
Tome nota: As áreas a seguir serão representadas por S.

19.1 TRIÂNGULO EQUILÁTERO



$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

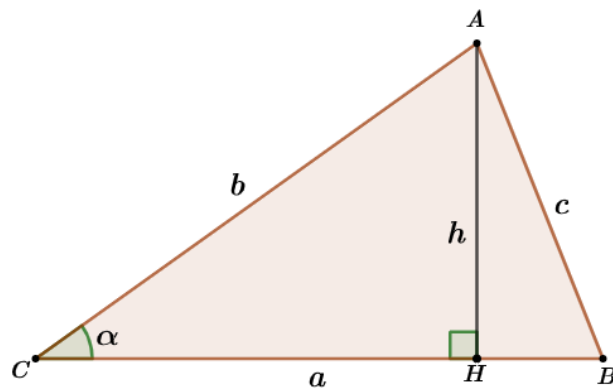
19.2 ÁREA EM FUNÇÃO DO SENO DE UM ÂNGULO



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

(Demonstração)

Partindo de A, trace a altura (h) relativa ao lado $\overline{BC} = a$.



De fato,

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad (i)$$

Além disso,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \therefore \boxed{h = b \cdot \text{sen}(\alpha)} \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i):

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

■

19.3 ÁREA EM FUNÇÃO DOS RAIOS DAS CIRCUNFERÊNCIAS INSCRITA E CIRCUNSCRITA

Vale reforçar as seguintes representações:

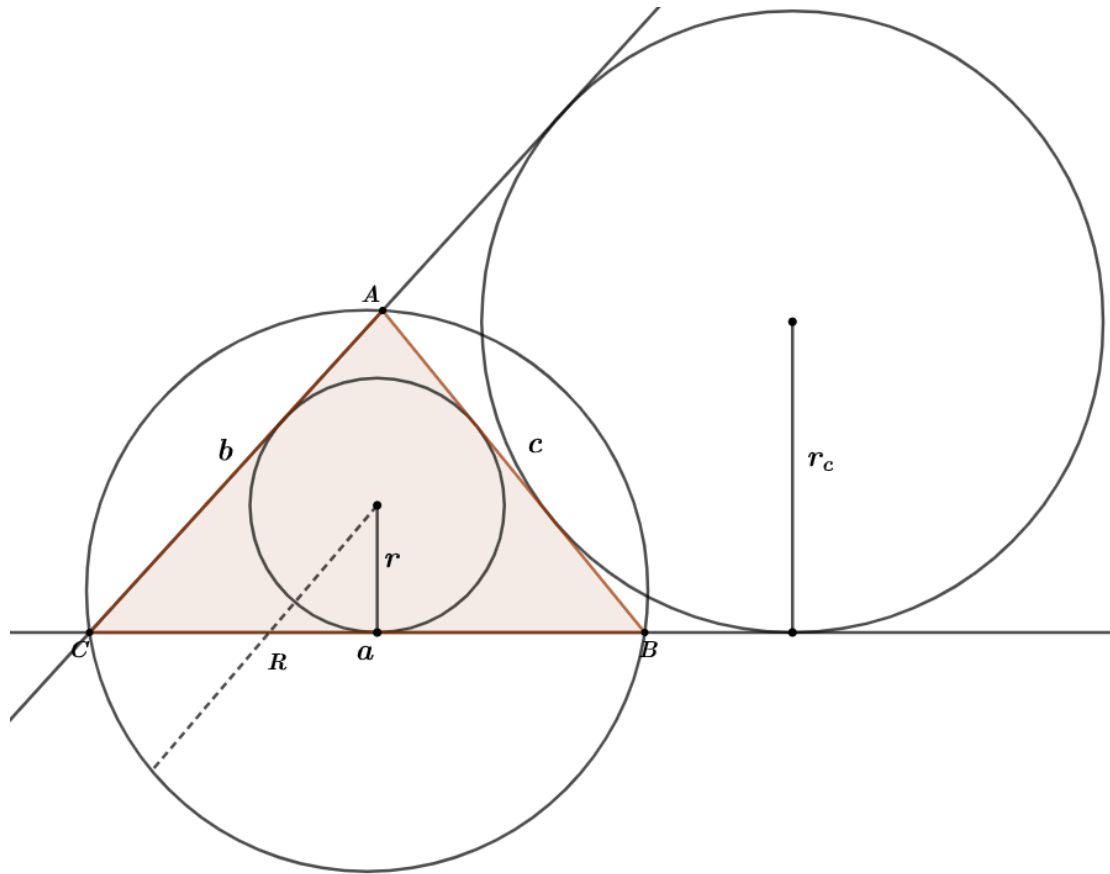
r : raio da circunferência inscrita;

R : raio da circunferência circunscrita;

r_a : raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado a ;

r_b : raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado b ;

r_c : raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado c ;



$$S = r \cdot p \quad (i)$$

$$S = r_a \cdot (p - a) \quad (ii)$$

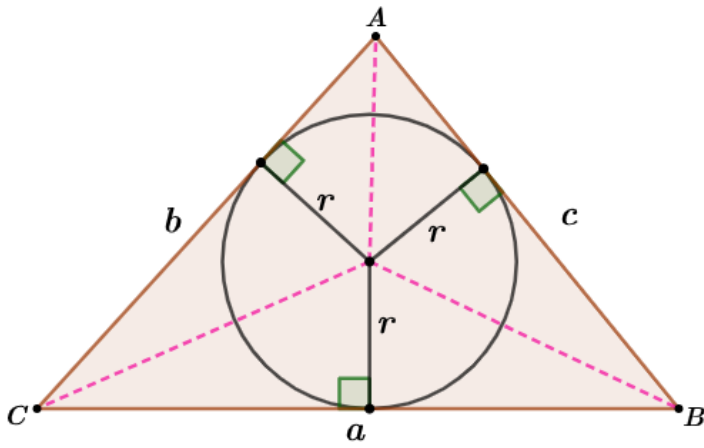
$$S = r_b \cdot (p - b) \quad (iii)$$

$$S = r_c \cdot (p - c) \quad (iv)$$

$$S = \frac{abc}{4R} \quad (v)$$

(Demonstrações)

- (i) Conectando o centro da circunferência inscrita aos vértices do triângulo ABC, temos:

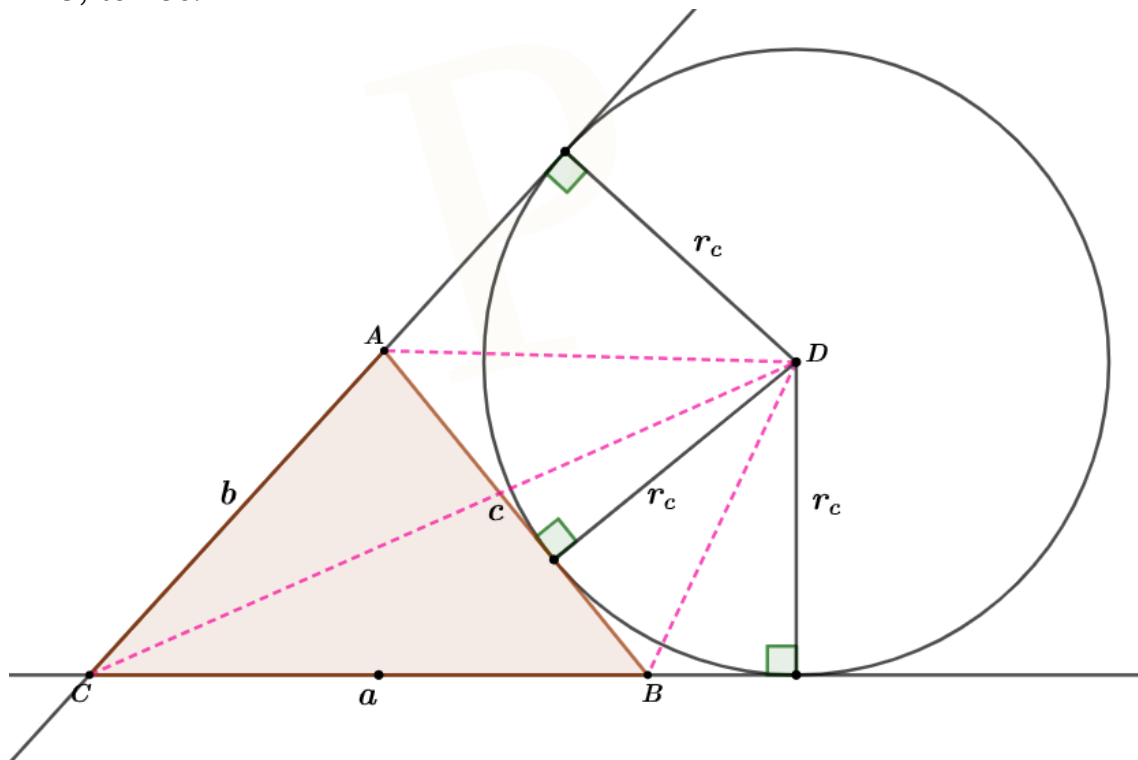


Note que a área do triângulo ABC pode ser obtida através da soma das áreas dos três triângulos formados de altura r .

$$S = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a + b + c}{2} = r \cdot p$$

■

- (ii) Conectando o centro D da circunferência ex-inscrita aos vértices do triângulo ABC, temos:



Note que a área S de ABC pode ser obtida da seguinte maneira:

$$S = [CBD] + [ACD] - [ABD]$$

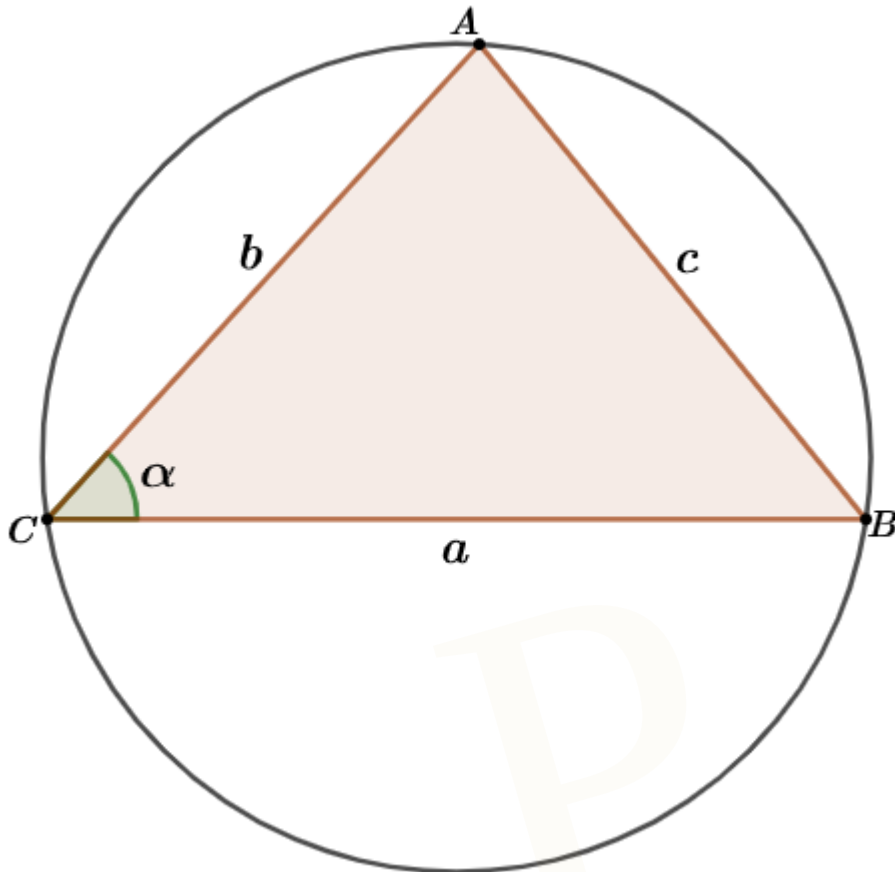
Logo,

$$S = \frac{a \cdot r_c}{2} + \frac{b \cdot r_c}{2} - \frac{c \cdot r_c}{2} = r_c \cdot \frac{a + b - c}{2} = r_c \cdot (p - c).$$

■

As demonstrações dos itens (ii), (iii) e (iv) são inteiramente análogas.

(v) De **19.2** temos:



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

Pela lei dos senos:

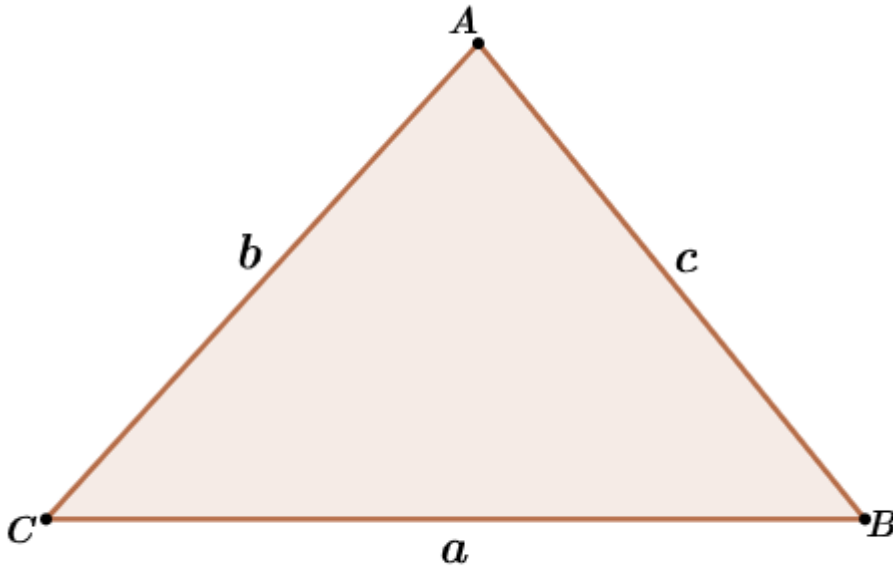
$$\frac{c}{\text{sen}(\alpha)} = 2R \quad \therefore \text{sen}(\alpha) = \frac{c}{2R}$$

Daí,

$$S = \frac{abc}{4R}$$

■

19.4 RADICAL DE HERON

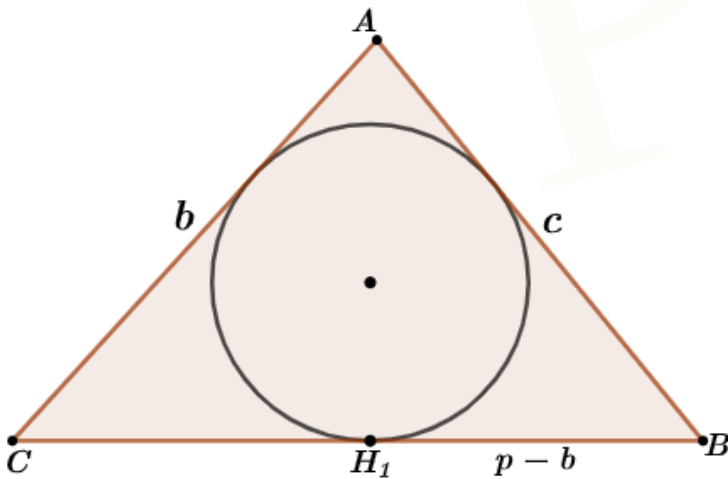


$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

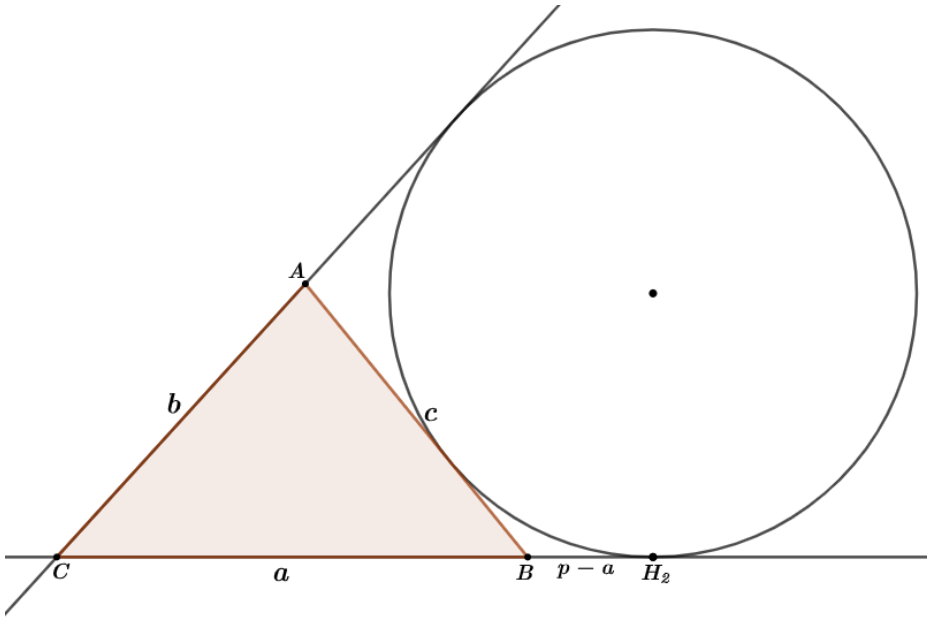
(Demonstração)

Na demonstração a seguir utilizaremos dois fatos importantes

Fato 1: $\overline{H_1B} = p - b$

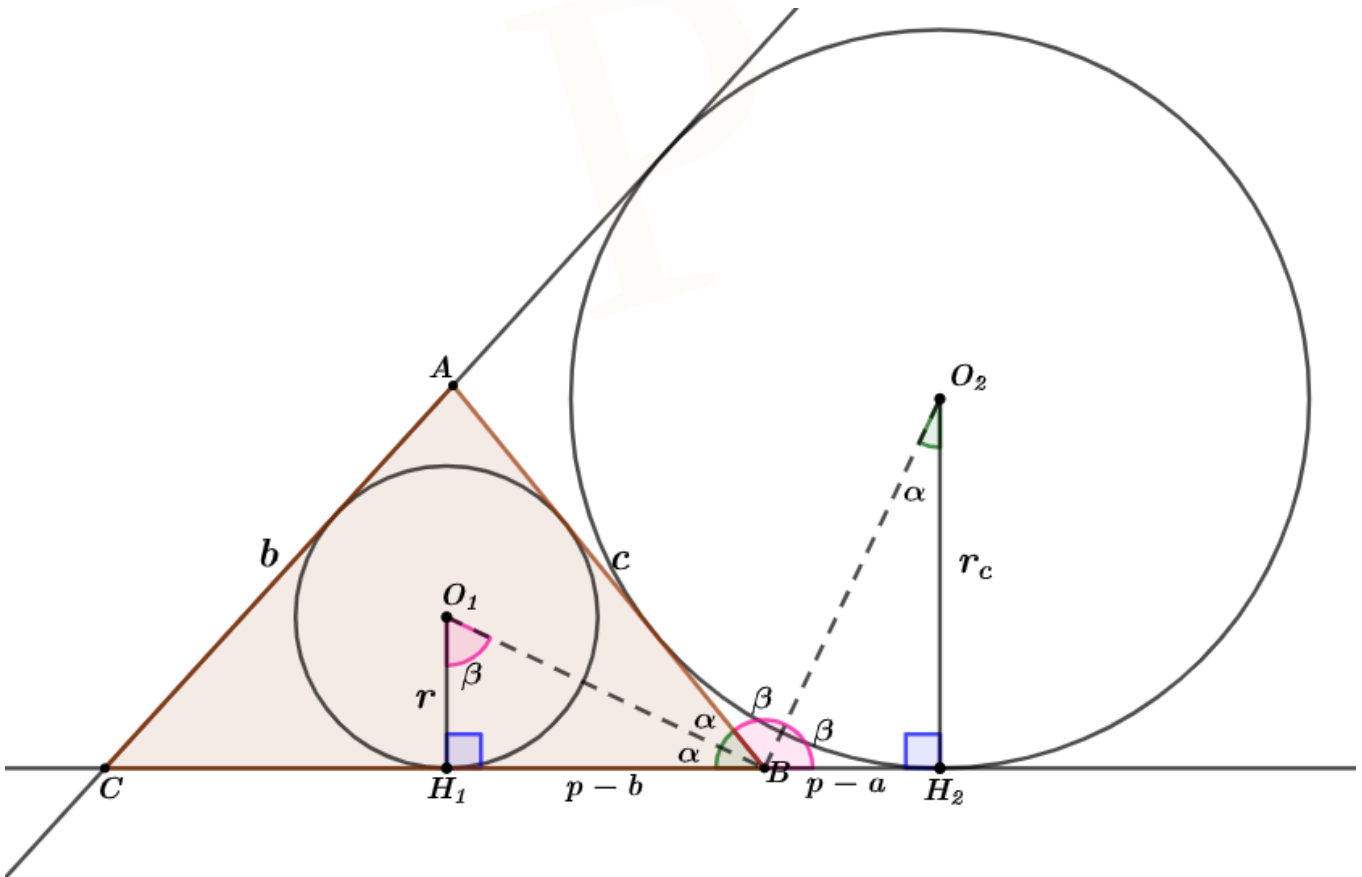


Fato 2: $\overline{BH_2} = p - a$



Ambos os fatos podem ser demonstrados via relações métricas na circunferência.

Dessa forma, podemos concluir que os triângulos O_1H_1B e O_2H_2B são semelhantes. Veja:



Com efeito,

$$\frac{r}{p-a} = \frac{p-b}{r_c} \therefore r \cdot r_c = (p-a) \cdot (p-b)$$

Pelos itens (i) e (iv) do tópico **19.3** segue:

$$\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-c} = (p-a) \cdot (p-b) \therefore \boxed{S^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

■

Tome nota:

Multiplicando-se as relações obtidas nos itens (i), (ii), (iii) e (iv) do tópico 19.3, temos:

$$\begin{cases} S = r \cdot p \\ S = r_a \cdot (p-a) \\ S = r_b \cdot (p-b) \\ S = r_c \cdot (p-c) \end{cases}$$

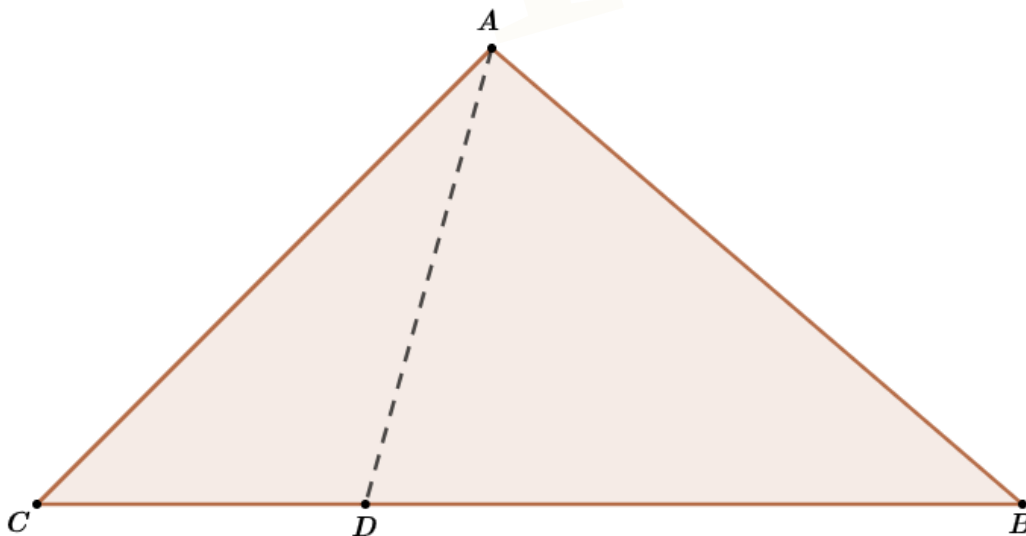
$$\therefore S^4 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot \underbrace{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}_{S^2}$$

Logo,

$$\boxed{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

19.5 IDEIA DO COLADO

Seja ABC um triângulo qualquer. Partindo de A traça-se uma ceviana que encontra o lado $\overline{BC}$ em D.



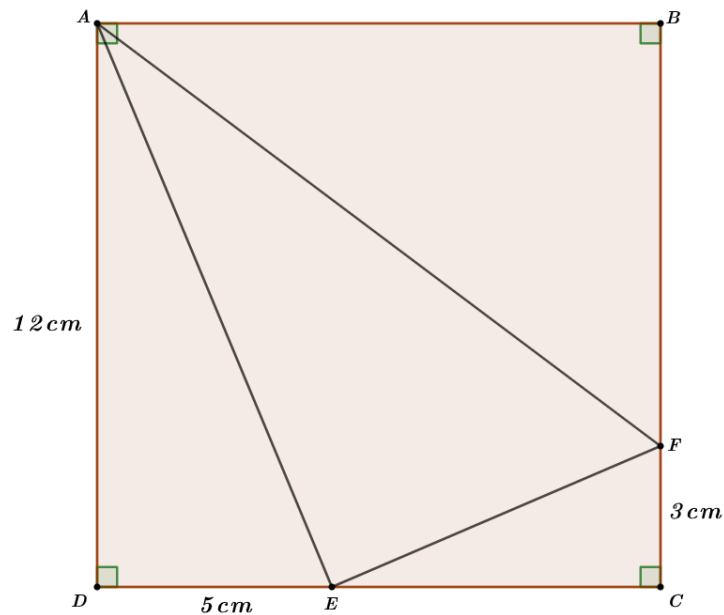
Note que os triângulo ADC e ABD possuem a mesma altura e, portanto, **a razão entre as áreas será igual a razão entre as bases.** Com efeito,

$$\frac{[ACD]}{[ABD]} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

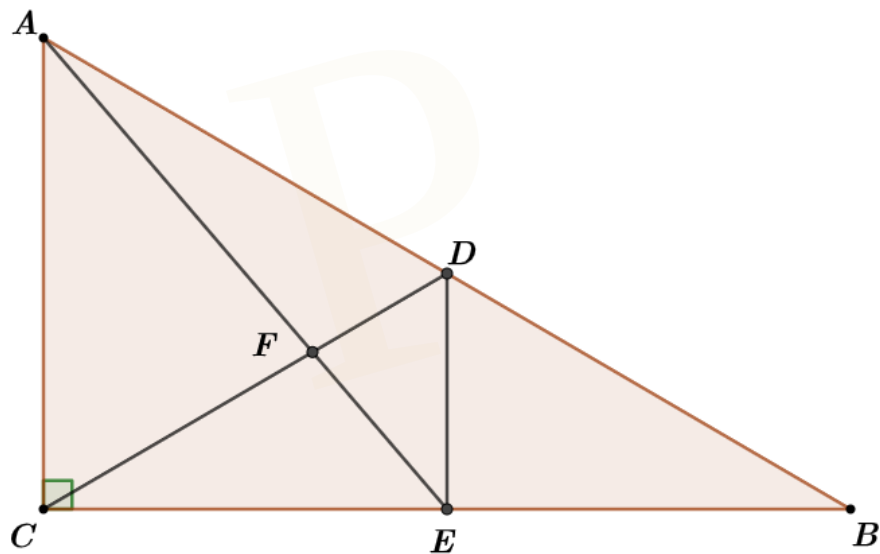
P

- PROBLEMAS -

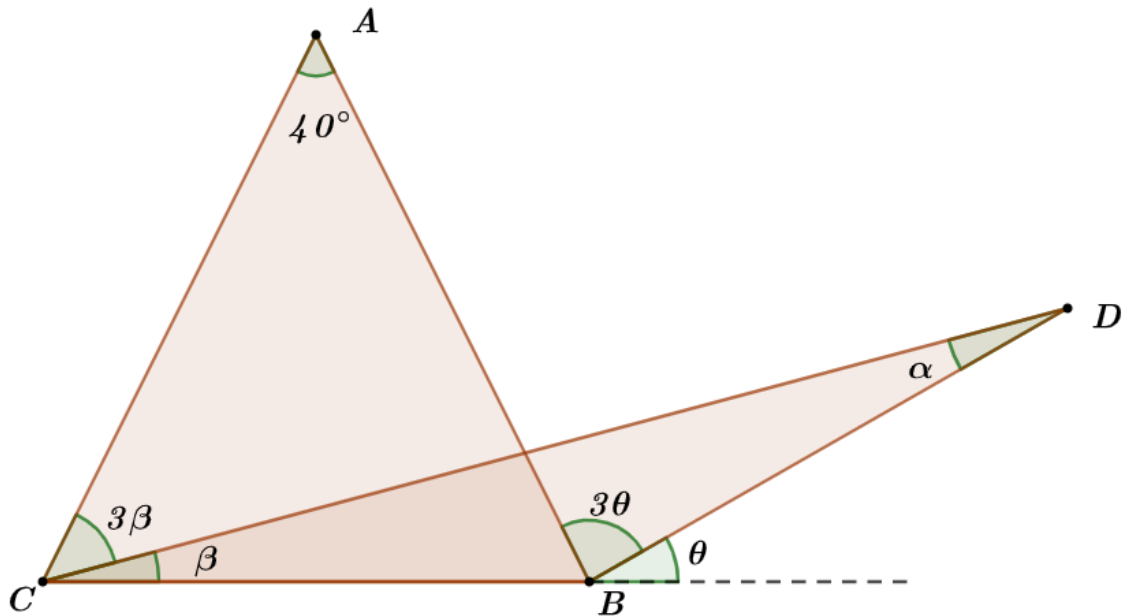
Problema 01. Considere o quadrado ABCD abaixo de lado 12 cm . Nele, constrói-se um triângulo AEF. Classifique este triângulo quanto a natureza de seus ângulos.



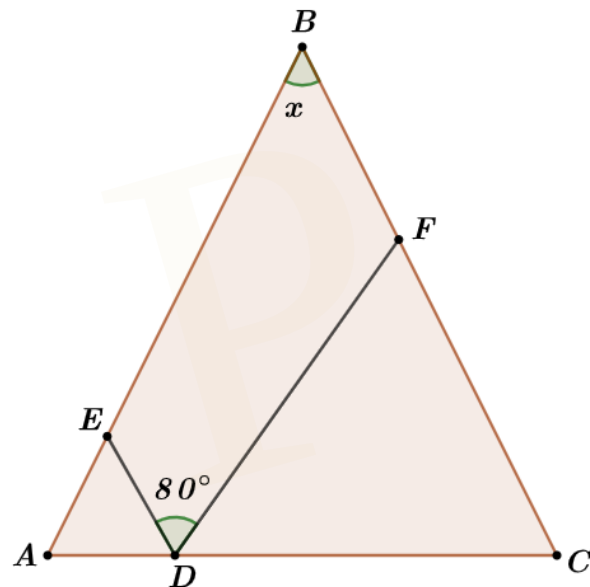
Problema 02. Na figura, o ponto E é ponto médio de BC, e o segmento DE é paralelo a AC. Sendo $AB = 28\text{ cm}$, calcule a medida do segmento FD.



Problema 03. Determine o valor de α , na figura abaixo.

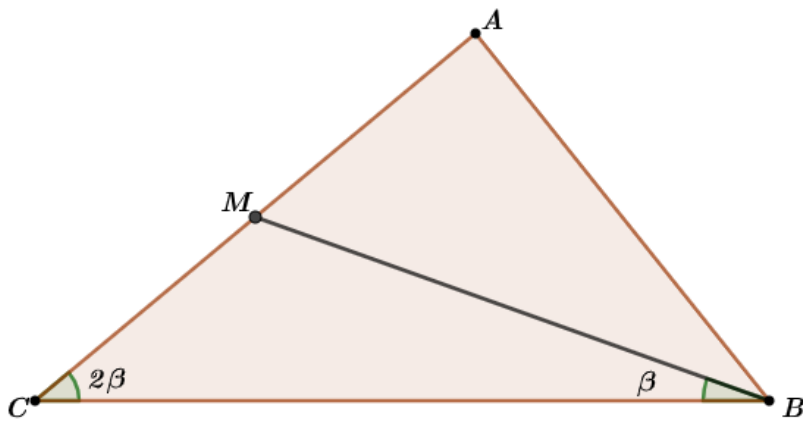


Problema 04. (FUVEST) Na figura abaixo, tem-se que $AD = AE$, $CD = CF$ e $BA = BC$. Se o ângulo EDF mede 80° , então o ângulo ABC mede:

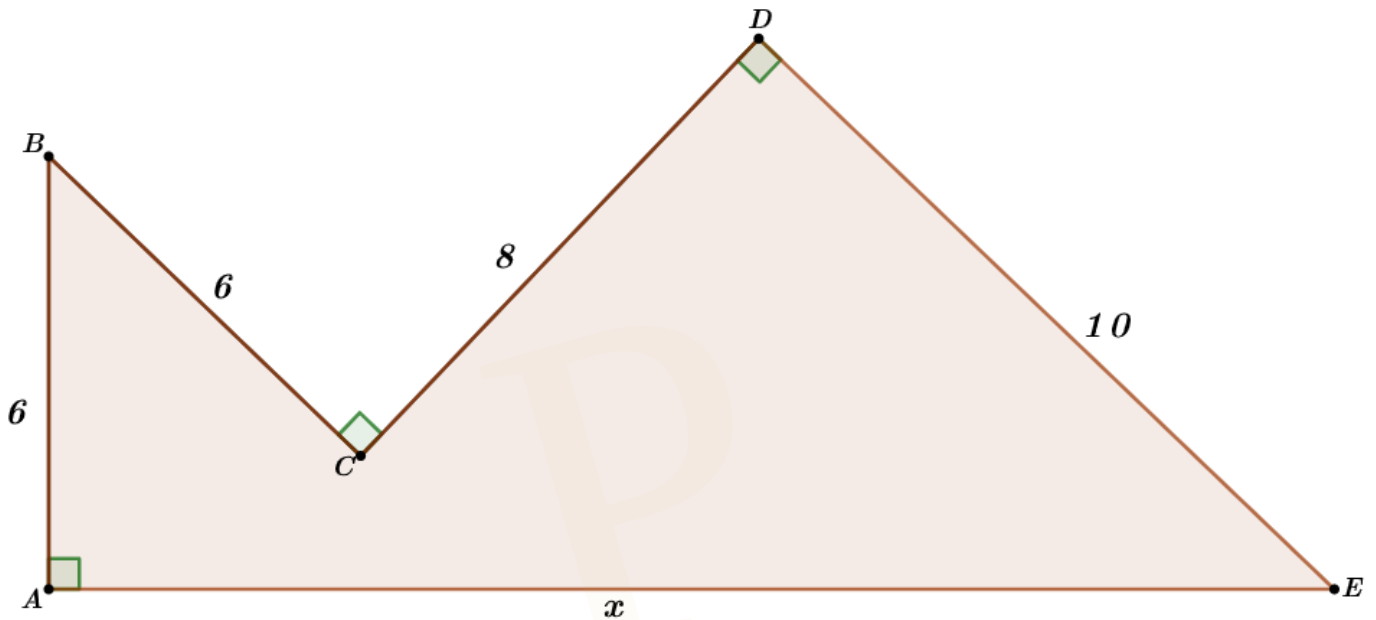


- a) 20°
- b) 30°
- c) 50°
- d) 60°
- e) 90°

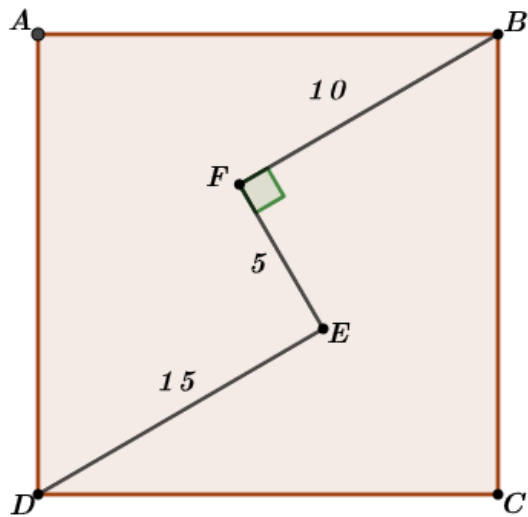
Problema 05. Considere o triângulo ABC abaixo. M é ponto médio de AC e o ângulo $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Determine o valor de β .



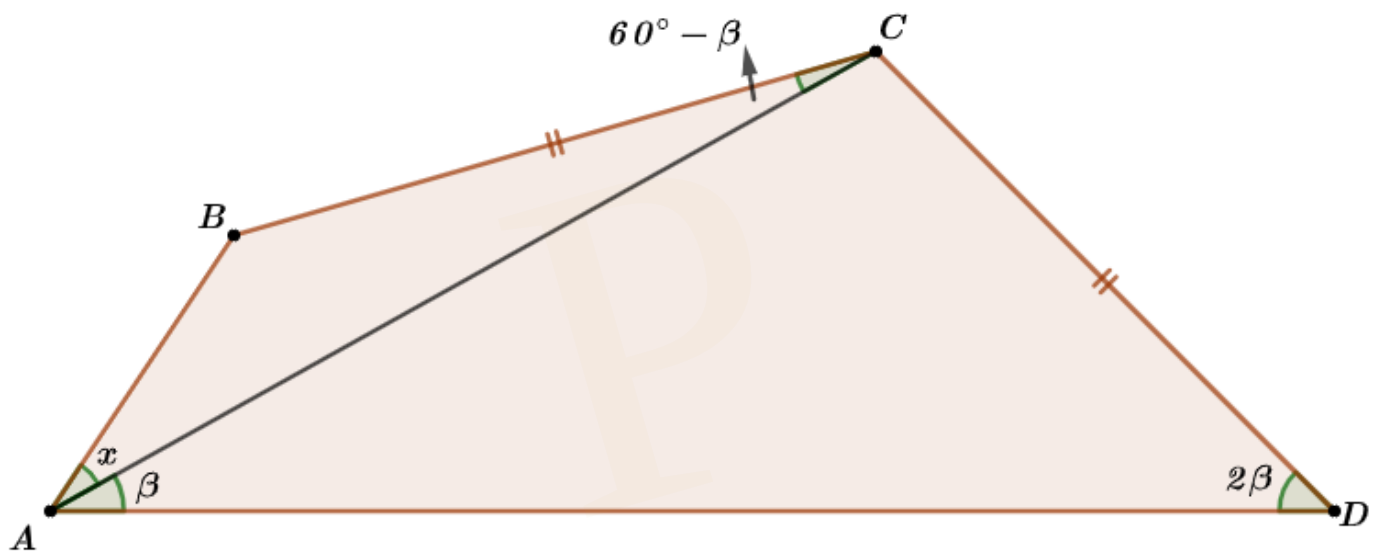
Problema 06. No pentágono cômico abaixo, temos $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$; $\overline{CD} = 8$, $\overline{DE} = 10$. Além disso, $\overline{AE} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ e $\overline{CD} \perp \overline{DE}$. Determine o valor do segmento $\overline{AE}$.



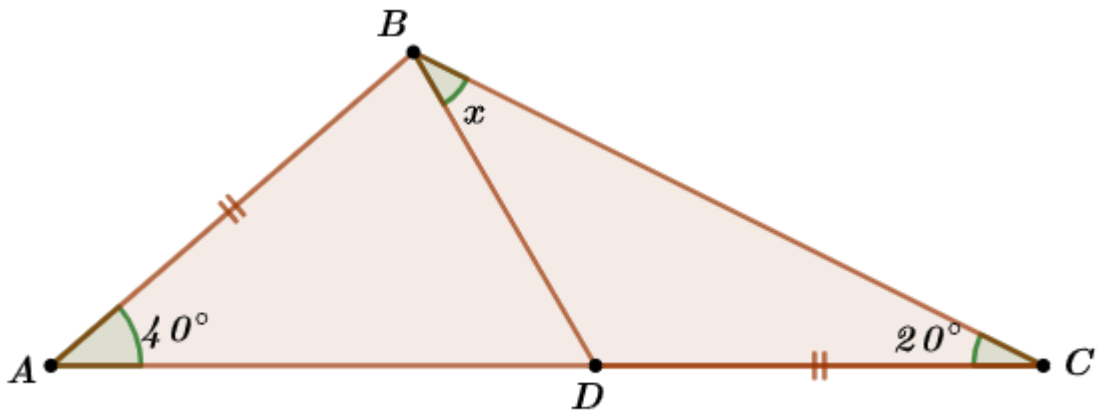
Problema 07. O quadrilátero abaixo trata-se de um quadrado. Munido das condições métricas do problema, calcule a área deste quadrado.



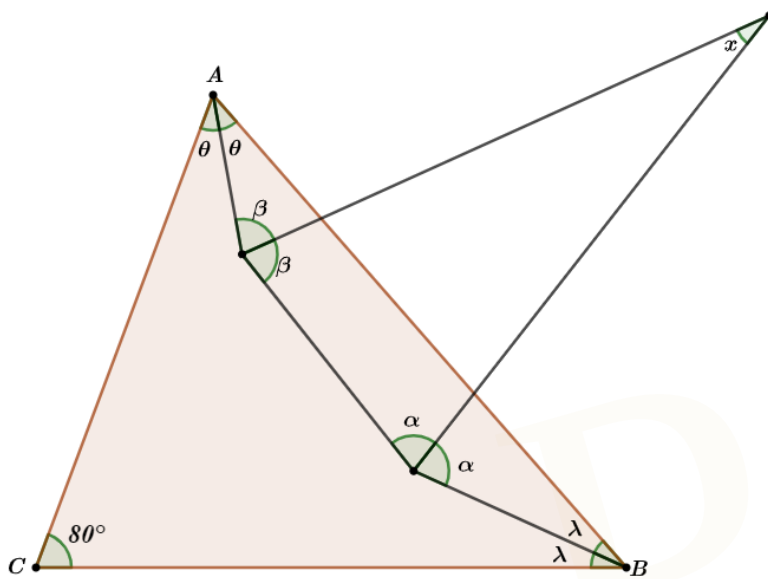
Problema 08. Na figura abaixo, quer-se o valor de x . Os segmentos BC e CD são congruentes.



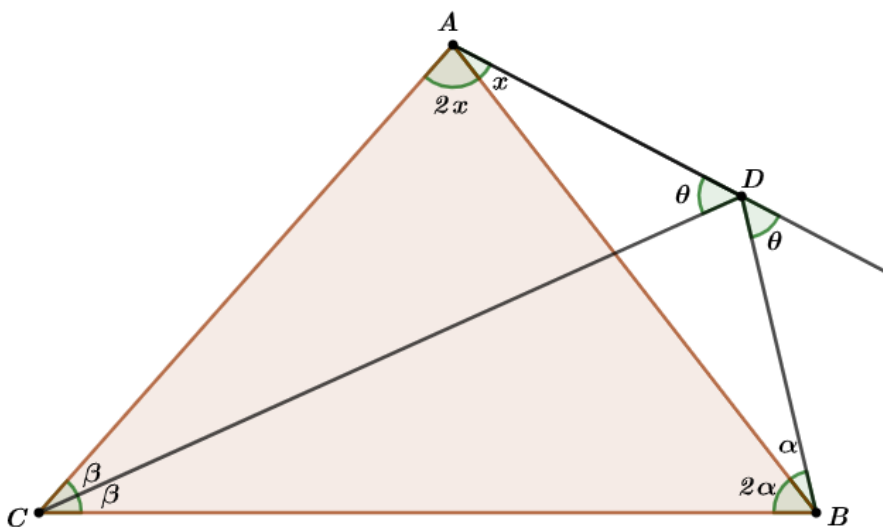
Problema 09. Na figura, quer-se o valor de x . Os segmentos AB e CD são congruentes.



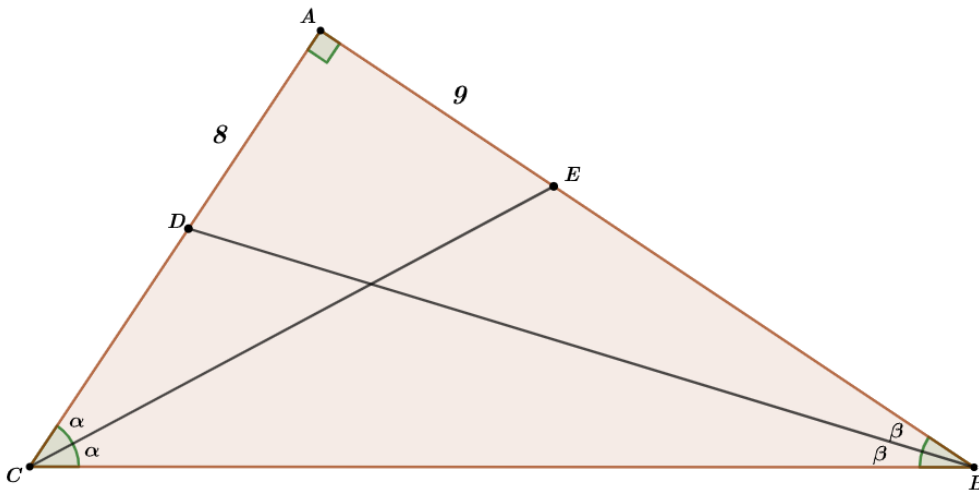
Problema 10. Considere a figura abaixo. Determine o valor de x .



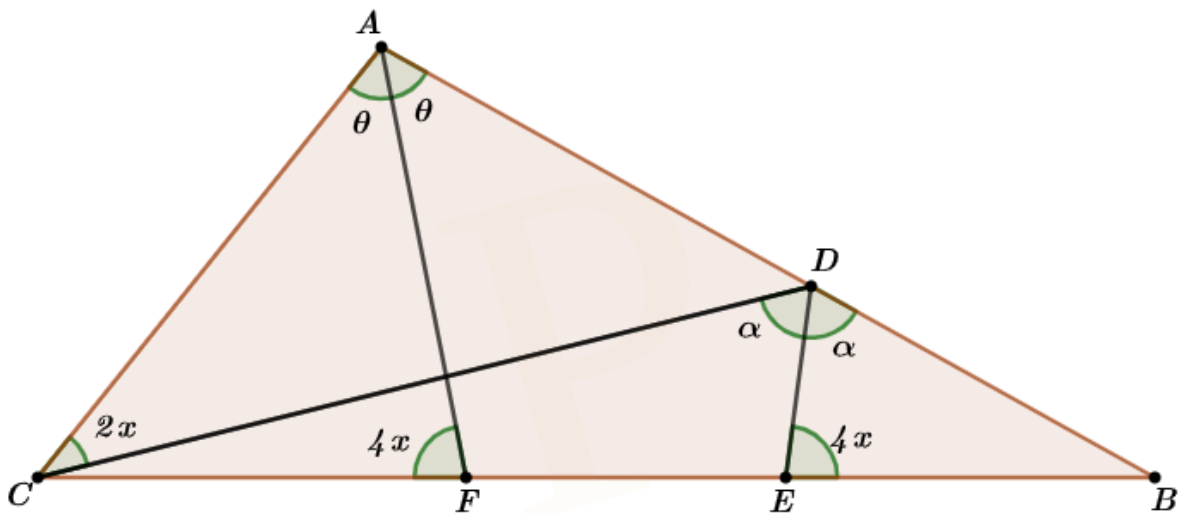
Problema 11. Quer-se x .



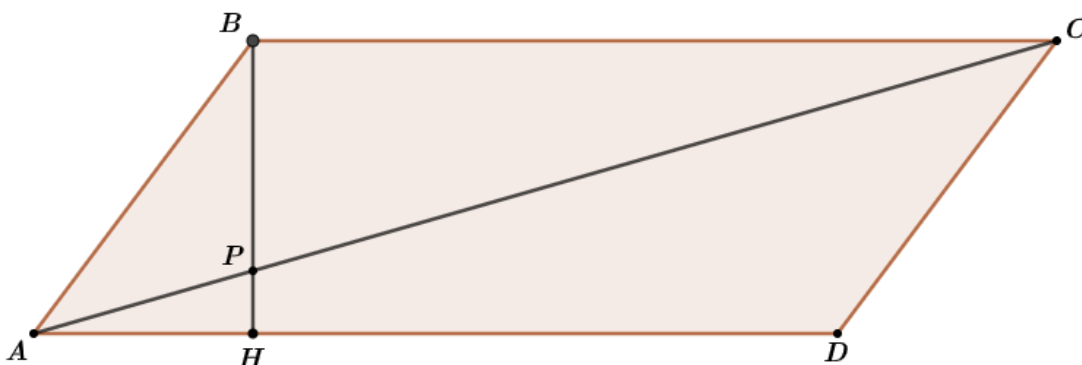
Problema 12. Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em A. CE e BD são bissetrizes dos ângulos C e B respectivamente. Tome $AD=8$ e $AE=9$. Calcule o perímetro do triângulo ABC.



Problema 13. Encontre o valor de x na figura abaixo.

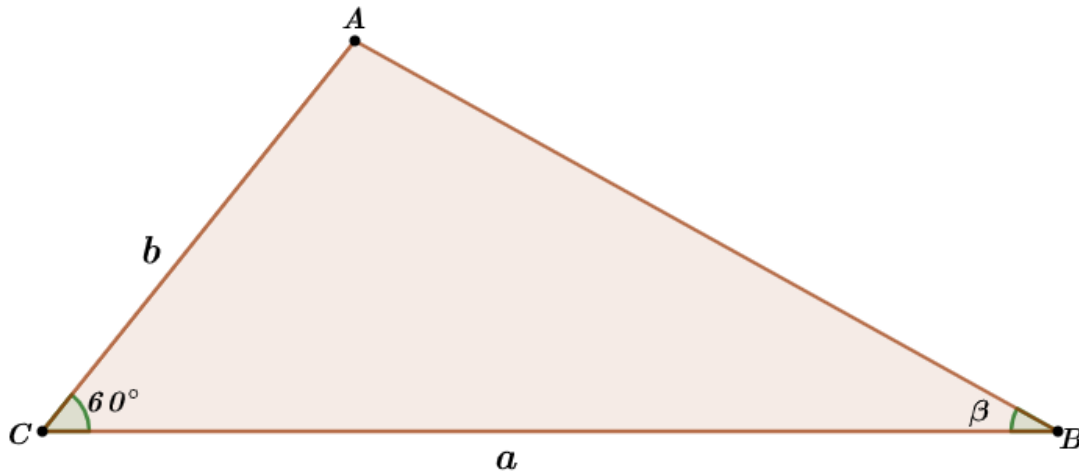


Problema 14. Num Paralelogramo ABCD: $B\hat{A}P = 2.P\hat{A}H$; $\overline{CD} = 6$; $\overline{BH} \perp \overline{AD}$. Determine a medida de $\overline{PQ}$.

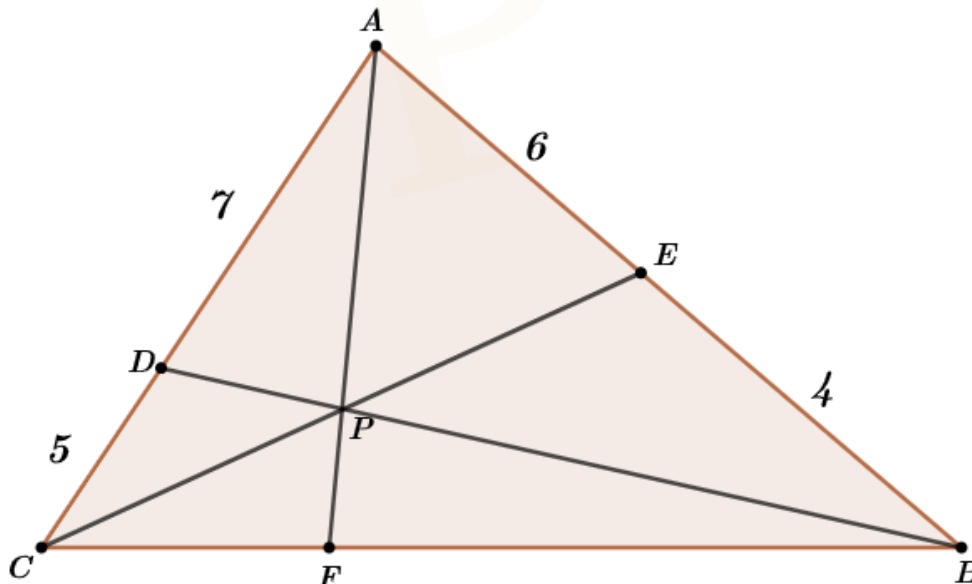


Problema 15. Prove que num triângulo ABC: $\text{Sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{bc}}$, onde p é o semiperímetro.

Problema 16. No triângulo ABC abaixo, temos : $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$. Determine o valor do ângulo β .



Problema 17. Na figura a seguir, $AF=11,7$ cm. Calcule as medidas de PF e a fração da área do triângulo ABC ocupada pelo triângulo CPF:



Problema 18. Considere duas retas r e s paralelas e os pontos A e B sobre s . Construa o ponto médio entre A e B utilizando apenas uma régua sem orientações de medidas.

r

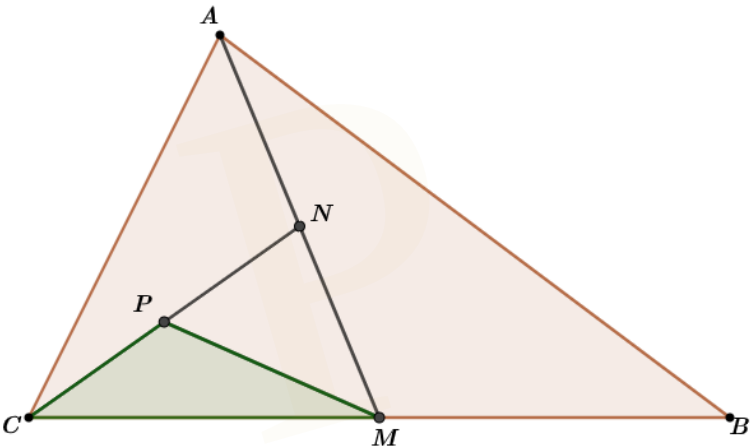
s

A

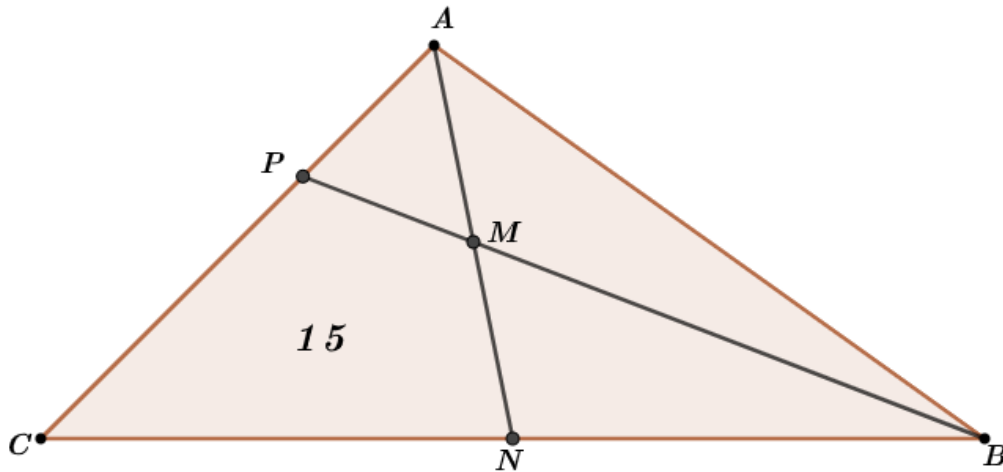
B

Problema 19. (MORGADO) Em um triângulo de lados 4, 6 e 8, calcule, se possível, o comprimento da tangente traçada pelo circuncentro ao círculo inscrito.

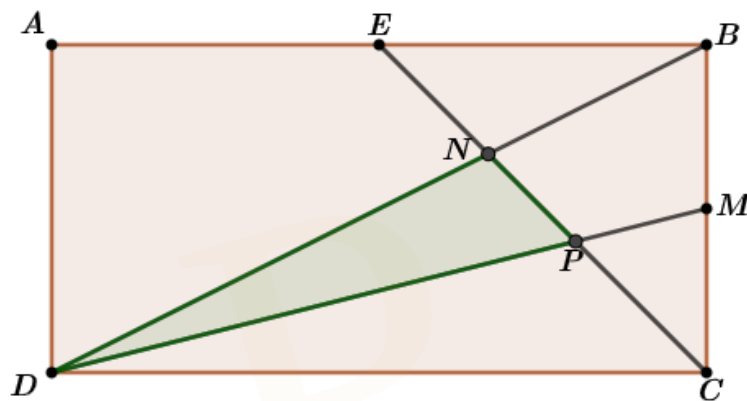
Problema 20. A área do triângulo ABC abaixo é 20. Os pontos M, N e P são médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ e $\overline{CN}$. Calcule a área do triângulo COM.



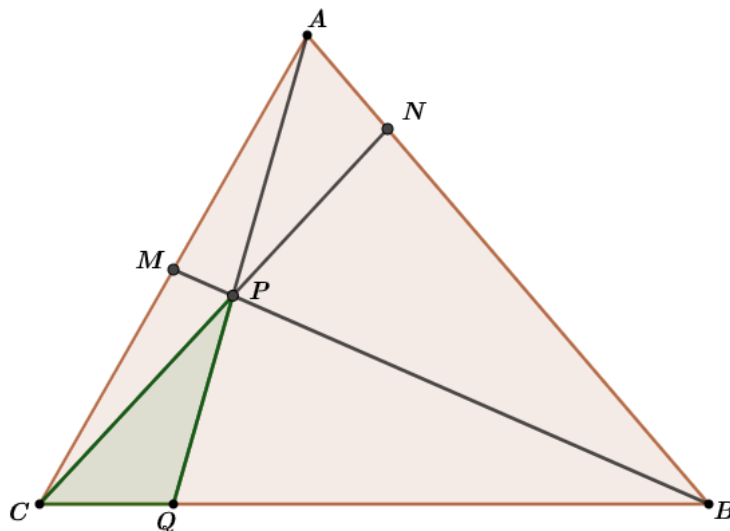
Problema 21. Na figura abaixo, M e N são pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BC}$. O número 15 indica a área do quadrilátero MNCP. Dessa forma, calcule a área do triângulo ABC.



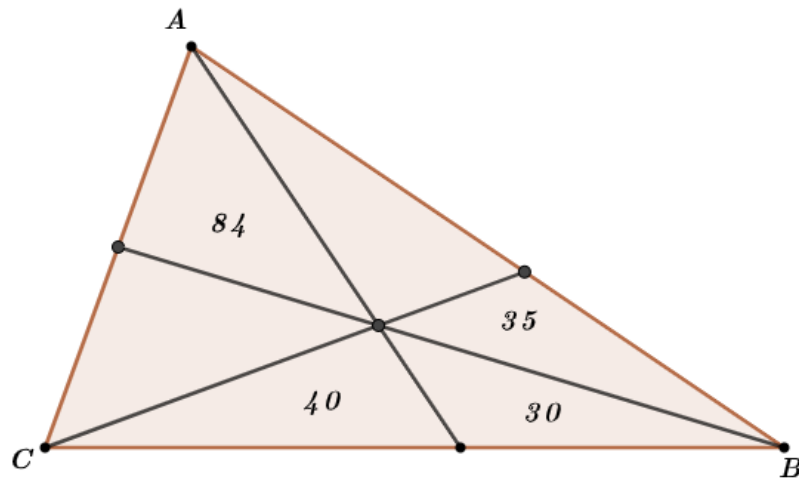
Problema 22. O retângulo ABCD abaixo possui base igual a 4 e altura 2. Os pontos E e M são pontos médios, respectivamente, da base e da altura. Dessa forma, quer-se a área do triângulo DPN.



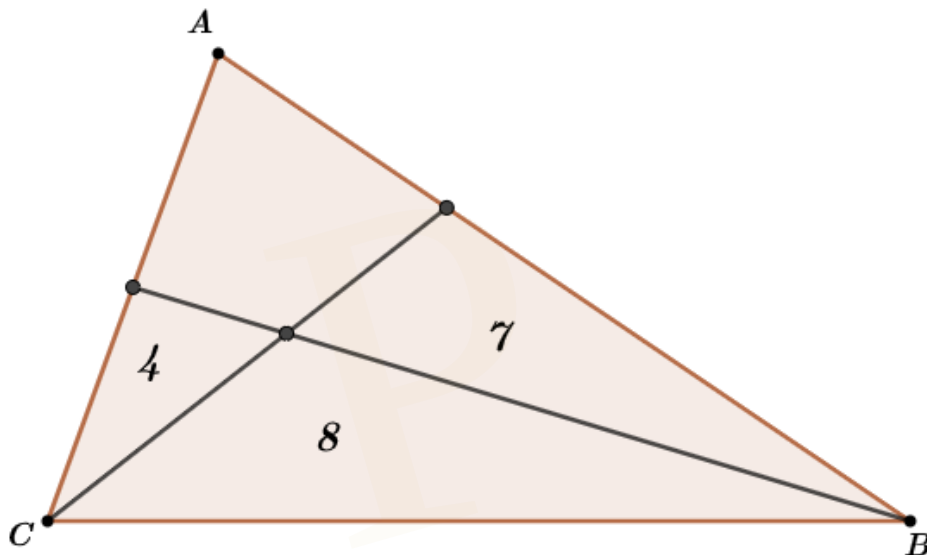
Problema 23. No triângulo ABC abaixo, M é ponto médio de $\overline{AC}$ e a área do triângulo CMP é igual a 10. Além disso, os pés das cevianas AQ e CN dividem os lados, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ numa razão de 1:4. Calcule a área do triângulo CPQ.



Problema 24. (IME) No triângulo abaixo, os números indicados em cada região correspondem as suas respectivas áreas. Dessa forma, calcule a área do triângulo ABC.

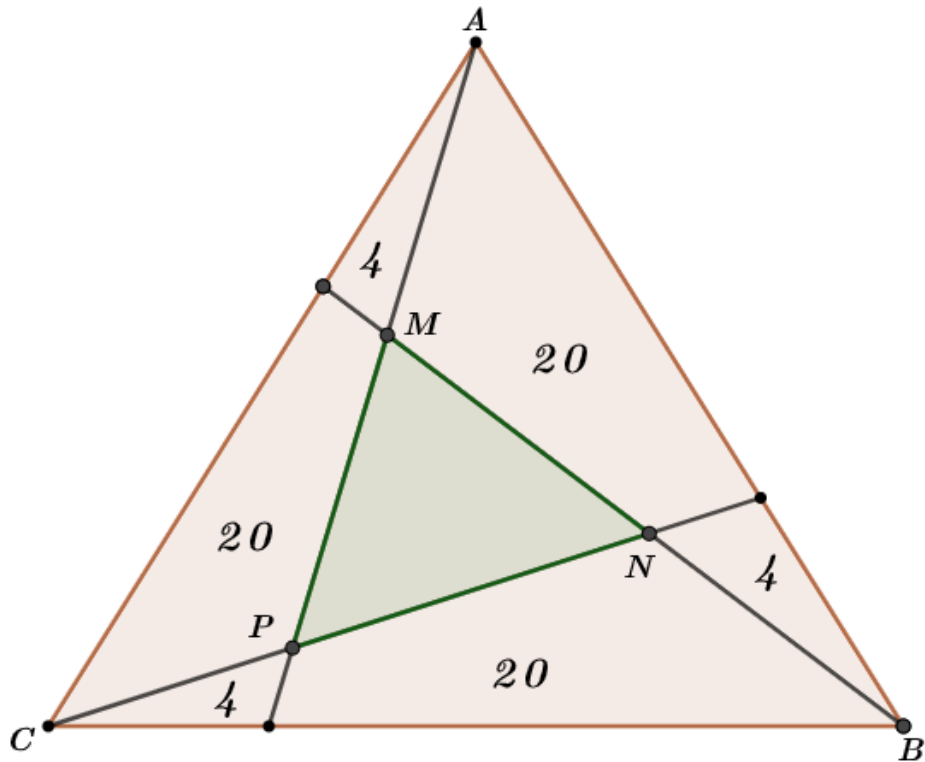


Problema 25. Calcule a área do triângulo ABC, sabendo que os números indicados nas regiões representam suas respectivas áreas.

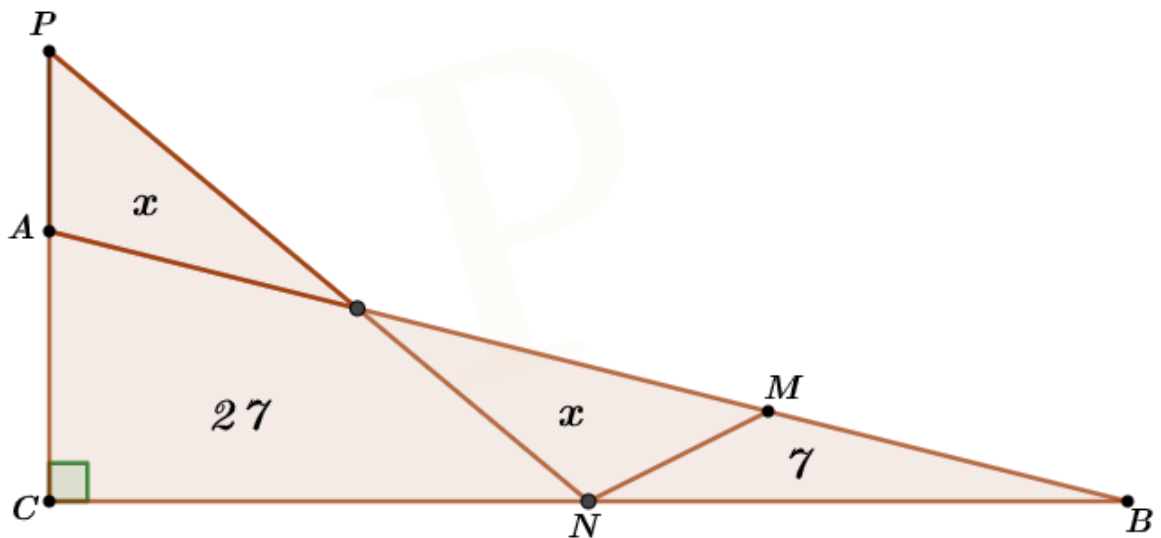


Problema 26. O triângulo ABC abaixo é equilátero e o números indicados em cada região representam suas respectivas áreas.

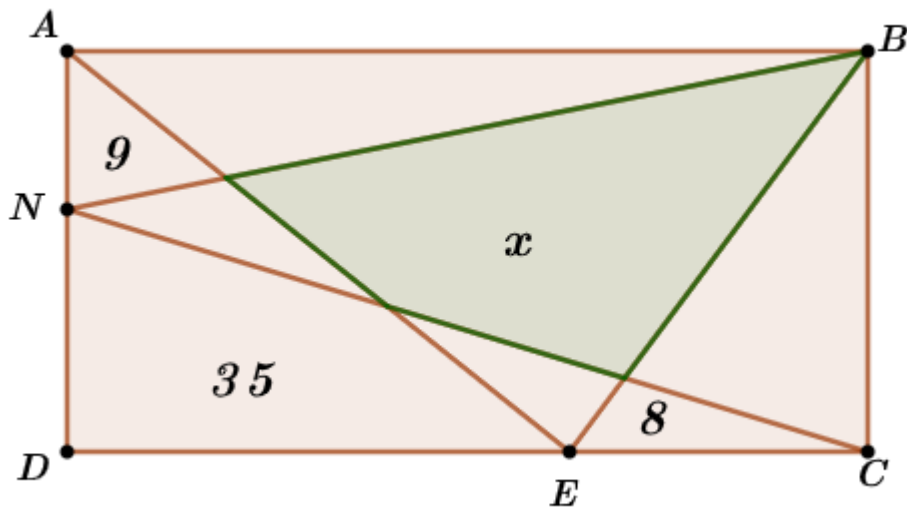
Dessa forma, calcule a área do triângulo MNP.



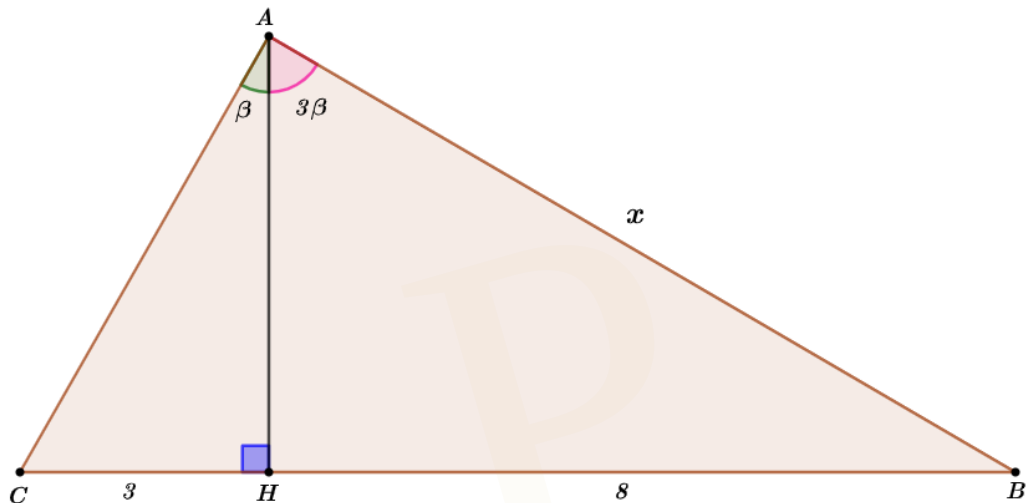
Problema 27. Determine x , sabendo que os números indicados nas regiões representam, respectivamente, suas áreas.



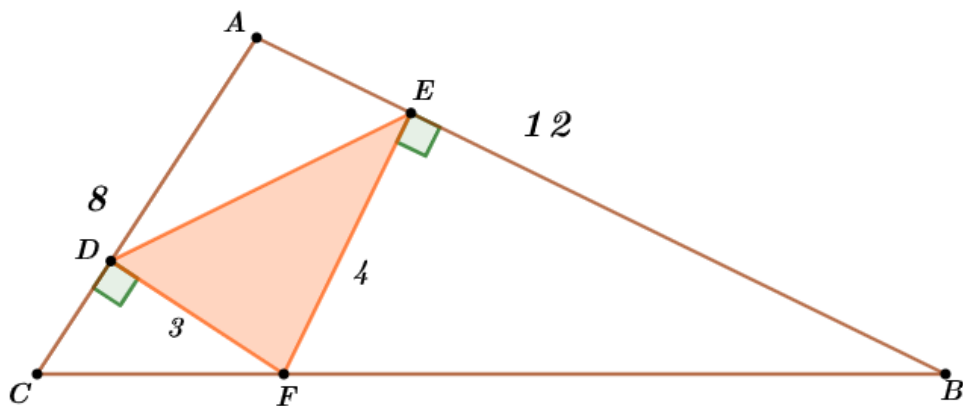
Problema 28. No retângulo $ABCD$ abaixo, os números indicados representam as áreas das regiões. Quer-se x .



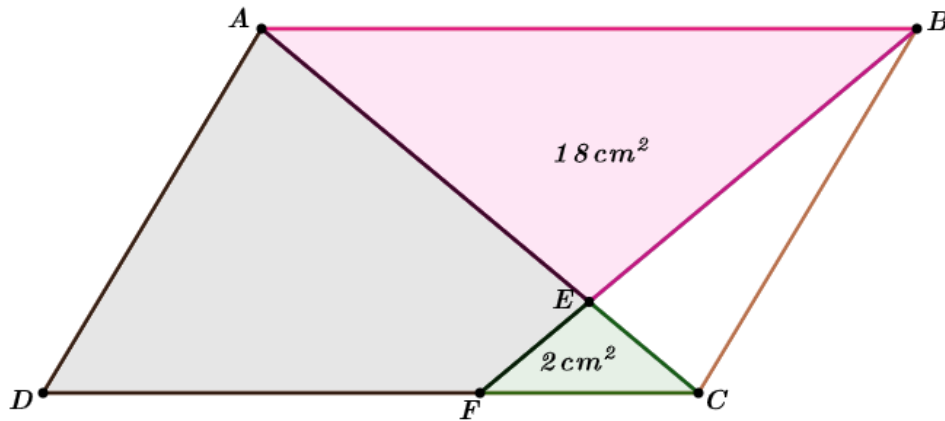
Problema 29. No triângulo ABC abaixo, calcule o valor de x .



Problema 30. No triângulo ABC da figura abaixo, tem-se $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$ e $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$. Tomando $\overline{DF} = 3$ perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{EF} = 4$ perpendicular a $\overline{AB}$, determina-se o triângulo DEF . Calcule a área deste triângulo.



Problema 31. No paralelogramo ABCD abaixo estão indicadas as áreas dos triângulos ABE e CEF, cujas medidas são 18 cm^2 e 2 cm^2 respectivamente. A partir destas informações, calcule a área do quadrilátero AEFD.



Problema 32. Calcule a área de um triângulo cujas alturas são $h_a = \frac{1}{4}$; $h_b = \frac{1}{7}$ e $h_c = \frac{1}{9}$.

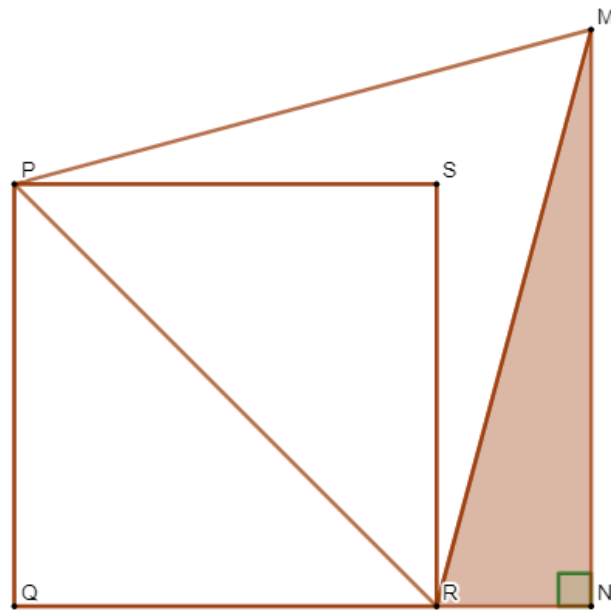
Problema 33. (EN) ABC é um triângulo, Q é o ponto médio de BC e o ponto P (sobre AB) é tal que $3 \cdot AP = 2 \cdot AB$. M é ponto de intersecção das retas CP e AQ. A razão entre as áreas dos triângulos AMB e ABC é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{3}{7}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{7}{18}$
- e) $\frac{1}{4}$

Problema 34. (EN) Considere um triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas CM e BN. A área do quadrilátero AMGN é igual a:

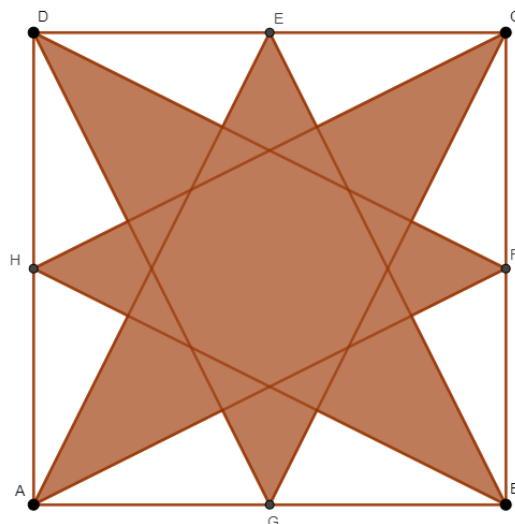
- a) $\frac{S}{2}$
- b) $\frac{2S}{3}$
- c) $\frac{S}{3}$
- d) $\frac{S}{4}$
- e) $\frac{3S}{4}$

Problema 35. (EN) Na figura abaixo, o triângulo PMR é equilátero e o quadrilátero PQRS é um quadrado, cujo lado mede 2 cm. A área do triângulo MNR, em cm^2 , vale:

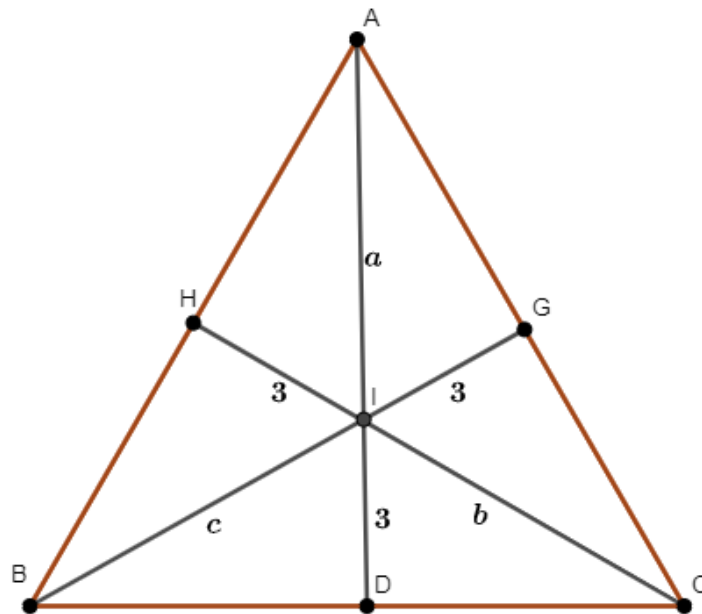


- a) 1
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{6}$
- e) $\sqrt{12}$

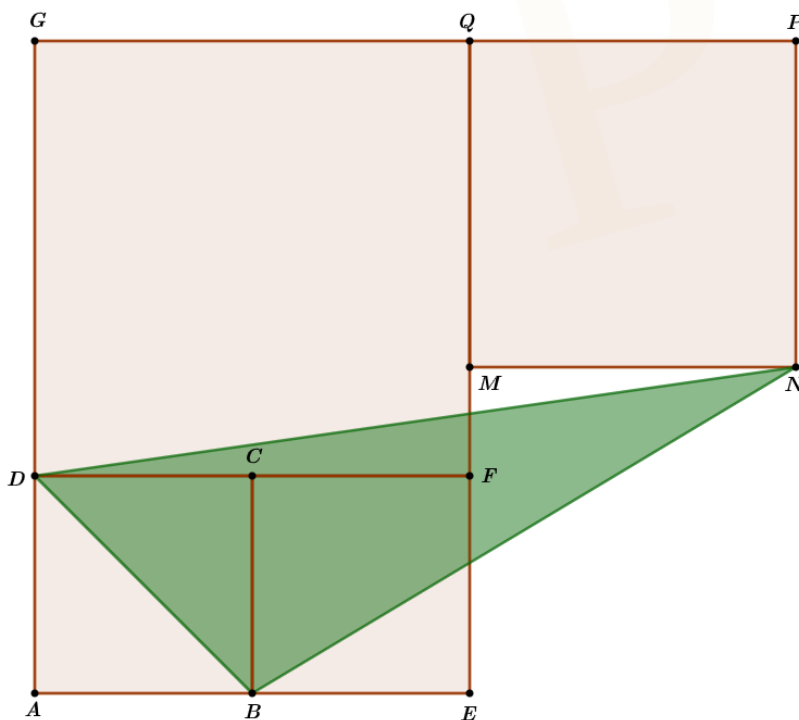
Problema 36. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado L e os pontos E, F, G, e H são médios dos lados CD, CB, BA e AD respectivamente. Com base nessas informações, calcule o percentual da área hachurada em relação a área total.



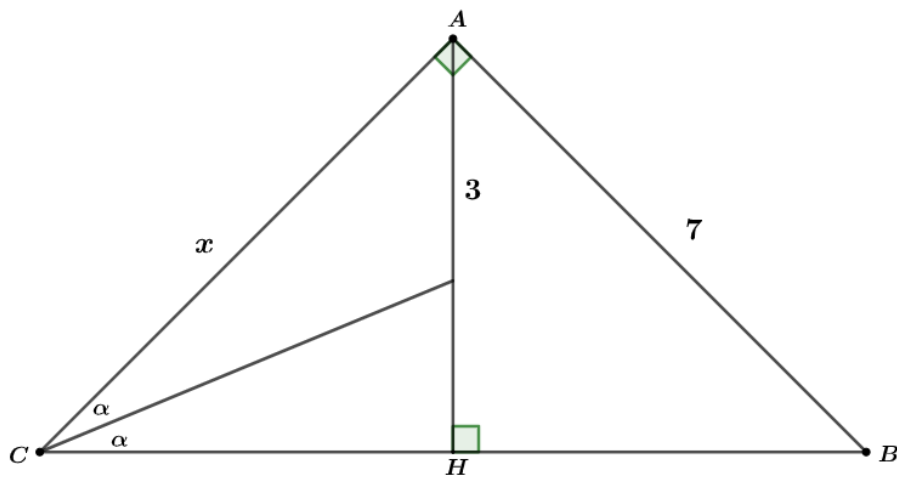
Problema 37. No triângulo ABC abaixo, foram traçadas 3 cevianas concorrentes em I, tal que $IH = IG = ID = 3 \text{ cm}$. Os comprimentos de AI , BI e CI são respectivamente a , b e c , donde $a + b + c = 43 \text{ cm}$. Calcule $\mathbf{a \cdot b \cdot c}$.



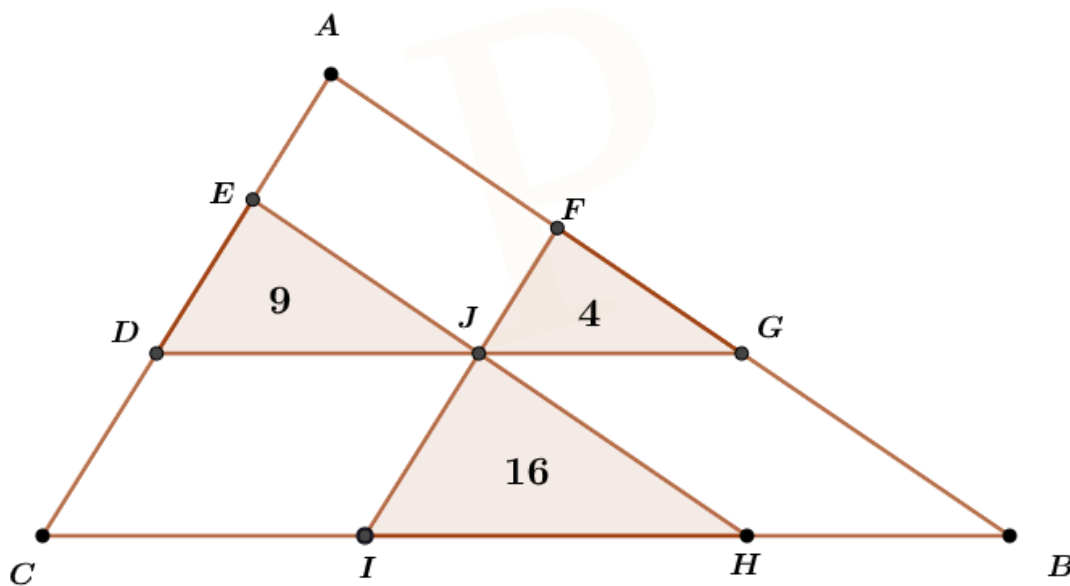
Problema 38. Na figura a seguir, temos os quadrados ABCD, CBEF, DFQG, MNPQ. O ponto M pertence ao segmento QF e a área do quadrado ABCD é 10 cm^2 . Calcule a área do triângulo BDN, em cm^2 .



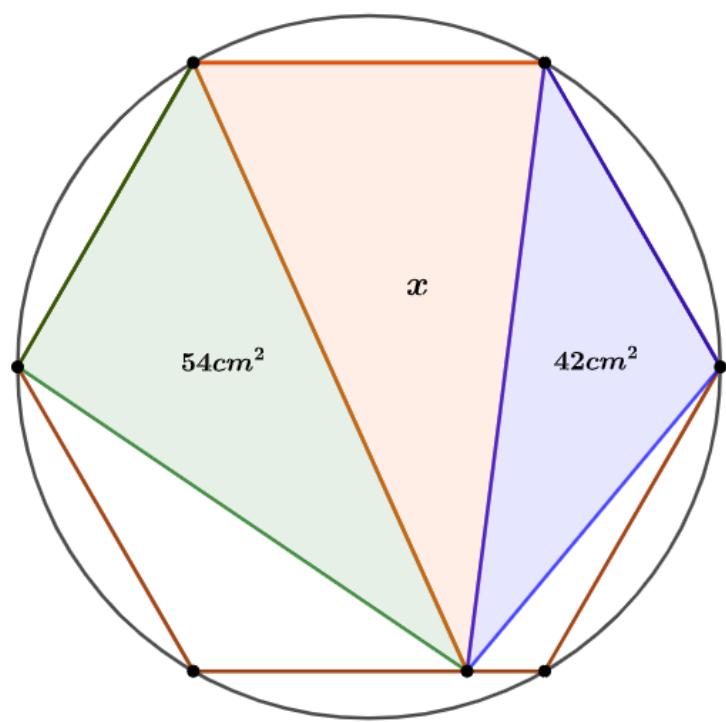
Problema 39. Na figura abaixo, determine o valor de $\mathbf{x}$.



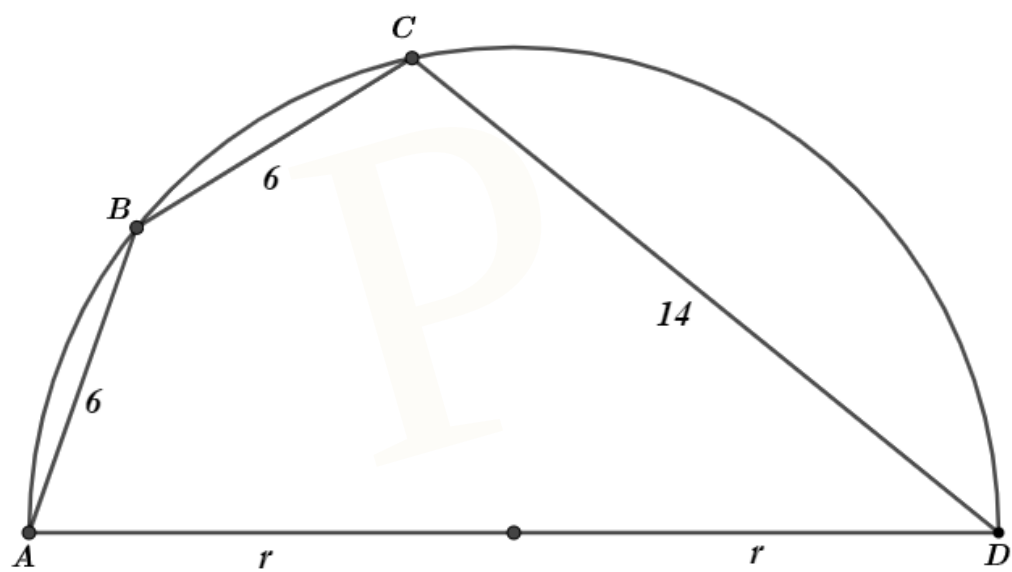
Problema 40. Na figura, temos que DG , EH e FI são paralelos, respectivamente a BC , AB e AC . As áreas dos triângulos EDJ , FJG e IHJ estão indicadas. Munido dessas informações, calcule a área de ABC .



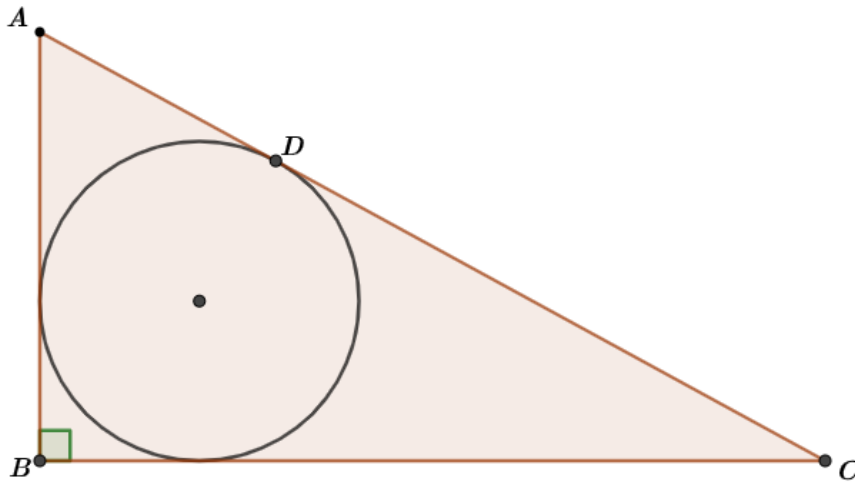
Problema 41. O hexágono da figura abaixo é regular. Os valores indicados nas regiões representam as suas respectivas áreas. Dessa forma, calcule a área indicada pela letra **x**.



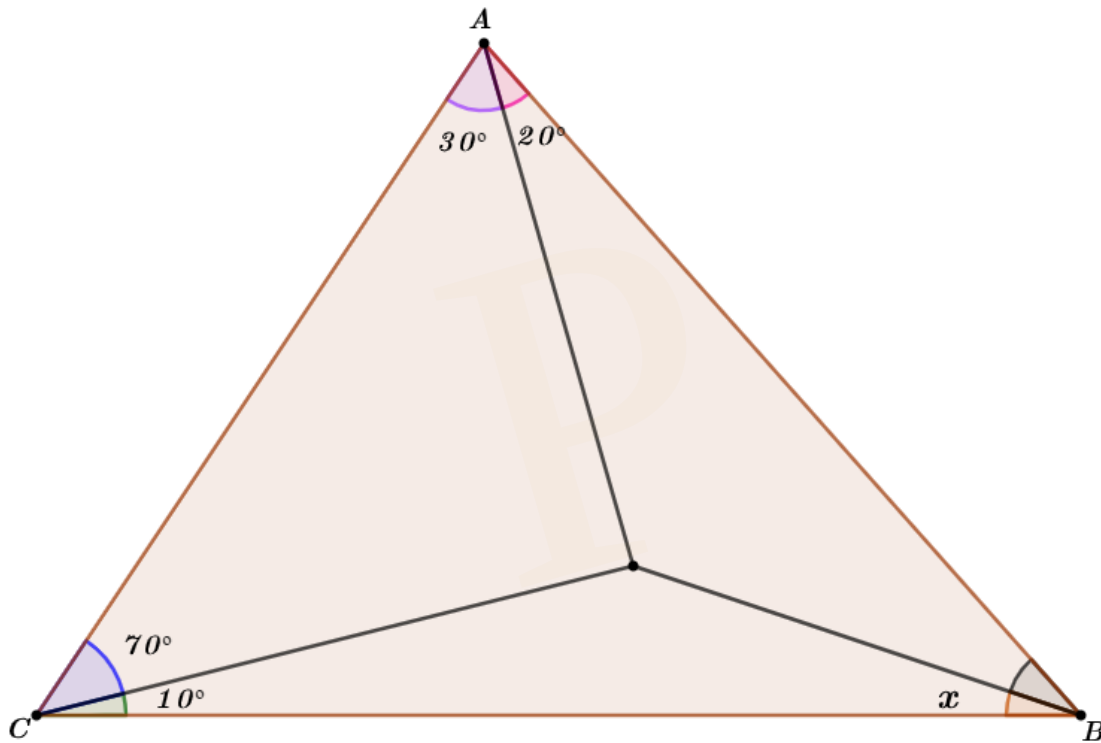
Problema 42. Determine o raio do semicírculo abaixo.



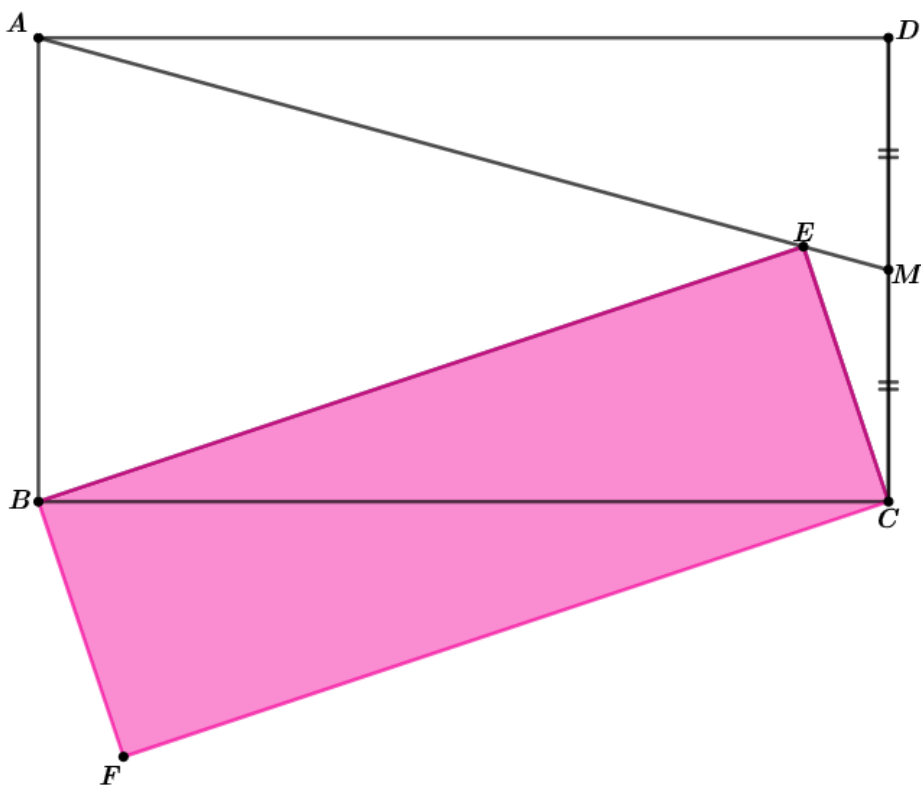
Problema 43. No triângulo abaixo, prove que $\overline{AD} \cdot \overline{DC} = [ABC]$.



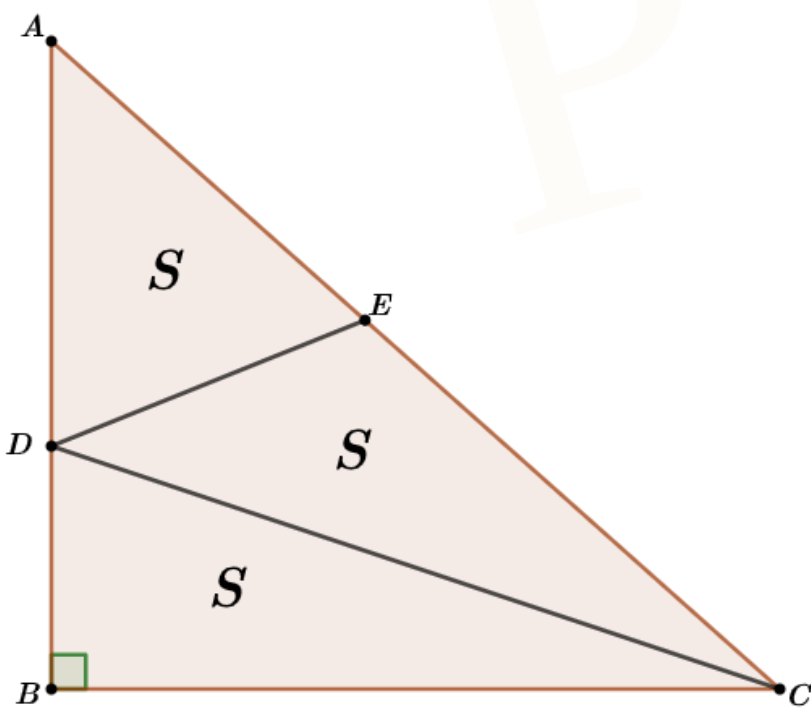
Problema 44. No triângulo ABC abaixo, calcule o valor do ângulo x .



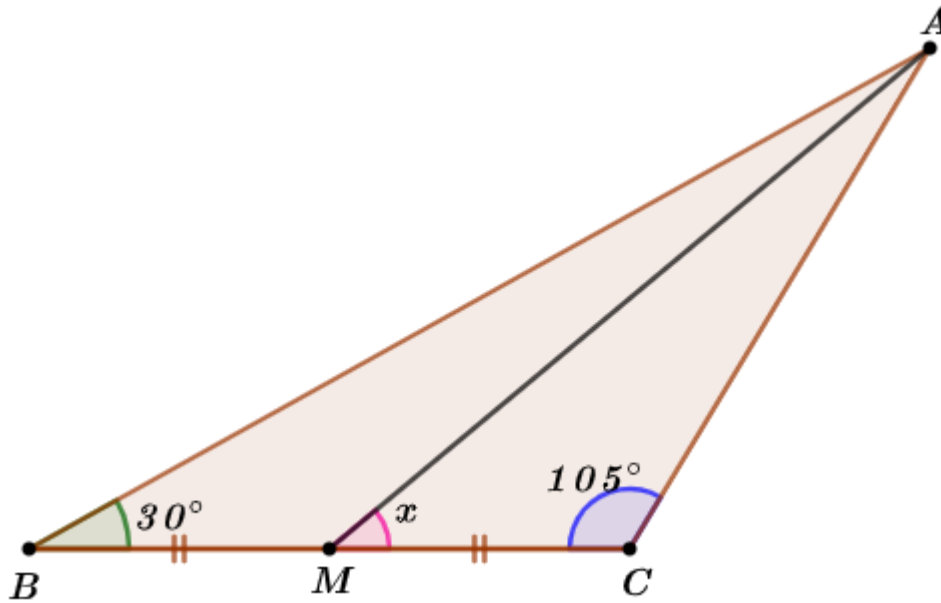
Problema 45. No retângulo ABCD abaixo, M é ponto médio de $\overline{CD}$, $\overline{AE} = 8$ e $\overline{EM} = 2$. Calcule a área do retângulo BFCE hachurado.



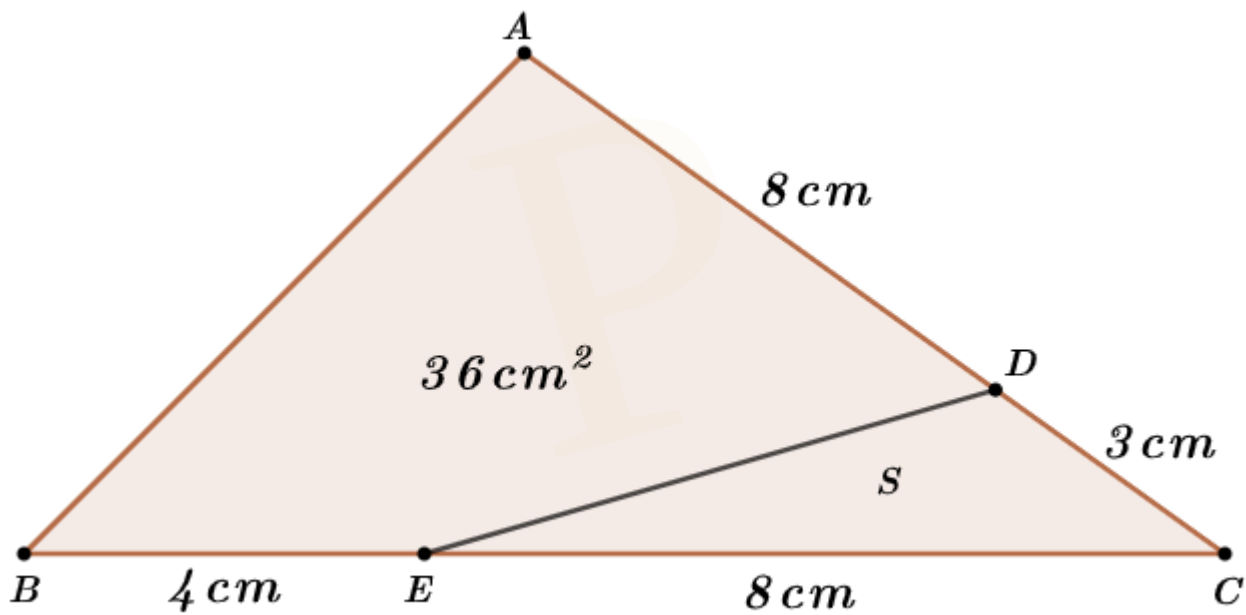
Problema 46. No triângulo retângulo ABC abaixo, $[BCD] = [CDE] = [DEA] = S$. Se $\overline{DE} = 13$, calcule $\overline{DC}$.



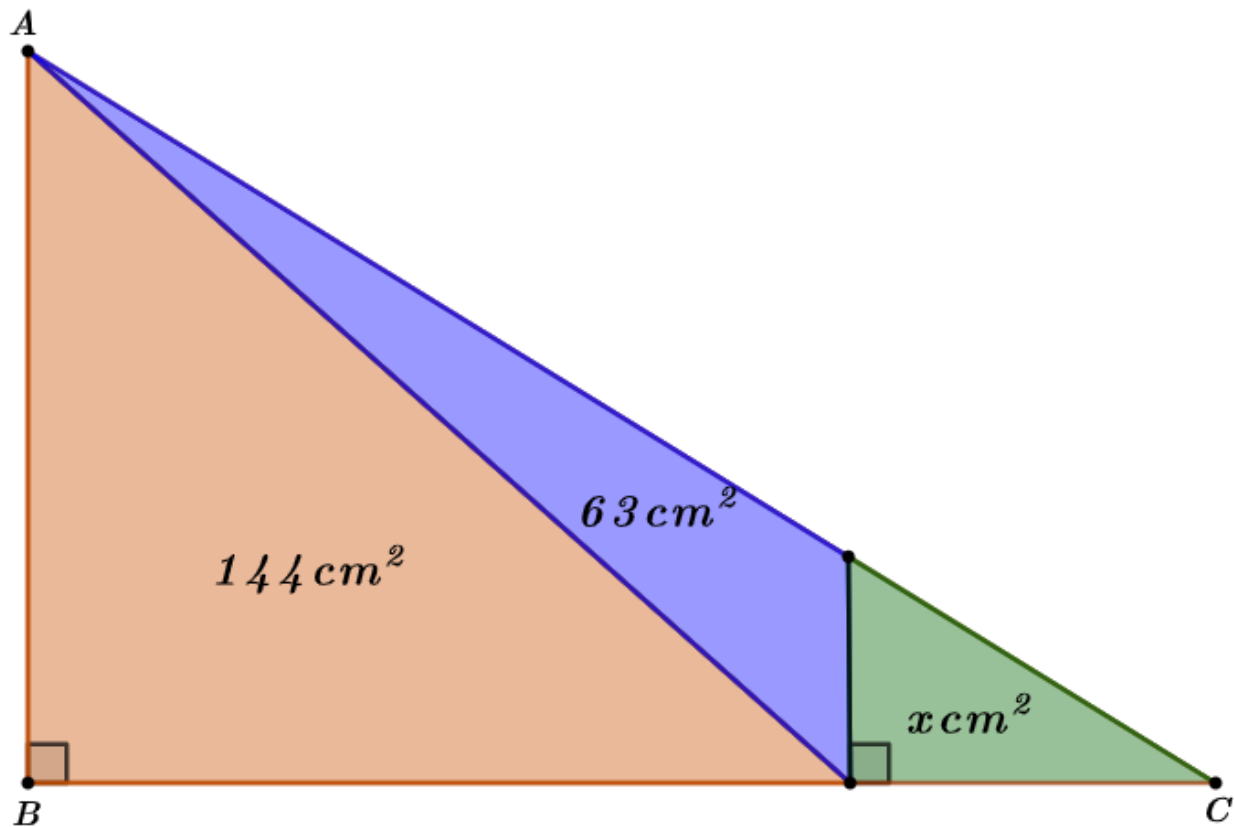
Problema 47. No triângulo ABC abaixo, M é ponto médio de BC. Determine o valor do ângulo x.



Problema 48. Calcule o valor da área S abaixo.



Problema 49. Determine o valor de x no triângulo abaixo.



Problema 50. No triângulo abaixo, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 6$ e $[ACD] = S$. Determine o valor de S .

