EDIÇÃO COMENTADA

EsPCEx 2026/2027

Matemática

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

Matemática - Prova objetiva, questões 1 a 20

20	20	1
questões objetivas	assuntos no mapa	gabarito comentado

Questão	Alternativa	Assunto
01	B	Função quadrática
02	A	Análise combinatória
03	C	Função modular
04	D	Equações exponenciais
05	E	Progressões aritméticas
06	A	Semelhança de triângulos
07	D	Polinômios
08	B	Relações de Girard
09	Sem alternativa correspondente	Análise combinatória
10	E	Equações logarítmicas
11	C	Sistemas lineares
12	B	Poliedros

Na questão 9, a resolução resulta em 4158 caminhos, sem alternativa correspondente. O gabarito definitivo oficial e o status de eventual anulação não foram verificados.

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova — continuação

Questão	Alternativa	Assunto
13	C	Geometria analítica
14	A	Distribuição binomial
15	D	Matriz inversa
16	E	Áreas de triângulos
17	D	Áreas de triângulos
18	E	Razão e proporção
19	B	Cilindros
20	C	Pirâmides

Na questão 14, a resposta pressupõe disparos independentes e probabilidades constantes; essa hipótese pertence à resolução e não foi acrescentada ao enunciado.

Como usar este material

Em cada questão, resolva o enunciado antes de consultar a análise e a resolução comentada. Use o mapa para revisar os assuntos e confira a resposta final ao terminar.

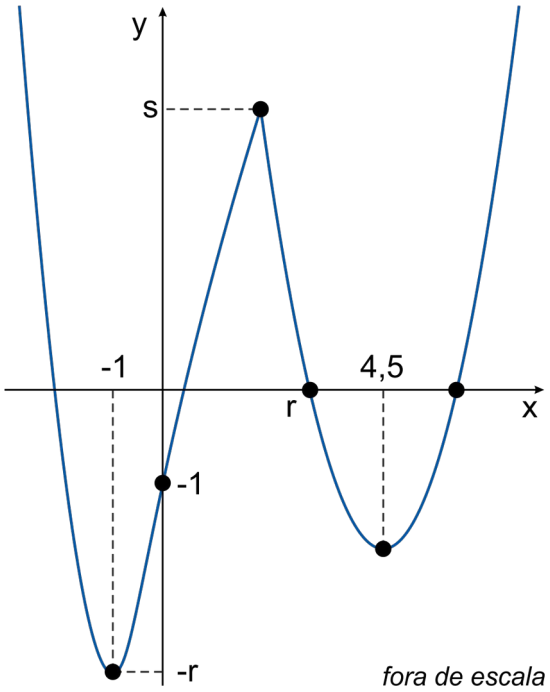
QUESTÃO 1

Enunciado

1. (Espcex (Aman)) Considere as constantes reais a, b, c, m, q, r e s e a função real definida pela sentença:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+(s+1)x+q & se \;\; x\le 0 \\ mx+q & se \;\; 0<x<2 \\ ax^2+bx+c & se \;\; x\ge 2 \end{cases}$$

Considere também o gráfico de f:



O valor de f(10) é

a) 27.
b) 21.
c) 18.
d) 24.
e) 15.

Análise da questão

Assunto	Função quadrática
Ideia central	Os parâmetros determinados nos primeiros ramos permitem reconstruir a parábola do último ramo.
Estratégia	Use o vértice e os valores indicados no gráfico para determinar os parâmetros dos primeiros ramos. Em seguida, obtenha as raízes e o coeficiente do último ramo e calcule o valor solicitado.

Resolução comentada

1. Parâmetros dos primeiros ramos

Pelo gráfico, $q=-1$. A abscissa do vértice do primeiro ramo é -1, logo:

$$-\frac{s+1}{4}=-1 \Rightarrow s=3$$

$$f(-1)=2(-1)^2+4(-1)-1=-3=-r \Rightarrow r=3$$

2. Raízes e coeficiente do último ramo

O último ramo tem uma raiz em $r=3$ e eixo de simetria $x=4{,}5$. Assim, a outra raiz é 6. Como $f(2)=s=3$:

$$f(x)=a(x-3)(x-6), \quad x\geq 2$$

$$a(2-3)(2-6)=3 \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

3. Valor solicitado

$$f(10)=\frac{3}{4}(10-3)(10-6)=21$$

Comentário do professor

O último ramo depende dos dados anteriores: seus parâmetros são obtidos a partir das informações dos primeiros ramos e do gráfico.

RESPOSTA FINAL

21.

Alternativa (B).

QUESTÃO 2

Enunciado

2. (Espcex (Aman)) Seja U o conjunto formado por todos os números inteiros pares positivos cuja soma dos algarismos é igual a 6. Considere os seguintes subconjuntos de U:
$A = \{a \in U \mid a < 4\ 000\}$ e $B = \{b \in U \mid b\ tem\ mais\ de\ 4\ algarismos\}$. Seja $\overline{B} = U - B$. O número de elementos do conjunto $A \cap \overline{B}$ é igual a

a) 43.
b) 47.
c) 45.
d) 49.
e) 41.

Análise da questão

Assunto	Análise combinatória
Ideia central	A interseção com o complementar reduz a contagem aos números que pertencem a A.
Estratégia	Identifique a relação entre A e o complementar de B em U. Conte os números por quantidade de algarismos, respeitando o primeiro algarismo não nulo, o último par e a soma exigida.

Resolução comentada

1. Identificação do conjunto

O complementar é tomado em U: $\overline{B} = U - B$. Todo elemento de A tem até quatro algarismos; portanto $A \cap \overline{B} = A$.

2. Contagem por número de algarismos

Contamos os números de A segundo sua quantidade de algarismos. O primeiro algarismo é não nulo e o último é par.

Um algarismo: apenas 6, dando 1 possibilidade.

Dois algarismos: para o último algarismo 0, 2 ou 4, o primeiro é, respectivamente, 6, 4 ou 2. São 3 possibilidades.

Três algarismos: para o último algarismo 0, 2 ou 4, a soma dos dois primeiros é 6, 4 ou 2. Com o primeiro não nulo, há $6+4+2=12$ possibilidades.

3. Números de quatro algarismos

Quatro algarismos: o primeiro deve ser 1, 2 ou 3. Fixado o último algarismo par, contamos os pares de algarismos intermediários:

$$d_1 = 1:\ 6+4+2=12$$

$$d_1 = 2:\ 5+3+1=9$$

$$d_1 = 3:\ 4+2=6$$

4. Total

Assim, há $12+9+6=27$ números de quatro algarismos. O total é:

$$1+3+12+27=43$$

Comentário do professor

O complementar de B é tomado em U. Na contagem, as restrições sobre o primeiro e o último algarismos e sobre a soma devem valer simultaneamente.

RESPOSTA FINAL

$$43.$$

Alternativa (A).

QUESTÃO 3

Enunciado

3. (Espcex (Aman)) Seja $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 7\}$. O conjunto imagem da função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $y=f(x)=\big||2x-6|-x\big|+x-3$, é:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 3\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 5\}$
d) $\{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 5\}$
e) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 5\}$

Análise da questão

Assunto	Função modular
Ideia central	Os sinais dos argumentos dos módulos determinam as leis da função em cada subintervalo.
Estratégia	Separe o domínio nos pontos em que os argumentos mudam de sinal e escreva os quatro ramos. Compare os valores nas extremidades e use a continuidade para concluir a imagem.

Resolução comentada

1. Sinais dos argumentos

No domínio $[0,7]$, estudamos os sinais dos argumentos dos módulos. O argumento interno $2x-6$ muda de sinal em $x=3$; o argumento do módulo externo muda de sinal em $x=2$ e $x=6$. Obtemos:

2. Leis nos subintervalos

$$f(x)=\begin{cases}3-2x & 0\le x\le 2\\ 4x-9 & 2\le x\le 3\\ 3 & 3\le x\le 6\\ 2x-9 & 6\le x\le 7\end{cases}$$

3. Determinação da imagem

$$f(0)=3,\quad f(2)=-1,\quad f(3)=3,\quad f(6)=3,\quad f(7)=5$$

Os valores coincidem nas junções dos ramos. A função é contínua, seu menor valor é -1 e seu maior valor é 5; logo sua imagem é $[-1,5]$.

Comentário do professor

A continuidade justifica que todos os valores entre o mínimo e o máximo pertencem à imagem; os valores nas junções dos ramos coincidem.

RESPOSTA FINAL

$$\text{imagem } [-1,5].$$

Alternativa (C).

QUESTÃO 4

Enunciado

4. (Espcex (Aman)) Seja $f(x)=16^x$, $g(x)=2^x$ e $h(x)=\dfrac{5x-1}{3}$. O valor de x tal que, $f\left(g\left(h(x)\right)\right)=2$ é

a) 2.
b) -2.
c) 1.
d) -1.
e) 0.

Análise da questão

Assunto	Equações exponenciais
Ideia central	A injetividade das exponenciais permite desfazer a composição de fora para dentro.
Estratégia	Iguale os expoentes na função externa e depois na função intermediária. Resolva a equação linear obtida para a função interna.

Resolução comentada

1. Primeira exponencial

Como $f\left(g\left(h(x)\right)\right)=2$, temos:

$$16^{g(h(x))}=2=16^{\frac{1}{4}}$$

Pela injetividade da função exponencial:

$$g\left(h(x)\right)=\frac{1}{4}$$

2. Segunda exponencial

Como $g\left(h(x)\right)=2^{h(x)}$:

$$2^{h(x)}=\frac{1}{4}=2^{-2} \Rightarrow h(x)=-2$$

3. Equação linear

$$\frac{5x-1}{3}=-2 \Rightarrow 5x-1=-6 \Rightarrow x=-1$$

RESPOSTA FINAL

$$x=-1.$$

Alternativa (D).

QUESTÃO 5

Enunciado

5. (Espcex (Aman)) Dois pelotões, Alfa e Bravo, estão fazendo um treino de corrida, ambos mantendo formação em fila, ou seja, com os militares dispostos em coluna, um atrás do outro. No pelotão Alfa, os militares usam camisas numeradas que formam uma progressão aritmética (PA), com o número da camisa do primeiro militar igual a 1, do segundo igual a 4, do terceiro igual a 7, e assim, sucessivamente, até o último militar. No pelotão Bravo, as camisas também são numeradas e formam a PA 5, 9, 13, 17, ...

Em certo instante, ambos os pelotões, que correm em sentidos opostos em vias retilíneas e paralelas, aproximaram-se de uma guarita. O primeiro militar de cada um dos pelotões passou pela guarita ao mesmo tempo e, em seguida, para cada 1 militar do pelotão Alfa que passou pela guarita, passaram 3 militares do pelotão Bravo.

No momento em que o último militar do pelotão Bravo passou pela guarita, a diferença entre o número de sua camisa e o número da camisa do militar do pelotão Alfa que passou ao mesmo tempo que ele é igual ao número da camisa do último militar do pelotão Alfa.

Sabendo que, no momento em que esses dois militares estavam passando pela guarita, ainda faltavam passar 19 militares do pelotão Alfa, o número total de militares desses dois pelotões é igual a

a) 76.
b) 114.
c) 95.
d) 133.
e) 57.

Análise da questão

Assunto	Progressões aritméticas
Ideia central	Os números das camisas seguem progressões aritméticas, enquanto os ciclos relacionam os tamanhos dos pelotões.
Estratégia	Defina a quantidade de ciclos após o primeiro par simultâneo e inclua os militares restantes. Escreva as camisas pelas progressões e use a diferença informada para determinar o total.

Resolução comentada

1. Contagem dos militares

Depois do primeiro par simultâneo, sejam x os ciclos em que passam um militar de Alfa e três de Bravo. No último ciclo, passaram $x+1$ militares de Alfa e $3x+1$ de Bravo. Como restam 19 de Alfa:

$$N(Alfa)=x+20, \quad N(Bravo)=3x+1$$

2. Números das camisas

As camisas em Alfa e Bravo seguem, respectivamente, $a_n = 3n - 2$ e $b_n = 4n + 1$. As camisas do último de Bravo, do militar de Alfa simultâneo e do último de Alfa são:

$$12x + 5, \quad 3x + 1, \quad 3x + 58$$

3. Equação dos ciclos

$$(12x + 5) - (3x + 1) = 3x + 58$$

$$6x = 54 \Rightarrow x = 9$$

4. Total dos pelotões

$$N(Alfa) + N(Bravo) = 29 + 28 = 57$$

Comentário do professor

O primeiro par simultâneo deve ser contado antes dos ciclos, e os dezenove militares restantes de Alfa entram no total do pelotão.

RESPOSTA FINAL

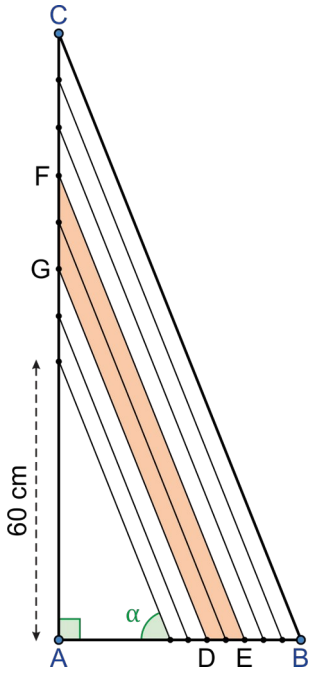
57 militares.

Alternativa (E).

QUESTÃO 6

Enunciado

6. (Espcex (Aman)) No interior do triângulo retângulo ABC foram traçados 7 segmentos paralelos ao lado BC, com extremidades nos lados AB e AC, sendo iguais as distâncias entre dois segmentos consecutivos quaisquer e entre o maior desses segmentos e o lado BC, conforme mostra a figura.



Sabendo que $tg\ \alpha = 2{,}5$ e que a área do quadrilátero DEFG é 720 cm², a área do triângulo ABC corresponde a

a) 3380 cm^2.
b) 2400 cm^2.
c) 2580 cm^2.
d) 2800 cm^2.
e) 3120 cm^2.

Análise da questão

Assunto	Semelhança de triângulos
Ideia central	A semelhança faz a área depender do quadrado da altura, e os intervalos iguais em AC permitem comparar duas áreas.
Estratégia	Meça os intervalos ao longo de AC e expresse os comprimentos envolvidos. Use a diferença de áreas dos triângulos semelhantes para determinar o intervalo e depois a área total.

Resolução comentada

1. Intervalos no cateto

Defina g como o intervalo entre pontos consecutivos medido ao longo de AC. O paralelismo e o espaçamento igual garantem a igualdade desses intervalos em AC. Conforme a figura:

$$AG = 60 + 2\,g, \quad AF = 60 + 4\,g, \quad AC = 60 + 7\,g$$

2. Diferença de áreas

Como $tg\ \alpha = \frac{5}{2}$, um triângulo semelhante com altura h sobre o cateto vertical tem base $\frac{2h}{5}$ e área $\frac{h^2}{5}$. A diferença de áreas vale 720:

$$\frac{(60+4\,g)^2 - (60+2\,g)^2}{5} = 720$$

3. Determinação do intervalo

$$(2\,g)(120+6\,g) = 3600$$

$$g^2 + 20\,g - 300 = 0 \ \Rightarrow\ (g-10)(g+30) = 0$$

4. Área total

Como $g > 0$, temos $g = 10$ cm. Portanto:

$$AC = 130\ \ cm, \quad S_{ABC} = \frac{130^2}{5} = 3380\ \ cm^2$$

Comentário do professor

O intervalo g é medido ao longo de AC, e não perpendicularmente às paralelas.

RESPOSTA FINAL

$$3380\ \ cm^2.$$

Alternativa (A).

QUESTÃO 7

Enunciado

7. (Espcex (Aman)) Considere o seguinte teorema:

Sendo mdc(f, g) o máximo divisor comum entre os polinômios f e g, α é uma raiz comum dos polinômios f e g se, e somente se, α é uma raiz do mdc(f, g).

As raízes comuns dos polinômios

$f(x)=6x^5+49x^4-65x^2-6x+16$ e $g(x)=6x^3-11x^2-4x+4$

estão contidas no intervalo:

a)] 2, 5 [
b)] 5, 8 [
c)] –7, –4 [
d)] –1, 2 [
e)] –4, –1 [

Análise da questão

Assunto	Polinômios
Ideia central	O algoritmo de Euclides reduz as raízes comuns dos polinômios às raízes de seu máximo divisor comum.
Estratégia	Use as duas identidades polinomiais para aplicar o algoritmo de Euclides. Fatore o polinômio resultante e verifique se suas raízes pertencem ao intervalo pedido.

Resolução comentada

1. Identidades polinomiais

Defina $p(x)=6x^2+x-2$. A divisão polinomial fornece as identidades:

$$f(x)=\left(x^2+10x+19\right)g(x)+30\,p(x)$$

$$g(x)=(x-2)\,p(x)$$

2. Máximo divisor comum

O fator constante 30 não altera o máximo divisor comum, a menos de uma constante não nula. Pelo algoritmo de Euclides, $mdc(f,g)=p$, a menos de fator constante. Pelo teorema do enunciado, as raízes comuns são as raízes de p:

3. Raízes comuns e intervalo

$$p(x)=6x^2+x-2=(3x+2)(2x-1)$$

$$x=-\frac{2}{3} \;\; ou \;\; x=\frac{1}{2}$$

Ambas pertencem ao intervalo $]-1,2[$.

RESPOSTA FINAL

raízes $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$, ambas em $]-1,2[$.

Alternativa (D).

QUESTÃO 8

Enunciado

8. (Espcex (Aman)) Sejam a, b, c e d as raízes da equação:

$$x^4-15x^3+20x^2+240x-576=0$$

Sabendo que $a+b=0$, o algarismo das unidades da maior raiz dessa equação é

a) 1.
b) 2.
c) 0.
d) 3.
e) 4.

Análise da questão

Assunto	Relações de Girard
Ideia central	As relações de Girard e a soma nula de duas raízes separam os produtos dos dois pares.
Estratégia	Combine a soma das raízes, os produtos triplos e o produto das quatro raízes. Determine os dois pares, identifique a maior raiz e leia seu algarismo das unidades.

Resolução comentada

1. Soma e produtos triplos

Pelas relações de Girard, $a+b+c+d=15$. Como $a+b=0$, segue $c+d=15$. A relação dos produtos triplos dá:

$$abc+abd+acd+bcd=-240$$

$$ab(c+d)+cd(a+b)=-240 \;\Rightarrow\; 15ab=-240 \;\Rightarrow\; ab=-16$$

2. Produto das outras raízes

Como $abcd=-576$:

$$(-16)cd=-576 \;\Rightarrow\; cd=36$$

3. Identificação das quatro raízes

Logo c e d são as raízes de:

$$t^2-15t+36=0 \;\Rightarrow\; (t-3)(t-12)=0$$

$$\{c,d\}=\{3,12\}$$

Já $a+b=0$ e $ab=-16$ dão $\{a,b\}=\{-4,4\}$. A maior raiz é 12, cujo algarismo das unidades é 2.

RESPOSTA FINAL

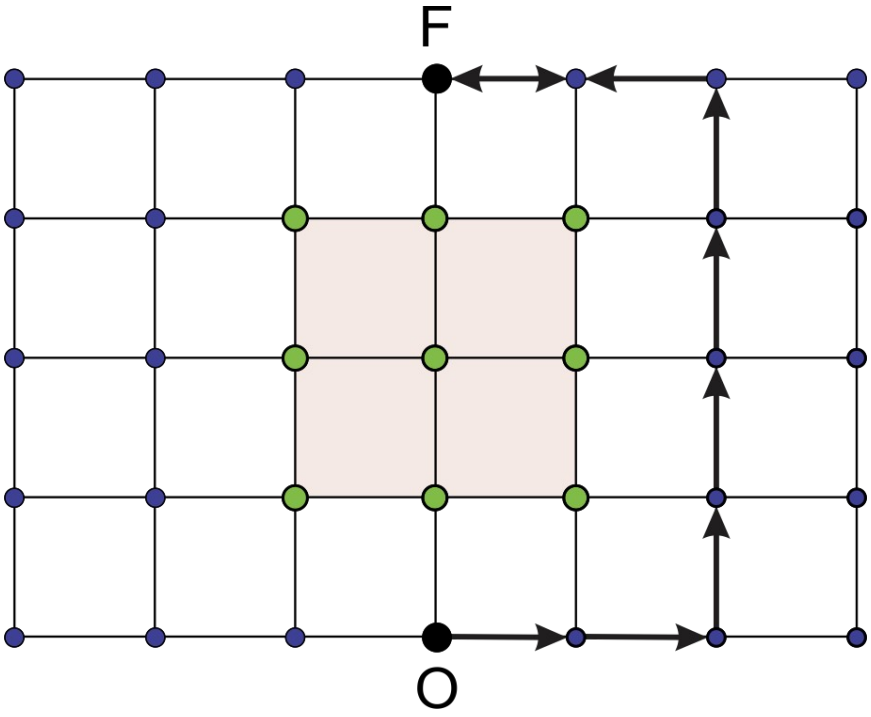
algarismo das unidades 2; maior raiz 12.

Alternativa (B).

QUESTÃO 9

Enunciado

9. (Espcex (Aman)) Sobre uma malha quadriculada estão dispostos 35 pontos, entre eles os pontos O e F. Um caminho deverá ser traçado do ponto O ao ponto F avançando 10 pontos, um ponto por vez, de maneira que o caminho final tenha avançado 4 pontos para cima (C), 3 pontos para a direita (D) e 3 pontos para a esquerda (E). O caminho pode passar por F antes de avançar os 10 pontos, mas obrigatoriamente deve avançar 10 pontos e terminar em F, o que implica que, em alguns caminhos, um segmento que liga dois pontos consecutivos pode ser percorrido mais de uma vez. A figura ilustra a malha, os 35 pontos e o caminho DDCCCCEEDE.



No centro da malha, 9 pontos estão em destaque. O total de caminhos distintos que passam por pelo menos um desses pontos em destaque é igual a

a) 4164.
b) 2322.
c) 2106.
d) 3240.
e) 3998.

Análise da questão

Assunto	Análise combinatória
Ideia central	É mais simples contar o complemento: os caminhos que evitam todos os pontos destacados.
Estratégia	Conte todas as palavras de movimentos e depois os caminhos que evitam a região central. Separe os dois grupos pelo lado direito, use a simetria para o lado esquerdo e subtraia o complemento.

Resolução comentada

1. Contagem do espaço amostral

Cada caminho é uma palavra de 10 movimentos com 4 C, 3 D e 3 E. O total de caminhos no espaço amostral é:

$$\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}=4200$$

Todos ficam na malha: a coordenada horizontal nunca ultrapassa três unidades à direita ou à esquerda, e há somente quatro subidas.

2. Região a evitar

Adote $O=(0,0)$. Os pontos destacados têm $x\in\{-1,0,1\}$ e $y\in\{1,2,3\}$. Contaremos os caminhos que não passam por esses pontos.

Durante as alturas $y=1,2,3$, um caminho que evita a região central deve permanecer inteiramente à direita, com $x\geq 2$, ou inteiramente à esquerda, com $x\leq -2$. Não pode trocar de lado nessas alturas, pois cada movimento horizontal avança apenas uma unidade.

3. Contagem pelo lado direito

Conte primeiro pela direita. Há dois grupos.

1. Caminhos que começam com DD e terminam com EE. Entre esse prefixo e esse sufixo restam quatro C, um D e um E. Se o D restante vem antes do E restante, a abscissa intermediária é 2 ou 3, sempre segura. As duas posições de D e E, com essa ordem fixada, podem ser escolhidas de:

$$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$$

Se o E restante vem antes do D restante, a abscissa cai para 1 entre eles. Isso só é permitido quando ambos ocorrem antes da primeira subida ou ambos depois da quarta subida. Há exatamente duas palavras: DDEDCCCCEE e DDCCCCEDEE.

Esse primeiro grupo tem $15+2=17$ caminhos.

2. Caminhos pela direita que não pertencem ao primeiro grupo. Como há apenas três movimentos D, a primeira subida precisa começar em $x=2$ ou $x=3$. Sem começar com DD, os únicos prefixos possíveis são DEDD e EDDD; eles usam todos os movimentos D e um E, obrigando as palavras DEDDCCCCEE e EDDDCCCCEE.

Começando com DD, mas sem terminar com EE, os únicos caminhos adicionais são DDCCCCEEDE e DDCCCCEEED. Assim, há exatamente mais quatro caminhos.

4. Simetria e complemento

Total pela direita: $17+4=21$. Pela simetria que troca D por E, há outros 21 pela esquerda. Os grupos são disjuntos; portanto 42 caminhos evitam os pontos destacados. Os que passam por pelo menos um deles são:

$$4200-42=4158$$

Comentário do professor

A contagem matemática não coincide com as alternativas apresentadas. O status de eventual anulação no gabarito definitivo oficial não foi verificado.

RESPOSTA FINAL

4158 caminhos. Nenhuma alternativa corresponde ao resultado.

QUESTÃO 10

Enunciado

10. (Espcex (Aman)) Considere a equação logarítmica:

$$\log_3(4x+1)=\log_3\left(x^2-8x+3\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{5}-1\right)$$

A única raiz real dessa equação é um número múltiplo de

a) 6.
b) 8.
c) 7.
d) 9.
e) 5.

Análise da questão

Assunto	Equações logarítmicas
Ideia central	As propriedades dos logaritmos reduzem a equação a uma equação quadrática, sujeita ao domínio original.
Estratégia	Estabeleça conjuntamente as condições de existência e reduza os logaritmos à mesma base. Fatore a equação obtida e confira as raízes nos argumentos originais.

Resolução comentada

1. Condições de existência

As condições de existência são:

$$4x+1>0,\quad x^2-8x+3>0,\quad \frac{x}{5}-1>0$$

2. Redução da equação

Sua interseção fornece $x > 4+\sqrt{13}$. Como $\log_{\frac{1}{3}} u = -\log_3 u$, a equação equivale a:

$$\log_3(4x+1) = \log_3\left(\frac{x^2-8x+3}{\frac{x}{5}-1}\right)$$

$$(4x+1)\left(\frac{x}{5}-1\right) = x^2-8x+3$$

3. Raízes e validação

$$x^2-21x+20=0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x-20)=0$$

A raiz $x=1$ não satisfaz o domínio. Para $x=20$, os argumentos são 81, 243 e 3, todos positivos. A única raiz é 20, múltiplo de 5.

Comentário do professor

O domínio resulta da interseção das três condições de positividade dos argumentos; uma condição isolada não basta para validar uma raiz.

RESPOSTA FINAL

única raiz $x=20$, múltiplo de 5.

Alternativa (E).

QUESTÃO 11

Enunciado

11. (Espcex (Aman)) Um treinamento foi realizado por 420 soldados de determinado regimento. Para o transporte desses soldados do quartel até o local de treinamento, foi utilizado um total de 26 veículos, entre caminhões táticos, ônibus e jipes, cada tipo de veículo transportando um número de soldados respectivamente igual a 20, 24 e 4. A volta de todos para o quartel foi feita utilizando 2 caminhões táticos a menos, 1 ônibus a menos e o mesmo número de jipes, cada tipo de veículo transportando um número de soldados respectivamente igual a 22, 29 e 6.

O número total de ônibus e jipes utilizados no transporte de ida até o local de treinamento é igual a

a) 16.
b) 12.
c) 15.
d) 13.
e) 14.

Análise da questão

Assunto	Sistemas lineares
Ideia central	A eliminação de uma variável reduz o sistema e permite obter diretamente a soma pedida.
Estratégia	Defina as quantidades de caminhões, ônibus e jipes e conserve o sistema do enunciado. Elimine os jipes, determine os caminhões e use o total para obter a soma pedida.

Resolução comentada

1. Modelagem do transporte

Sejam c, o e j as quantidades de caminhões, ônibus e jipes na ida; a letra o representa ônibus. O sistema é:

$$\begin{cases} c+o+j=26 \\ 20c+24o+4j=420 \\ 22(c-2)+29(o-1)+6j=420 \end{cases}$$

2. Eliminação dos jipes

Eliminando a quantidade de jipes, obtemos:

$$4c+5o=79$$

$$16c+23o=337$$

3. Quantidades procuradas

Subtraindo quatro vezes a primeira equação da segunda:

$$3o=21 \Rightarrow o=7 \Rightarrow c=11$$

$$o+j=26-c=15$$

RESPOSTA FINAL

15 ônibus e jipes na ida.

Alternativa (C).

QUESTÃO 12

Enunciado

12. (Espcex (Aman)) O cuboctaedro truncado é um poliedro convexo formado por 26 faces, algumas octógonos regulares, algumas hexágonos regulares e as demais quadrados, sendo o número de faces quadradas igual ao dobro do número de faces octogonais.

Se em cada vértice do cuboctaedro concorrem 3 arestas, o número de faces hexagonais desse poliedro é igual a

a) 6.
b) 8.
c) 4.
d) 3.
e) 5.

Análise da questão

Assunto	Poliedros
Ideia central	A relação de Euler e a contagem das incidências de arestas determinam as quantidades de faces.
Estratégia	Relacione vértices e arestas pela concorrência de três arestas em cada vértice e aplique Euler. Conte cada aresta em duas faces e determine a quantidade de faces hexagonais.

Resolução comentada

1. Relação de Euler

Denote por V e A as quantidades de vértices e arestas. Como três arestas concorrem em cada vértice, $3V = 2A$. Para as 26 faces, vale a relação de Euler:

$$V - A + 26 = 2$$

$$\frac{2A}{3} - A + 26 = 2 \;\Rightarrow\; A = 72$$

2. Contagem das faces

Se há x faces octogonais, há $2x$ quadradas e $26 - 3x$ hexagonais. Cada aresta pertence a duas faces, logo:

$$8x + 4(2x) + 6(26 - 3x) = 2 \cdot 72$$

$$156 - 2x = 144 \;\Rightarrow\; x = 6$$

3. Faces hexagonais

Portanto são 6 faces octogonais, 12 quadradas e $26-18=8$ hexagonais.

RESPOSTA FINAL

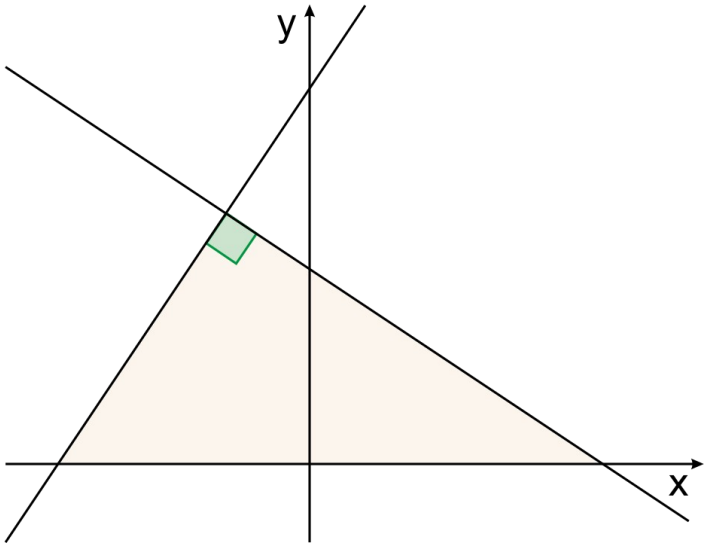
8 faces hexagonais.

Alternativa (B).

QUESTÃO 13

Enunciado

13. (Espcex (Aman)) A reta r, de equação $3x-2y+18=0$, intersecta perpendicularmente a reta s, conforme mostra a figura.



Sabendo que a área do triângulo determinado pelas retas r e s e pelo eixo x é 39, a reta s intersecta o eixo y no ponto de ordenada:

a) $\frac{7}{3}$

b) $\frac{16}{3}$

c) $\frac{14}{3}$

d) $\frac{19}{6}$

e) $\frac{25}{6}$

Análise da questão

Assunto	Geometria analítica
Ideia central	A área do triângulo retângulo determina a distância entre as interseções das retas com o eixo horizontal.
Estratégia	Obtenha o ângulo da reta a partir de seu coeficiente angular e use a área para determinar a distância entre as interseções. Escolha o lado indicado na figura e calcule a ordenada na origem.

Resolução comentada

1. Dados da reta e ângulo

A reta r tem coeficiente angular $\frac{3}{2}$ e abscissa da interseção com o eixo x igual a -6. Para seu ângulo θ com o eixo positivo:

$$sen\ \theta=\frac{3}{\sqrt{13}},\quad \cos\ \theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

2. Distância entre as interseções

Seja d a distância entre as interseções de r e s com o eixo x. Como as retas são perpendiculares, o triângulo é retângulo, com hipotenusa d e catetos $d\cdot sen\ \theta$ e $d\cdot\cos\ \theta$. Assim:

$$39=\frac{1}{2}d^2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{3}{13}d^2\ \Rightarrow\ d=13$$

3. Orientação e ordenada na origem

Conforme a figura, s intersecta o eixo x à direita da interseção de r; portanto sua abscissa é $-6+13=7$. Seu coeficiente angular é $-\frac{2}{3}$. Se b é a ordenada na origem:

$$0=-\frac{2}{3}\cdot 7+b\ \Rightarrow\ b=\frac{14}{3}$$

Comentário do professor

A figura fixa a orientação: a reta s intersecta o eixo horizontal à direita da interseção de r. A área, sozinha, não selecionaria esse ramo geométrico.

RESPOSTA FINAL

ordenada na origem $\frac{14}{3}$.

Alternativa (C).

QUESTÃO 14

Enunciado

14. (Espcex (Aman)) Alfredo e Bernardo estão em treinamento de qualificação para tiro de 200 m. A probabilidade de Alfredo acertar a área de pontuação é $\frac{2}{3}$, e a probabilidade de Bernardo acertar a área de pontuação é $\frac{5}{8}$. Cada um desses atiradores irá disparar duas vezes. A probabilidade de Alfredo acertar a área de pontuação mais vezes do que Bernardo é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{5}{6}$

Análise da questão

Assunto	Distribuição binomial
Ideia central	Sob independência e probabilidades constantes, os acertos de cada atirador seguem uma distribuição binomial.
Estratégia	Calcule as probabilidades de zero, um e dois acertos para cada atirador. Multiplique as probabilidades dos três casos disjuntos em que Alfredo supera Bernardo e some os resultados.

Resolução comentada

1. Modelo binomial e hipótese

Assumindo disparos independentes e probabilidades constantes, a quantidade de acertos de cada atirador tem distribuição binomial:

$$P(X=k)=C(2,k)\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{2-k},\quad k=0,1,2$$

2. Probabilidades dos atiradores

Para Alfredo, $p=\frac{2}{3}$; para Bernardo, $p=\frac{5}{8}$. As probabilidades de zero, um e dois acertos são, respectivamente:

$$\textit{Alfredo}:\ \frac{1}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9}$$

$$\textit{Bernardo}:\ \frac{9}{64},\ \frac{30}{64},\ \frac{25}{64}$$

3. Casos favoráveis

Os casos favoráveis, escritos como (acertos de Alfredo, acertos de Bernardo), são (1,0), (2,0) e (2,1), que são disjuntos. Pela independência:

$$P(1,0)=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{64}=\frac{1}{16}$$

$$P(2,0)=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{64}=\frac{1}{16}$$

$$P(2,1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{30}{64}=\frac{5}{24}$$

4. Soma dos casos

$$P=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{5}{24}=\frac{1}{3}$$

Comentário do professor

A independência dos disparos é a hipótese usual utilizada nesta resolução, mas não aparece explicitamente no enunciado.

RESPOSTA FINAL

$\frac{1}{3}$, sob a hipótese de independência.

Alternativa (A).

QUESTÃO 15

Enunciado

15. (Espcex (Aman)) Dada a matriz $M=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 3\\ -2 & 8\end{bmatrix}$, o maior elemento da matriz inversa de M é

a) – 2.
b) 2.
c) – 4.
d) 1.
e) 4.

Análise da questão

Assunto	Matriz inversa
Ideia central	A fórmula da matriz inversa permite comparar exatamente seus elementos.
Estratégia	Calcule o determinante e aplique a fórmula da inversa com frações exatas. Compare os quatro elementos para identificar o maior.

Resolução comentada

1. Determinante

O determinante da matriz é:

$$\det M = \frac{1}{4}\cdot 8 - 3\left(-2\right) = 8$$

2. Matriz inversa

Aplicando a fórmula da inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

3. Maior elemento

O maior elemento é 1.

RESPOSTA FINAL

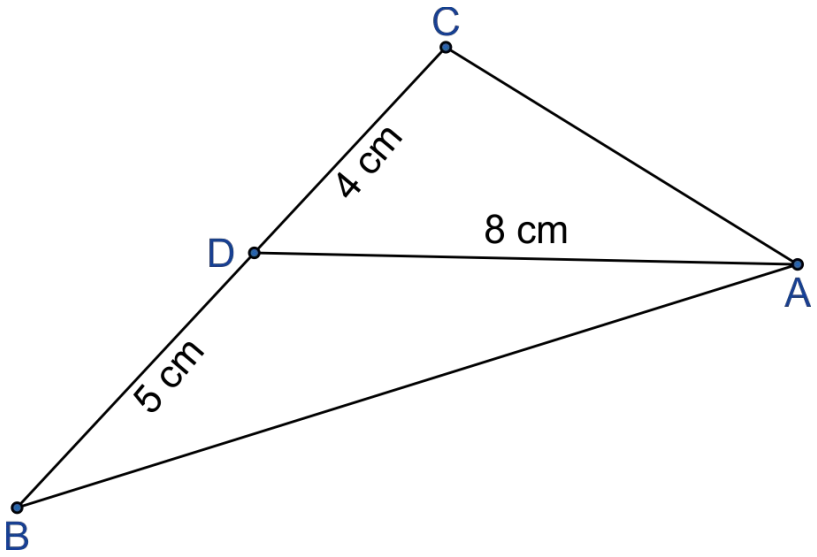
maior elemento 1.

Alternativa (D).

QUESTÃO 16

Enunciado

16. (Espcex (Aman)) Considere um triângulo ABC e um ponto D sobre o lado BC, conforme mostra a figura.



Sabendo que o comprimento do segmento AB é igual ao dobro do comprimento do segmento AC, a área do triângulo ACD corresponde a:

a) $2\sqrt{15}\,cm^2$
b) $4\sqrt{5}\,cm^2$
c) $5\sqrt{5}\,cm^2$
d) $2\sqrt{30}\,cm^2$
e) $3\sqrt{15}\,cm^2$

Análise da questão

Assunto	Áreas de triângulos
Ideia central	O teorema de Stewart determina um lado do triângulo cuja área será calculada por Heron.
Estratégia	Aplique Stewart à ceviana e determine o comprimento de AC. Com os três lados do triângulo ACD, calcule seu semiperímetro e aplique Heron.

Resolução comentada

1. Aplicação de Stewart

Pelo teorema de Stewart:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = BC \cdot \left(AD^2 + CD \cdot BD \right)$$

2. Comprimento de AC

Com $AC=b$, $AB=2b$, $BD=5$ cm, $CD=4$ cm e $AD=8$ cm:

$$5b^2+4(2b)^2=9\left(8^2+4\cdot 5\right)$$

$$21b^2=756 \;\Rightarrow\; b=6 \;\; cm$$

3. Área por Heron

No triângulo ACD, os lados medem 4, 6 e 8 cm e o semiperímetro é 9 cm. Pela fórmula de Heron:

$$S_{ACD}=\sqrt{9\cdot(9-4)\cdot(9-6)\cdot(9-8)}=\sqrt{135}=3\sqrt{15} \;\; cm^2$$

RESPOSTA FINAL

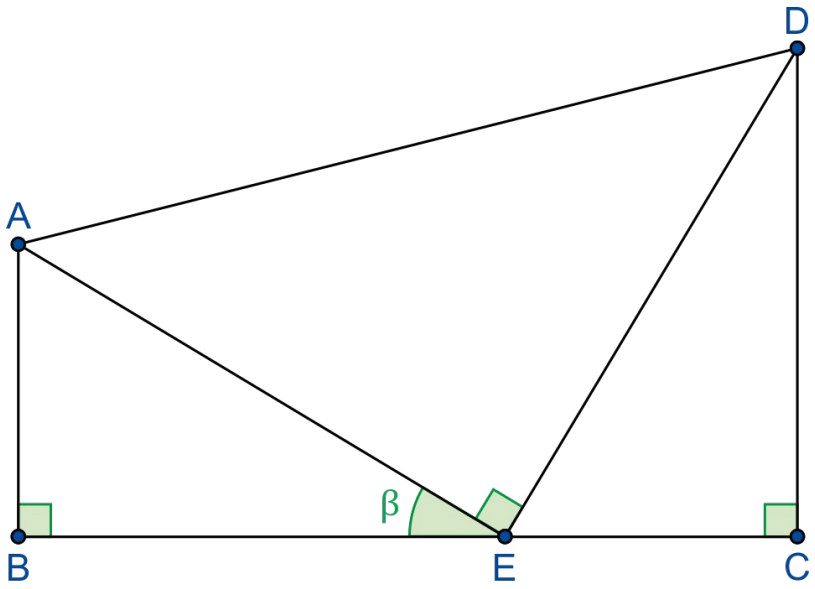
$$3\sqrt{15} \;\; cm^2.$$

Alternativa (E).

QUESTÃO 17

Enunciado

17. (Espcex (Aman)) No plano, um ponto E está sobre o lado BC do quadrilátero ABCD, conforme mostra a figura.



fora de escala

Sabendo que o lado BC mede 22cm, que a medida do lado CD excede a medida do lado AB em 14cm e que $tg\beta = \frac{3}{5}$, a área do triângulo ADE é

a) 144 cm^2.
b) 148 cm^2.
c) 152 cm^2.
d) 136 cm^2.
e) 140 cm^2.

Análise da questão

Assunto	Áreas de triângulos
Ideia central	A complementaridade dos ângulos fornece os comprimentos necessários para a área do triângulo retângulo ADE.
Estratégia	Use as tangentes dos ângulos complementares para relacionar os segmentos e resolva a equação de comprimentos. Calcule AE e DE por Pitágoras e use sua perpendicularidade para obter a área.

Resolução comentada

1. Relações entre os ângulos

Como $\angle AED$ é reto e B, E, C são colineares, os ângulos BEA e DEC são complementares. Os triângulos ABE e ECD são retângulos; portanto $\angle EDC$ tem a mesma medida β de $\angle BEA$.

$$tg\ \beta = \frac{AB}{BE} = \frac{3}{5}, \quad tg\ \beta = \frac{EC}{CD} = \frac{3}{5}$$

$$BE = \frac{5}{3} AB, \quad EC = \frac{3}{5} CD$$

2. Comprimentos da figura

Como $CD = AB + 14$ e $BE + EC = 22$:

$$\frac{5}{3} AB + \frac{3}{5}(AB + 14) = 22$$

$$25\,AB + 9\,AB + 126 = 330 \ \Rightarrow\ 34\,AB = 204 \ \Rightarrow\ AB = 6\ \ cm$$

3. Lados do triângulo ADE

Consequentemente, $CD = 20$ cm, $BE = 10$ cm e $EC = 12$ cm. Por Pitágoras:

$$AE = \sqrt{6^2 + 10^2} = 2\sqrt{34}\ \ cm$$

$$DE = \sqrt{12^2 + 20^2} = 4\sqrt{34}\ \ cm$$

4. Área do triângulo retângulo

Como AE é perpendicular a DE:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{34}\right)\left(4\sqrt{34}\right) = 136\ \ cm^2$$

RESPOSTA FINAL

$$136\ \ cm^2.$$

Alternativa (D).

QUESTÃO 18

Enunciado

18. (Espcex (Aman)) Em 2025, cada aluno de uma academia de artes marciais participou de exatamente dois torneios: um no Rio de Janeiro (RJ) e um em São Paulo (SP), mas esses alunos não participaram, necessariamente, dos mesmos torneios. Em abril, cada aluno participou de um torneio, de maneira que a razão entre o número de alunos que competiram no RJ e o número de alunos que competiram em SP foi igual a $\frac{3}{8}$. Em julho, apenas alguns alunos participaram de torneios, sendo que 45 alunos competiram no RJ e 25 em SP, de tal maneira que, após as competições de julho, a razão indicada, considerando o total de participações até aquele momento, passou a ser igual a $\frac{4}{9}$. Em outubro, todos os alunos com apenas um torneio realizado no ano participaram de mais um.

O número de alunos dessa academia é igual a

a) 649.
b) 638.
c) 660.
d) 627.
e) 671.

Análise da questão

Assunto	Razão e proporção
Ideia central	A mesma constante de proporcionalidade descreve as participações iniciais e permite usar a razão posterior.
Estratégia	Represente as participações de abril por uma constante comum e incorpore os acréscimos de julho. Resolva a proporção e recupere a quantidade total de alunos.

Resolução comentada

1. Proporção de abril e julho

Em abril, cada aluno participou de um torneio. Escreva as quantidades de participações no RJ e em SP como $3k$ e $8k$. Após julho:

$$\frac{3k+45}{8k+25}=\frac{4}{9}$$

2. Determinação de k

$$9(3k+45)=4(8k+25)$$

$$27k+405=32k+100 \;\Rightarrow\; 5k=305 \;\Rightarrow\; k=61$$

3. Quantidade de alunos

$$N = 3k + 8k = 11k = 671$$

As participações de outubro completam os dois torneios por aluno e não alteram a quantidade de alunos.

RESPOSTA FINAL

671 alunos.

Alternativa (E).

QUESTÃO 19

Enunciado

19. (Espcex (Aman)) Um cilindro B tem 7cm de altura e a área de sua base mede o dobro da área da base de um cilindro A de altura 8cm. Sabendo que o volume do cilindro B excede o volume do cilindro A em 432π cm^3, a área da base do cilindro B é igual

a) 121π cm^2.
b) 144π cm^2.
c) 160π cm^2.
d) 196π cm^2.
e) 220π cm^2.

Análise da questão

Assunto	Cilindros
Ideia central	Tomar a área da base do cilindro B como incógnita transforma a diferença de volumes em uma equação linear.
Estratégia	Expresse as áreas das duas bases em função da área de B e multiplique cada uma pela respectiva altura. Use a diferença de volumes para encontrar diretamente a área pedida.

Resolução comentada

1. Áreas das bases e volumes

Seja X a área da base do cilindro B. Como ela é o dobro da área da base de A, a base de A tem área $\frac{X}{2}$. Pela fórmula volume igual à área da base vezes a altura:

$$V(B) = 7X, \quad V(A) = 8\left(\frac{X}{2}\right) = 4X$$

2. Diferença de volumes

A diferença de volumes é 432π cm³:

$$7X - 4X = 432\pi \Rightarrow 3X = 432\pi \Rightarrow X = 144\pi \ cm^2$$

RESPOSTA FINAL

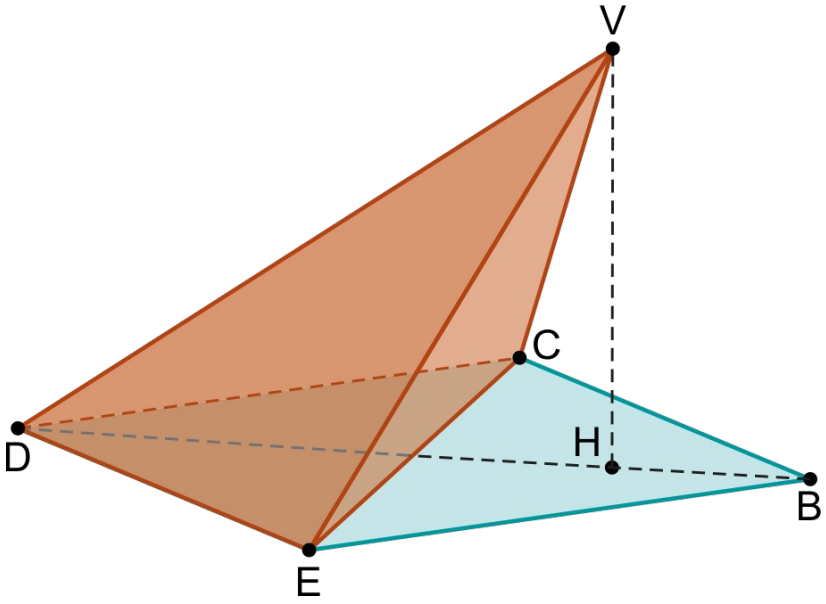
$$144\pi \ cm^2.$$

Alternativa (B).

QUESTÃO 20

Enunciado

20. (Espcex (Aman)) Os vértices da base de uma pirâmide VCDE estão sobre três vértices do quadrado BCDE. A projeção ortogonal do vértice V sobre o quadrado BCDE é o ponto $H \in BD$, tal que $HD = 3\,HB$, conforme mostra a figura.



Sabendo que o volume da pirâmide VCDE é igual a 192 cm³ e que a distância entre os pontos H e V é 2,25 vezes a distância entre os pontos H e B, a área da face VCE é:

a) $8\sqrt{99}\,cm^2$
b) $8\sqrt{96}\,cm^2$
c) $8\sqrt{97}\,cm^2$
d) $8\sqrt{93}\,cm^2$
e) $8\sqrt{91}\,cm^2$

Análise da questão

Assunto	Pirâmides
Ideia central	O volume determina o parâmetro das diagonais; a projeção ortogonal permite calcular a altura da face VCE.
Estratégia	Expresse as diagonais e a altura da pirâmide em função de HB e use o volume para determinar esse comprimento. Defina o centro do quadrado, justifique a altura da face pelas três perpendiculares e calcule a área.

Resolução comentada

1. Diagonais e parâmetro

Seja $t = HB$. Como $BH = \frac{HD}{3}$, temos $HD = 3t$ e $BD = 4t$. Como $BCDE$ é quadrado, suas diagonais são iguais e perpendiculares: $CE = BD = 4t$.

2. Área da base e volume

O triângulo CDE ocupa metade do quadrado. Sua área é:

$$S_{CDE} = \frac{BD \cdot CE}{4} = 4t^2$$

Da razão $\frac{HB}{HV} = \frac{4}{9}$, vem $HV = \frac{9t}{4}$. O volume da pirâmide é:

$$V_{V-CDE} = \frac{1}{3}\left(4t^2\right)\left(\frac{9t}{4}\right) = 3t^3 = 192$$

$$t^3 = 64 \;\Rightarrow\; t = 4 \;\; cm$$

3. Projeção da altura da face

Seja M o centro do quadrado, interseção de BD e CE. Temos $BM = \frac{BD}{2} = 2t$. Como H está entre B e M:

$$HM = BM - BH = t$$

4. Altura relativa a CE

O segmento HV é perpendicular ao plano da base, e HM é perpendicular a CE. Pelo teorema das três perpendiculares, VM é perpendicular a CE; portanto VM é a altura do triângulo VCE relativa a CE. Por Pitágoras no triângulo VHM:

$$VM = \sqrt{t^2 + \left(\frac{9t}{4}\right)^2} = \frac{t\sqrt{97}}{4}$$

5. Área e conferência numérica

A área da face é:

$$S_{VCE}=\frac{1}{2}(4t)\left(\frac{t\sqrt{97}}{4}\right)=\frac{t^2\sqrt{97}}{2}=8\sqrt{97}\ \ cm^2$$

Conferência: $HB=4$ cm, $HV=9$ cm, $HM=4$ cm, $CE=16$ cm e $VM=\sqrt{97}$ cm. Logo $\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\sqrt{97}=8\sqrt{97}$ cm².

Comentário do professor

VM é a altura do triângulo VCE relativa a CE, justificada pelas três perpendiculares. Trata-se de um comprimento, medido em cm.

RESPOSTA FINAL

$$8\sqrt{97}\ \ cm^2.$$

Alternativa (C).