



EDIÇÃO COMENTADA

# FUVEST

# Discursiva 2026

---

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

**PROF. YURI POLITANO**

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

## LEITURA ESTRATÉGICA

# Mapa da prova

A prova articula modelagem algébrica, probabilidade, porcentagens, trigonometria, geometria espacial e funções. Os itens avançam de aplicações diretas para situações que exigem generalização, interpretação geométrica e argumentação aritmética.

6

questões discursivas

6

eixos de conteúdo

2

questões de maior complexidade

| Q  | Conteúdo principal                        | Nível sugerido         |
|----|-------------------------------------------|------------------------|
| 01 | Probabilidade sem reposição e ordenação   | Básico–intermediário   |
| 02 | Sistemas lineares e modelagem             | Básico                 |
| 03 | Trigonometria e interpretação espacial    | Intermediário          |
| 04 | Porcentagens sucessivas e divisibilidade  | Intermediário–avanzado |
| 05 | Geometria espacial e projeções ortogonais | Avanzado               |
| 06 | Função modular e área entre gráficos      | Intermediário          |

**Como usar este material** Resolva primeiro o caderno de questões sem consultar as soluções. Depois, compare o seu raciocínio com o gabarito comentado e registre os pontos que merecem revisão.

## PARTE I

# Caderno de questões

## QUESTÃO 01

A palavra ARARA, para além da beleza da ave e de ser um palíndromo, é comumente utilizada em exercícios de análise combinatória e probabilidade, pois é formada por cinco letras, com apenas duas letras distintas. Supondo que as letras dessa palavra estejam em uma urna e que a retirada de cada uma delas seja equiprovável, responda:

- a) Qual é a probabilidade de sortear duas letras, sem reposição, formando a palavra AR, isto é, retirar primeiro a letra A e, em seguida, a letra R?
- b) Qual é a probabilidade de sortear cinco letras, sem reposição, e formar novamente a palavra ARARA?
- c) Suponha agora que as letras colocadas na urna sejam coloridas, como na figura. Qual é a probabilidade de sortear, sem reposição, as cinco letras que formam a palavra ARARA com a mesma coloração inicial?

A R A R A

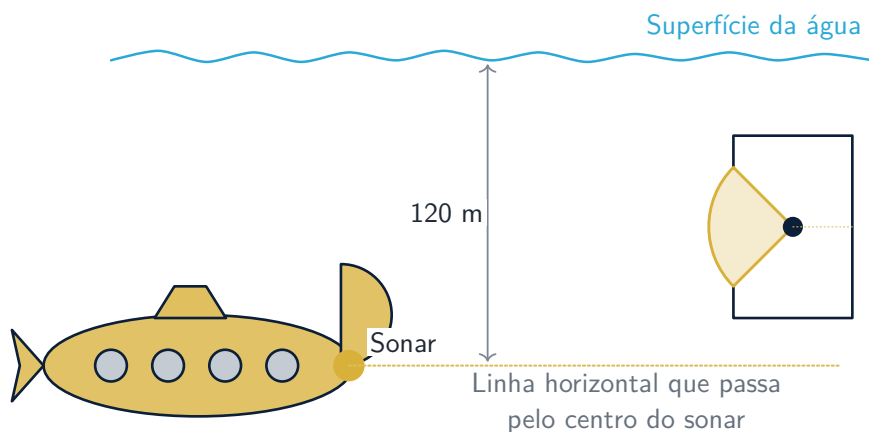
## QUESTÃO 02

Uma rede de supermercados vende dois tipos de frascos de determinado álcool, um com capacidade de 1 litro e outro de 2 litros. Em certo dia, um dos supermercados da rede vendeu um total de 50 frascos e arrecadou R\$ 320,00.

- a) Se o frasco de 1 litro custa R\$ 6,00 e o de 2 litros custa R\$ 10,00, quantos frascos de cada tipo foram vendidos?
- b) Suponha que, nesse dia, o supermercado tenha vendido 25 frascos de 1 litro pelo valor total de R\$ 125,00. Qual era o preço de cada frasco de 2 litros?
- c) Com a validade dos frascos de 2 litros próxima do vencimento, o supermercado anuncia uma promoção: cada frasco de 2 litros passa a custar o mesmo que o de 1 litro, ou seja, R\$ 6,00. É possível vender os mesmos 50 frascos e arrecadar R\$ 320,00? Justifique.

### QUESTÃO 03

Na parte frontal do casco de um submarino está localizado um sonar esférico de raio 3 m, utilizado para detectar objetos ao seu redor. O sonar emite ondas que se propagam em todas as direções, formando esferas cujo raio é igual à distância entre o centro do sonar e a superfície do objeto detectado. O centro do sonar está a 120 m de profundidade em relação à superfície da água.



- Qual é a distância mínima entre o centro do sonar e a superfície de um objeto para que ele seja detectado?
- Se o sonar detecta um objeto a 10 m de seu centro, em um ponto localizado a  $45^\circ$  acima da linha horizontal que passa pelo centro do sonar, qual é a profundidade do objeto em relação à superfície da água?
- Se o sonar detecta um objeto a 170 m de profundidade e a  $30^\circ$  abaixo da linha horizontal que passa pelo centro do sonar, qual é a distância do objeto ao centro do sonar?

### QUESTÃO 04

“Tudo por 50% do dobro” é uma frase conhecida sobre ofertas enganosas. Um produto que sofre aumento de 100%, passando a custar o dobro, precisa de desconto de 50% para voltar ao preço inicial. Com base nessa ideia, responda:

- Qual é o percentual de desconto necessário para que um produto reajustado em 50% volte ao preço original?
- Um produto que custa  $P$  é reajustado em  $x\%$  e, posteriormente, recebe desconto de  $y\%$ , voltando a custar  $P$ . Expresse  $y$  em função de  $x$ .
- Um produto recebe reajuste de  $m\%$  e, depois, desconto de  $n\%$ , voltando ao preço inicial. Considere  $m$  e  $n$  inteiros positivos. Qual é o menor valor de  $m$  para que  $n$  também seja inteiro?

Deseja-se instalar uma luminária a certa altura do teto. A luminária está posicionada no vértice  $P$  de uma pirâmide regular de base quadrada, inscrita em um cubo de lado 4 m. As projeções da luminária nos planos do teto e do chão são, respectivamente, os pontos  $R$  e  $Q$ , que coincidem com as interseções das diagonais dos quadrados  $DCGH$  e  $ABFE$ .



- Admitindo que as arestas laterais da pirâmide medem 3 m, a que distância a luminária está do chão?
- Supondo que as arestas laterais da pirâmide formem ângulo de  $45^\circ$  com o chão, qual é o comprimento de cada aresta lateral?
- Seja  $S$  a projeção ortogonal de  $P$  no plano do fundo do cubo. Qual é o comprimento da projeção da aresta  $PF$  no plano  $EFGH$ , se  $PQ = 2\sqrt{2}$  m?

Considere a função real modular

$$f(x) = \frac{|x|}{d}, \quad d > 0.$$

- Quais são os pontos de interseção da reta  $y = 1$  com o gráfico de  $f$ , para  $d = 1$ ?
- Qual é a área da região situada à direita do eixo  $Oy$ , abaixo da reta  $y = 2$  e acima do gráfico de  $f$ , para  $d = 2$ ?
- Qual é a área da região situada abaixo da reta  $y = d$  e acima do gráfico de  $f$ ?

## PARTE II

# Gabarito comentado

Cada solução explicita o assunto, a ideia central, a estratégia de resolução e a resposta final.

## Solução da questão 1

**Assunto** Probabilidade sem reposição

**Ideia central** Multiplicar probabilidades condicionais em retiradas sucessivas.

**Estratégia** Atualizar a composição da urna após cada retirada e respeitar a ordem exigida.

a) Há três letras A e duas letras R. Logo,

$$P(AR) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 30\%.$$

b) Para obter exatamente a sequência ARARA,

$$P(ARARA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10} = 10\%.$$

c) Com as cinco peças individualizadas pelas cores, existe apenas uma ordem favorável entre as  $5!$  ordens possíveis:

$$P = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \approx 0,833\%.$$

**Resposta final** a) 30%; b) 10%; c)  $\frac{1}{120} \approx 0,833\%$ .

## Solução da questão 2

**Assunto** Sistemas lineares

**Ideia central** Representar quantidade total e arrecadação por duas equações.

**Estratégia** Definir as incógnitas, montar o sistema e interpretar a solução no contexto.

Sejam  $x$  e  $y$  as quantidades de frascos de 1 litro e 2 litros, respectivamente.

a)

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 6x + 10y = 320. \end{cases}$$

Da primeira equação,  $x = 50 - y$ . Substituindo na segunda:

$$6(50 - y) + 10y = 320 \Rightarrow 300 + 4y = 320 \Rightarrow y = 5.$$

Assim,  $x = 45$ .

b) Foram vendidos 25 frascos de cada tipo. Se  $b$  é o preço do frasco de 2 litros,

$$125 + 25b = 320 \Rightarrow 25b = 195 \Rightarrow b = 7,80.$$

c) Se os dois tipos custam R\$ 6,00, qualquer conjunto de 50 frascos produz arrecadação

$$50 \cdot 6 = 300.$$

Portanto, não é possível arrecadar R\$ 320,00 nessas condições.

**Resposta final** a) 45 frascos de 1 L e 5 frascos de 2 L; b) R\$ 7,80; c) não é possível.

### Solução da questão 3

**Assunto** Trigonometria no triângulo retângulo

**Ideia central** Relacionar distância, inclinação e variação de profundidade.

**Estratégia** Projetar a distância na direção vertical por meio do seno do ângulo.

a) A menor distância possível é o próprio raio do sonar:

$$d_{\min} = 3 \text{ m.}$$

b) A componente vertical da distância de 10 m é

$$\Delta h = 10 \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ m.}$$

Como o objeto está acima da horizontal do centro do sonar, sua profundidade é

$$h = 120 - 5\sqrt{2} \approx 112,93 \text{ m.}$$

c) O objeto está  $170 - 120 = 50$  m abaixo da horizontal do sonar. Se  $d$  é a distância procurada,

$$d \sin 30^\circ = 50 \Rightarrow d \cdot \frac{1}{2} = 50 \Rightarrow d = 100 \text{ m.}$$



**Resposta final** a) 3 m; b)  $120 - 5\sqrt{2} \text{ m} \approx 112,93 \text{ m}$ ; c) 100 m.

## Solução da questão 4

**Assunto** Porcentagens sucessivas e divisibilidade

**Ideia central** Impor que o produto dos fatores de reajuste e desconto seja igual a 1.

**Estratégia** Obter  $y$  em função de  $x$  e analisar quando a expressão assume valor inteiro.

a) Se o preço inicial é  $P$ , depois do reajuste ele passa a  $1,5P$ . Para retornar a  $P$ ,

$$1,5P \left(1 - \frac{y}{100}\right) = P.$$

Logo,

$$1 - \frac{y}{100} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%.$$

b) A condição de retorno ao preço inicial é

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1.$$

Então,

$$y = 100 - \frac{10000}{100 + x} = \frac{100x}{100 + x}.$$

c) Escrevendo

$$n = \frac{100m}{100 + m} = 100 - \frac{10000}{100 + m},$$

vemos que  $n$  será inteiro quando  $100 + m$  dividir 10000. O menor divisor de 10000 maior que 100 é 125. Portanto,

$$100 + m = 125 \Rightarrow m = 25, \quad n = 100 - \frac{10000}{125} = 20.$$

**Resposta final** a)  $33\frac{1}{3}\%$ ; b)  $y = \frac{100x}{100 + x}$ ; c)  $m = 25$  e  $n = 20$ .

## Solução da questão 5

**Assunto** Geometria espacial e projeções

**Ideia central** Transformar as projeções da pirâmide em triângulos retângulos.

**Estratégia** Calcular as distâncias no quadrado e aplicar o teorema de Pitágoras.

No quadrado  $ABFE$ , de lado 4 m, a distância do centro  $Q$  a qualquer vértice é metade da diagonal:

$$QB = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ m.}$$

a) No triângulo retângulo  $PQB$ ,  $PB = 3$  m. Assim,

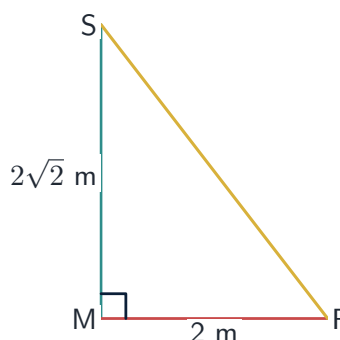
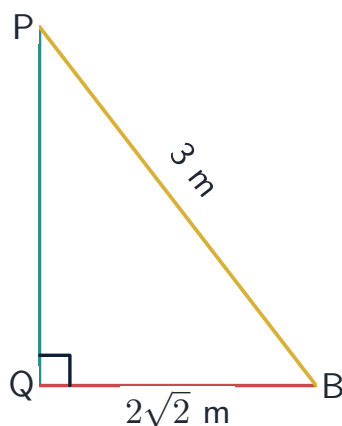
$$PQ^2 + (2\sqrt{2})^2 = 3^2 \Rightarrow PQ^2 = 1 \Rightarrow PQ = 1 \text{ m.}$$

b) Como  $PB$  forma  $45^\circ$  com o plano do chão, o triângulo  $PQB$  é retângulo isósceles. Logo, as duas medidas relevantes são

$$PQ = QB = 2\sqrt{2} \text{ m} \quad \text{e} \quad PB = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ m.}$$

c) A projeção ortogonal de  $Q$  sobre o plano  $EFGH$  é o ponto médio  $M$  de  $EF$ . Portanto,  $MF = 2$  m. Além disso,  $SM = PQ = 2\sqrt{2}$  m. No triângulo retângulo  $SMF$ ,

$$SF = \sqrt{SM^2 + MF^2} = \sqrt{8 + 4} = 2\sqrt{3} \text{ m.}$$



**Resposta final** a) 1 m; b) 4 m; c)  $2\sqrt{3}$  m.

## Solução da questão 6

**Assunto** Função modular e áreas

**Ideia central** Determinar as interseções do gráfico de  $|x|/d$  com retas horizontais.

**Estratégia** Identificar as regiões triangulares e calcular suas bases e alturas.

a) Para  $d = 1$ , temos  $f(x) = |x|$ . As interseções com  $y = 1$  satisfazem

$$|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Logo, os pontos são  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ .

b) Para  $d = 2$ , no semieixo positivo,  $f(x) = x/2$ . A interseção com  $y = 2$  ocorre em  $x = 4$ . A região tem a forma de um triângulo retângulo de catetos 4 e 2:

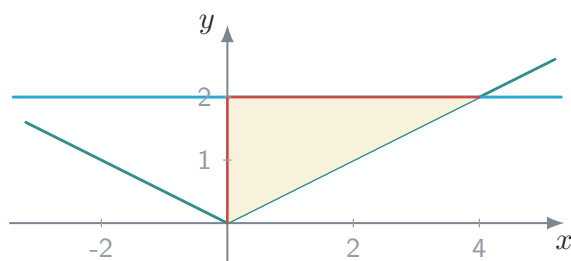
$$A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$

c) As interseções de  $y = d$  com o gráfico satisfazem

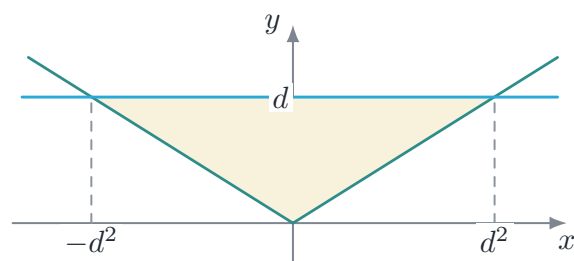
$$\frac{|x|}{d} = d \Rightarrow |x| = d^2 \Rightarrow x = \pm d^2.$$

A região triangular tem base  $2d^2$  e altura  $d$ . Portanto,

$$A = \frac{2d^2 \cdot d}{2} = d^3.$$



Região do item b, para  $d = 2$ .



Região geral do item c.

**Resposta final** a)  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ ; b) 4 unidades de área; c)  $d^3$  unidades de área.