



EDIÇÃO COMENTADA

FUVEST

Discursiva 2025

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

A prova articula sistemas lineares, probabilidade condicional, padrões aritméticos, matemática financeira, sequências e geometria espacial. Os itens avançam da modelagem direta para argumentos de invariância, divisibilidade e projeção.

6

questões discursivas

6

eixos de conteúdo

3

questões de maior complexidade

Q	Conteúdo principal	Nível sugerido
01	Sistemas lineares e modelagem	Intermediário
02	Probabilidade condicional e risco relativo	Básico–intermediário
03	Padrões aritméticos e invariância	Intermediário
04	Matemática financeira, PG e logaritmos	Avançado
05	Sequências e divisibilidade	Intermediário–avançado
06	Geometria espacial e projeções	Avançado

Como usar este material Resolva primeiro o caderno de questões sem consultar as soluções. Depois, compare o seu raciocínio com o gabarito comentado e registre os pontos que merecem revisão.

PARTE I

Caderno de questões

QUESTÃO 01

Uma papelaria oferece três promoções:

	Composição	Valor total (R\$)
Promoção I	2 cadernos de capa dura + 1 caixa de lápis de cor + 1 conjunto de canetas	86,00
Promoção II	3 cadernos de capa dura + 3 caixas de lápis de cor + 3 conjuntos de canetas	174,00
Promoção III	3 cadernos de capa dura + 2 caixas de lápis de cor + 2 conjuntos de canetas	142,00

Com base nessas informações, responda:

- Escreva um sistema de três equações cujas incógnitas C , L e N representam, respectivamente, os preços do caderno de capa dura, da caixa de lápis de cor e do conjunto de canetas.
- Considerando apenas as promoções II e III, qual é a soma dos preços da caixa de lápis de cor e do conjunto de canetas?
- A soma dos preços da caixa de lápis de cor e do conjunto de canetas é a mesma nas três promoções, e o valor dessa soma depende do preço do caderno de capa dura. Suponha que, em apenas duas promoções, o preço do caderno seja o mesmo e maior que essa soma. Nessas condições, quais promoções possuem o mesmo preço para o caderno?

QUESTÃO 02

O risco relativo (RR) compara as probabilidades condicionais de um evento ocorrer em um grupo exposto e em outro não exposto:

$$RR = \frac{P(\text{evento} \mid \text{exposto})}{P(\text{evento} \mid \text{não exposto})}.$$

Um grupo foi exposto, durante longo período, a um agente químico que pode representar fator de risco para determinada doença. Outro grupo não sofreu essa exposição. Os dados são apresentados na tabela:

Pessoas	Com a doença	Sem a doença	Total
Expostas	500	300	800
Não expostas	100	23.100	23.200
Total	600	23.400	24.000

Com base nesses dados, estime:

- a probabilidade de que um indivíduo qualquer desenvolva a doença;
- a probabilidade de que um indivíduo tenha sido exposto, dado que desenvolveu a doença;
- o risco relativo de que um indivíduo desenvolva a doença, dado que foi exposto ao agente químico.

QUESTÃO 03

Após uma atividade investigativa, estudantes observaram padrões em uma tabela com 10 colunas, na qual os números naturais estão dispostos sequencialmente a partir da primeira linha. A professora destacou o retângulo indicado:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Sejam S a soma dos elementos do retângulo e D o módulo da diferença entre os produtos dos elementos das diagonais. Para o retângulo destacado,

$$S = 6 + 7 + 16 + 17 = 46, \quad D = |7 \cdot 16 - 6 \cdot 17| = 10.$$

Se o retângulo for deslocado uma coluna para a direita, $S = 50$; se for deslocado uma linha para baixo, $S = 86$.

- Se o retângulo for deslocado n linhas para baixo, qual será o valor de S ?
- Nesse mesmo deslocamento, qual será o valor de D ?
- Considere agora uma tabela construída com n colunas, $n \geq 2$. Qual é o valor de D para um retângulo cujo menor elemento é k , com $k \neq pn$, $p \in \mathbb{N}$?

QUESTÃO 04

O sistema Price, também conhecido como Sistema Francês de Amortização, é muito utilizado em financiamentos. Sua principal característica é a constância das parcelas. O valor financiado é modelado por

$$V = \frac{P}{1+j} + \frac{P}{(1+j)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+j)^n} = \frac{P}{1+j} \left[1 + \frac{1}{1+j} + \cdots + \frac{1}{(1+j)^{n-1}} \right],$$

em que V é o valor financiado, j é a taxa mensal de juros, n é o número de parcelas e P é o valor de cada parcela.

Embora n represente uma quantidade inteira de parcelas, o modelo pode produzir valor não inteiro. Algumas calculadoras apresentam como resposta o menor inteiro maior que o valor obtido. Por exemplo, para $V = \text{R\$ } 19.000,00$, $j = 1\%$ ao mês e $P = \text{R\$ } 500,00$, a calculadora apresenta $n = 49$.

Note e adote: no item b), utilize, se necessário,

$$(1,01)^{-48} = 0,620260, \quad (1,01)^{-49} = 0,614119, \quad (1,01)^{-50} = 0,608039.$$

No item c), a resposta pode ser apresentada em função de logaritmo.

- Na ausência de juros, em quantas parcelas de R\$ 500,00 poderia ser quitado o financiamento de R\$ 19.000,00?
- Para taxa de 1% ao mês, parcelas de R\$ 500,00 e $n = 49$, calcule o valor financiado V pelo modelo.
- Admitindo que n não precise ser inteiro, determine n para um financiamento de R\$ 19.000,00, pago em parcelas de R\$ 500,00 à taxa de 1% ao mês.

QUESTÃO 05

Considere a sequência

$$k_n = \frac{n}{2^b}, \quad n, b \in \mathbb{N}^*.$$

- Para $b = 3$, (k_n) forma uma progressão. Indique se ela é aritmética ou geométrica e forneça sua razão.
- Se n é par e $b \leq 3$, qual é o número máximo de casas decimais de k_n ?
- Qual é o menor n , em função de b , para que $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ seja inteiro?

QUESTÃO 06

A partir do recorte de um quadrado de lado 10 m, um artista plástico produziu uma obra em metal, representada na Figura 1, cuja planificação é mostrada na Figura 2.

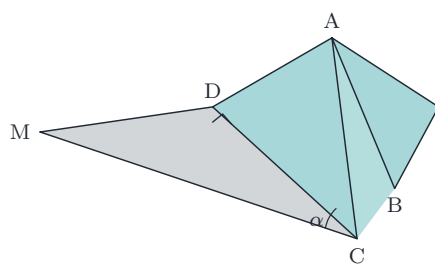


Figura 1

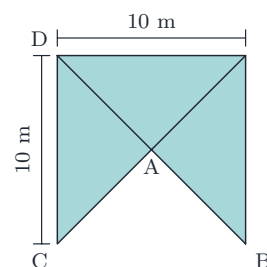


Figura 2

Observe as figuras e responda:

- Supondo que a área da sombra externa da escultura, representada pelo triângulo DMC , seja o dobro da área do triângulo DAC , determine o ângulo α indicado na Figura 1.
- Supondo que a área do triângulo DMC seja k vezes a área do triângulo DAC , determine k em função de α .
- Qual é a medida da projeção ortogonal do segmento AB no solo, se o ângulo desse segmento com o solo é 60° ?

PARTE II

Gabarito comentado

Cada solução explicita o assunto, a ideia central, a estratégia de resolução e a resposta final.

Solução da questão 1

Assunto Sistemas lineares e modelagem

Ideia central Representar cada promoção por uma equação e comparar os preços possíveis.

Estratégia Introduzir $k = L + N$, obter o preço do caderno em cada promoção e testar as igualdades sob a condição $C > k$.

a) O sistema é

$$\begin{cases} 2C + L + N = 86, \\ 3C + 3L + 3N = 174, \\ 3C + 2L + 2N = 142. \end{cases}$$

b) Subtraindo a terceira equação da segunda,

$$(3C + 3L + 3N) - (3C + 2L + 2N) = 174 - 142 \implies L + N = 32.$$

c) Seja $k = L + N$. Então

$$C_I = \frac{86 - k}{2}, \quad C_{II} = 58 - k, \quad C_{III} = \frac{142 - 2k}{3}.$$

As três comparações possíveis são:

$$\begin{aligned} C_I = C_{II} &\implies k = 30, & C_I = C_{II} &= 28 < 30; \\ C_{II} = C_{III} &\implies k = 32, & C_{II} = C_{III} &= 26 < 32; \\ C_I = C_{III} &\implies k = 26, & C_I = C_{III} &= 30 > 26. \end{aligned}$$

Somente a última igualdade satisfaz a condição de que o preço do caderno seja maior que $L + N$.

Resposta final a) sistema acima; b) R\$ 32,00; c) promoções I e III.

Solução da questão 2

Assunto Probabilidade condicional

Ideia central Calcular proporções na tabela e comparar os riscos dos dois grupos.

Estratégia Identificar corretamente o universo de cada probabilidade condicional e efetuar o quociente que define RR .

a) Há 600 pessoas com a doença entre 24.000 participantes:

$$P(\text{doença}) = \frac{600}{24\,000} = \frac{1}{40} = 2,5\%.$$

b) Entre as 600 pessoas que desenvolveram a doença, 500 foram expostas:

$$P(\text{exposto} \mid \text{doença}) = \frac{500}{600} = \frac{5}{6} \approx 83,33\%.$$

c) Nos grupos exposto e não exposto,

$$P(\text{doença} \mid \text{exposto}) = \frac{500}{800} = \frac{5}{8}, \quad P(\text{doença} \mid \text{não exposto}) = \frac{100}{23\,200} = \frac{1}{232}.$$

Logo,

$$RR = \frac{5/8}{1/232} = \frac{5}{8} \cdot 232 = 145.$$

O risco estimado no grupo exposto é 145 vezes o risco estimado no grupo não exposto.

Resposta final a) $\frac{1}{40} = 2,5\%$; b) $\frac{5}{6} \approx 83,33\%$; c) $RR = 145$.

Solução da questão 3

Assunto Padrões aritméticos e invariância

Ideia central Uma descida de linha acrescenta 10 a cada entrada, mas não altera a diferença entre os produtos diagonais.

Estratégia Representar as quatro entradas após o deslocamento e simplificar algebricamente a expressão de D .

a) Após descer n linhas, cada elemento aumenta $10n$. Portanto,

$$S = (6 + 10n) + (7 + 10n) + (16 + 10n) + (17 + 10n) = 46 + 40n.$$

b) Para o retângulo deslocado,

$$\begin{aligned} D &= |(7 + 10n)(16 + 10n) - (6 + 10n)(17 + 10n)| \\ &= |112 + 230n + 100n^2 - 102 - 230n - 100n^2| = 10. \end{aligned}$$

c) Em uma tabela com n colunas, o retângulo de menor entrada k é

k	$k + 1$
$k + n$	$k + n + 1$

e, assim,

$$\begin{aligned} D &= |(k + 1)(k + n) - k(k + n + 1)| \\ &= |k^2 + kn + k + n - k^2 - kn - k| = n. \end{aligned}$$

Resposta final a) $S = 46 + 40n$; b) $D = 10$; c) $D = n$.

Solução da questão 4

Assunto Matemática financeira, PG e logaritmos

Ideia central O valor financiado é o valor presente de uma progressão geométrica de parcelas.

Estratégia Somar a PG, substituir os dados e, no último item, isolar o expoente por logaritmos.

a) Sem juros,

$$n = \frac{19\,000}{500} = 38.$$

b) Com $j = 0,01$, $P = 500$ e $n = 49$,

$$\begin{aligned} V &= \frac{500}{1,01} + \frac{500}{1,01^2} + \cdots + \frac{500}{1,01^{49}} \\ &= 500 \frac{1 - (1,01)^{-49}}{0,01} = 500 \frac{1 - 0,614119}{0,01} = 19\,294,05. \end{aligned}$$

c) Para $V = 19\,000$,

$$\begin{aligned} 19\,000 &= 500 \frac{1 - (1,01)^{-n}}{0,01}, \\ 0,38 &= 1 - (1,01)^{-n}, \\ (1,01)^{-n} &= 0,62. \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos,

$$n = -\frac{\log(0,62)}{\log(1,01)} \approx 48,04.$$

Se o número de parcelas precisar ser inteiro, a calculadora arredonda para 49.

Resposta final a) 38 parcelas; b) $V = \text{R\$ } 19.294,05$; c) $n \approx 48,04$ no modelo, ou 49 parcelas inteiras.

Solução da questão 5

Assunto Sequências e divisibilidade

Ideia central A soma de k_1 a k_n depende da soma dos primeiros naturais e de uma potência de 2.

Estratégia Identificar a razão da PA, reduzir a fração para n par e usar divisibilidade por 2^{b+1} .

a) Para $b = 3$,

$$k_n = \frac{n}{8}, \quad k_{n+1} - k_n = \frac{n+1}{8} - \frac{n}{8} = \frac{1}{8}.$$

Logo, (k_n) é uma progressão aritmética de razão $1/8$.

b) Escrevendo $n = 2m$,

$$k_n = \frac{2m}{2^b} = \frac{m}{2^{b-1}}.$$

Para $b \leq 3$, o maior denominador possível na forma irredutível é $2^2 = 4$, que produz, no máximo, duas casas decimais.

c) Temos

$$k_1 + \dots + k_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{2^b} = \frac{n(n+1)}{2^{b+1}}.$$

Como n e $n+1$ são consecutivos, apenas um deles é par. Para que o quociente seja inteiro, esse fator par deve ser múltiplo de 2^{b+1} . O primeiro caso ocorre quando

$$n+1 = 2^{b+1} \implies n = 2^{b+1} - 1.$$

Resposta final a) PA de razão $\frac{1}{8}$; b) 2 casas decimais; c) $n = 2^{b+1} - 1$.

Solução da questão 6

Assunto Geometria espacial e projeções

Ideia central As áreas determinam a distância DM , enquanto a projeção ortogonal depende do comprimento de AB e do ângulo com o solo.

Estratégia Calcular as medidas na planificação, usar tangente no triângulo DMC e cosseno para a projeção de AB .

Na planificação, A é o centro do quadrado. Assim,

$$DA = CA = AB = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ m}, \quad [DAC] = \frac{(5\sqrt{2})^2}{2} = 25 \text{ m}^2.$$

a) Como $[DMC] = 2[DCA] = 50 \text{ m}^2$ e $DC = 10 \text{ m}$,

$$\frac{10 \cdot DM}{2} = 50 \implies DM = 10 \text{ m}.$$

No triângulo retângulo DMC ,

$$\tan \alpha = \frac{DM}{DC} = 1 \implies \alpha = 45^\circ.$$

b) Se $[DMC] = k[DCA]$, então

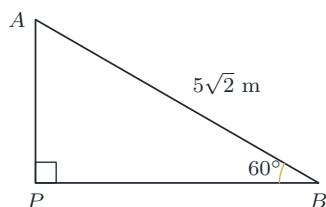
$$\frac{10 \cdot DM}{2} = 25k \implies DM = 5k.$$

Portanto,

$$\tan \alpha = \frac{DM}{DC} = \frac{k}{2} \implies k = 2 \tan \alpha.$$

c) Como $AB = 5\sqrt{2} \text{ m}$ e forma ângulo de 60° com o solo, sua projeção ortogonal mede

$$p = AB \cos 60^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m}.$$



Resposta final a) $\alpha = 45^\circ$; b) $k = 2 \tan \alpha$; c) $\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m}$.