EDIÇÃO COMENTADA

IME
Discursiva 2027

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

Matemática — Prova discursiva (2ª fase, dia 1), questões 1 a 10

10
questões discursivas

10
assuntos no mapa

1
gabarito comentado

Questão	Assunto
01	Raízes da unidade e áreas
02	Raízes da unidade e probabilidade
03	Série geométrica e desigualdades
04	Relações de Girard
05	Progressões e logaritmos
06	Permutações e probabilidade
07	Combinatória e matrizes
08	Identidades trigonométricas
09	Geometria analítica: elipse
10	Prismas e esferas

Como usar este material

Em cada questão, resolva o enunciado antes de consultar a análise e a resolução comentada. Use o mapa para revisar os assuntos e confira a resposta final ao terminar. Este material é um comentário do professor, não o gabarito oficial da banca.

Atenção — questão 5

Na questão 5, o valor impresso no caderno da banca (5540) conduz a uma equação cuja única solução real não é um número de forma simples. Apresentamos a caracterização exata da resposta para o enunciado impresso e, em ressalva destacada, a hipótese de errata (5440) com a resolução pretendida. Verifique a questão 5.

QUESTÃO 1

Enunciado

Sejam z_0, z_1, …, z_{11} as doze raízes complexas da equação $z^{12} = 1$, representadas no plano de Argand-Gauss. O hexágono regular $\mathcal{P}$ tem por vértices as raízes de índice par, e o hexágono regular $\mathcal{I}$ as de índice ímpar. Determine a área da região coberta pela união $\mathcal{P} \cup \mathcal{I}$.

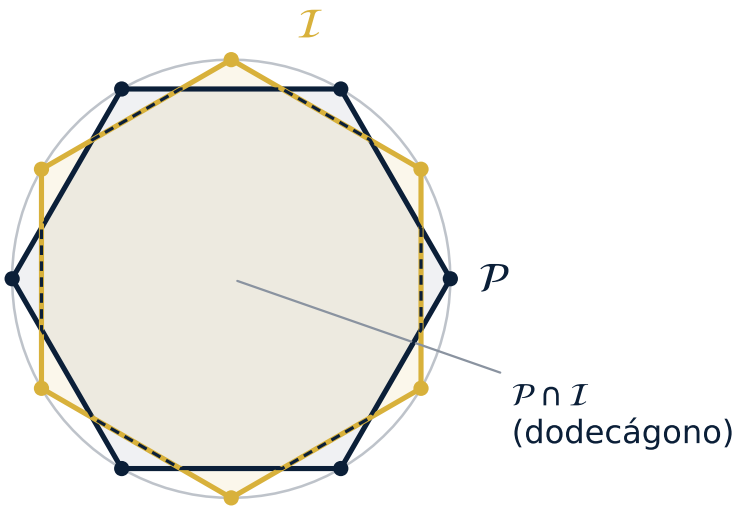
Análise da questão

Assunto	Números complexos: raízes da unidade; áreas de polígonos regulares
Ideia central	Os dois hexágonos regulares estão inscritos na circunferência unitária, girados de 30° um em relação ao outro; a união se calcula por inclusão-exclusão.
Estratégia	Some as áreas dos hexágonos e subtraia a interseção, que é um dodecágono regular circunscrito à circunferência de raio igual ao apótema.

Resolução comentada

1. Os dois hexágonos

As raízes são $z_k = \operatorname{cis} \dfrac{k\pi}{6}$, $k = 0, 1, \ldots, 11$, todas sobre a circunferência unitária. Os vértices de $\mathcal{P}$ estão nos ângulos $0°, 60°, \ldots, 300°$ e os de $\mathcal{I}$ em $30°, 90°, \ldots, 330°$: dois hexágonos regulares de lado 1 (a corda de 60° no círculo unitário mede 1), um girado de 30° em relação ao outro.



2. Área de cada hexágono

$$A_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{I}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3. A interseção é um dodecágono regular

Cada lado dos hexágonos está à distância $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ da origem (o apótema), e as normais aos doze lados apontam nas direções $0°, 30°, 60°, \ldots$ Logo $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ é o dodecágono regular circunscrito à circunferência de raio $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, cuja área é

$$A_{\cap} = 12\, a^2 \operatorname{tg} 15° = 12 \cdot \frac{3}{4}\,(2 - \sqrt{3}) = 18 - 9\sqrt{3},$$

pois $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = 2 - \sqrt{3}$.

4. Inclusão-exclusão

$$A_{\mathcal{P}\cup\mathcal{I}} = A_{\mathcal{P}} + A_{\mathcal{I}} - A_{\cap} = 3\sqrt{3} - (18 - 9\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} - 18$$

Comentário do professor

A figura é a conhecida estrela de doze pontas. Reconhecer o dodecágono regular na interseção evita o caminho trabalhoso das coordenadas: basta o apótema e a tangente de 15°.

RESPOSTA FINAL

$$A_{\mathcal{P}\cup\mathcal{I}} = 12\sqrt{3} - 18 = 6\,(2\sqrt{3} - 3) \text{ u.a.}$$

QUESTÃO 2

Enunciado

Seja a equação abaixo, onde $z \in \mathbb{C}$

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$$

Ao escolher ao acaso uma raiz qualquer dessa equação, qual a probabilidade dela satisfazer a inequação abaixo?

$$\left| z - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Análise da questão

Assunto	Equações algébricas: raízes da unidade; probabilidade
Ideia central	As raízes da equação são as raízes sextas da unidade, exceto 1; a inequação se traduz em uma condição simples sobre a parte real.
Estratégia	Fatore $z^6 - 1$, use $\lvert z\rvert = 1$ para reescrever a inequação como $\operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$ e conte as raízes favoráveis.

Resolução comentada

1. As raízes da equação

Multiplicando por $z-1$, vemos que as raízes de $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ são as raízes de $z^6=1$ diferentes de 1, ou seja,

$$z_k = \operatorname{cis}\frac{k\pi}{3}, \qquad k=1,2,3,4,5,$$

cinco pontos da circunferência unitária.

2. O que a inequação pede

Elevando ao quadrado e usando $|z|=1$:

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|^2 = |z|^2 - 3\operatorname{Re}(z) + \frac{9}{4} \le \frac{7}{4} \iff \operatorname{Re}(z) \ge \frac{1}{2}$$

Geometricamente, a região é o círculo fechado de centro $\frac{3}{2}$ e raio $\frac{\sqrt{7}}{2}$; dentro dele ficam exatamente as duas raízes mais à direita.

3. Contagem

As partes reais são $\cos\frac{k\pi}{3}$: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ✓, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 180^\circ = -1$, $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$ ✓. Satisfazem z_1 e z_5: dois casos favoráveis em cinco.

$$P = \frac{2}{5}$$

Comentário do professor

A identidade $|z-a|^2 = |z|^2 - 2a\operatorname{Re}(z) + a^2$ converte a geometria em uma desigualdade sobre a parte real — o atalho que dispensa o desenho (embora o desenho confirme o resultado de imediato).

RESPOSTA FINAL

$$P = \frac{2}{5}$$

QUESTÃO 3

Enunciado

Para cada número inteiro positivo n, seja $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; x \le -\dfrac{1}{n} \\ 1, & \text{se } \; -\dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$

Seja, ainda, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n(x)}{3} \right)^n$$

Determine o menor valor inteiro de x para o qual

$$f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \geq 0{,}999$$

Análise da questão

Assunto	Sequências e séries: série geométrica; desigualdades exponenciais
Ideia central	Para cada x, as funções g_n funcionam como chaves que ligam os termos da série um a um; a soma é sempre uma soma geométrica de razão $\frac{1}{3}$, finita ou infinita.
Estratégia	Descarte $x = 0$ e $x < 0$; para x inteiro positivo, compute $f(x) = \frac{1}{2}$ e $f(-\frac{1}{x})$ como soma finita até $n = x - 1$ e resolva a desigualdade em 3^{x-1}.

Resolução comentada

1. Restrições iniciais

O termo $-\frac{1}{x}$ exige $x \neq 0$. Se $x \leq -1$, então $x \leq -\frac{1}{n}$ para todo n, logo $g_n(x) = 0$ para todo n e $f(x) = 0$; como $-\frac{1}{x} > 0$, temos $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$ (pelo passo 2) e a soma vale $\frac{1}{2} < 0{,}999$. Resta x inteiro positivo.

2. Valor de f(x) para x positivo

Se $x > 0$, então $x > -\frac{1}{n}$ para todo n, logo $g_n(x) = 1$ para todo n e a série é geométrica infinita:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

3. Valor de f(−1/x) para x inteiro positivo

Para $y = -\frac{1}{x} < 0$, temos $g_n(y) = 1 \iff -\frac{1}{x} > -\frac{1}{n} \iff \frac{1}{x} < \frac{1}{n} \iff n < x$. Sendo x inteiro, n percorre $1, 2, \ldots, x-1$ e a soma é finita:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{x-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} - \sum_{n=x}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

4. A desigualdade

$$f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq 0{,}999 \iff 3^{x-1} \geq 500$$

Como $3^5 = 243 < 500 \leq 729 = 3^6$, precisamos de $x - 1 \geq 6$, isto é, $x \geq 7$.

5. Verificação

Para $x = 7$: $f(7) + f\left(-\frac{1}{7}\right) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3^6} = 1 - \frac{1}{1458} \approx 0{,}99931 \geq 0{,}999$ ✓. Para $x = 6$: $1 - \frac{1}{2 \cdot 3^5} = 1 - \frac{1}{486} \approx 0{,}99794 < 0{,}999$ ×.

Comentário do professor

A questão é um exercício de leitura da definição: a chave g_n liga a série exatamente nos índices que superam o limiar $-\frac{1}{n}$. Separar os sinais de x logo no início evita contas em vão.

RESPOSTA FINAL

$$x = 7$$

QUESTÃO 4

Enunciado

Determine o valor de

$$(y_1 + x_1)(y_1 + x_2)(y_2 + x_1)(y_2 + x_2)(y_3 + x_1)(y_3 + x_2)$$

em que (y_1, y_2, y_3) e (x_1, x_2) são respetivamente as raízes das equações $y^3 - 4y - 2 = 0$ e $x^2 - 7x - 3 = 0$.

Análise da questão

Assunto	Polinômios: relações de Girard
Ideia central	Agrupando os fatores por x_j, cada produto sobre as raízes y_i é o polinômio y^3-4y-2 avaliado em $-x_j$; o resto é reduzir pela equação do segundo grau.
Estratégia	Use a fatoração em raízes para obter $\prod_i (y_i + x) = x^3 - 4x + 2$, reduza x_j^3 com $x_j^2 = 7x_j + 3$ e feche com $x_1 + x_2 = 7$ e $x_1 x_2 = -3$.

Resolução comentada

1. Produto sobre as raízes

Da fatoração $y^3 - 4y - 2 = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$, fazendo $y = -x$:

$$(-x)^3 - 4(-x) - 2 = -(x + y_1)(x + y_2)(x + y_3) \implies \prod_{i=1}^{3} (y_i + x) = x^3 - 4x + 2$$

2. Produto total

$$\prod_{j=1}^{2} \prod_{i=1}^{3} (y_i + x_j) = (x_1^3 - 4x_1 + 2)\,(x_2^3 - 4x_2 + 2)$$

3. Redução das potências

Como $x_j^2 = 7x_j + 3$, temos $x_j^3 = 7x_j^2 + 3x_j = 7(7x_j + 3) + 3x_j = 52x_j + 21$, logo

$$x_j^3 - 4x_j + 2 = 48x_j + 23$$

4. Relações de Girard

De $x^2 - 7x - 3 = 0$: $x_1 + x_2 = 7$ e $x_1 x_2 = -3$. Assim, o produto vale

$$(48x_1 + 23)(48x_2 + 23) = 48^2\, x_1 x_2 + 48 \cdot 23\,(x_1 + x_2) + 23^2$$

$$2304 \cdot (-3) + 1104 \cdot 7 + 529 = -6912 + 7728 + 529 = 1345$$

Comentário do professor

Cada fator cúbico vira uma expressão do primeiro grau depois da redução pela equação quadrática — as relações de Girard só entram na última linha, com números pequenos. Registre-se que o enunciado traz a grafia “respetivamente”, fiel ao caderno da banca.

RESPOSTA FINAL

$$1345$$

QUESTÃO 5

Enunciado

Sejam x_1, x_2, …, x_9 números reais positivos tais que $\log_2 x_1$, $\log_2 x_2$, …, $\log_2 x_9$ formam uma progressão aritmética de razão positiva. Sabe-se que $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \cdot x_9 = 2^{45}$ e que $x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 5540$. Determine $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9$.

Análise da questão

Assunto	Progressões: PA e PG; logaritmos
Ideia central	Os logaritmos em PA equivalem aos termos em PG; o produto dos termos de índice ímpar fixa o termo central x_5.
Estratégia	Escreva a soma dos pares em função de x_5 e de $u = q + \frac{1}{q}$; a equação resultante é palindrômica e vira uma cúbica em u.

Resolução comentada

1. Da PA à PG

Sendo $a_i = \log_2 x_i$ uma PA de razão $r > 0$, temos $x_i = 2^{a_i}$: a sequência (x_i) é uma PG de razão $q = 2^r > 1$.

2. O produto fixa o termo central

Os termos ímpares formam a PG x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, de razão q^2 e termo central x_5. Termos equidistantes do central têm produto constante: $x_1 x_9 = x_3 x_7 = x_5^2$. Logo

$$x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 = x_5^5 = 2^{45} \implies x_5 = 2^9 = 512$$

3. A soma dos pares em função de u = q + 1/q

Escrevendo cada termo par a partir de x_5: $x_2+x_8 = x_5\left(q^{-3}+q^3\right)$ e $x_4+x_6 = x_5\left(q^{-1}+q\right)$. Com $u = q+\frac{1}{q}$, vale $q^3+q^{-3} = u^3-3u$, e portanto

$$x_5\left(u^3-3u+u\right) = 5540 \implies 512\left(u^3-2u\right) = 5540 \implies 128\,u^3-256\,u-1385 = 0$$

4. A resposta como polinômio em u

Analogamente, a soma pedida é $S = x_5\left(q^{-4}+q^{-2}+1+q^2+q^4\right)$. Como $q^2+q^{-2} = u^2-2$ e $q^4+q^{-4} = u^4-4u^2+2$, segue $S = 512\left(u^4-3u^2+1\right)$ e, usando $u^3 = 2u+\frac{1385}{128}$ para reduzir $u^4 = 2u^2+\frac{1385}{128}u$:

$$\boxed{S = 512+5540\,u-512\,u^2}, \qquad u \text{ única raiz real de } 128u^3-256u-1385 = 0$$

5. Existência, unicidade e valor numérico

Seja $h(u) = 128u^3-256u-1385$. Nos pontos estacionários $u = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, temos $h\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx -1245{,}7$ e $h\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx -1524{,}3$: como o maior dos dois valores extremos é negativo, h tem uma única raiz real. Além disso $h(2) = -873 < 0 < 1303 = h(3)$ e h é crescente para $u > \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $u \in (2,3)$ e a raiz determina um único $q = \frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2} > 1$. Numericamente:

$$u \approx 2{,}51160, \qquad q \approx 2{,}01543, \qquad S \approx 11\,196{,}50$$

A raiz também admite a forma de Cardano $u = \sqrt[3]{\frac{1385}{256}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{\frac{1385}{256}-\sqrt{\Delta}}$, com $\Delta = \left(\frac{1385}{256}\right)^2-\frac{8}{27}$, mas ela não se simplifica: $1385 = 5\cdot 277$ e o teste da raiz racional mostra que a cúbica não tem raiz racional (o candidato natural $u = \frac{5}{2}$ daria $128u^3-256u = 1360 \neq 1385$).

RESSALVA — HIPÓTESE DE ERRATA (NÃO É CORREÇÃO OFICIAL)

Ressalva — hipótese de errata (não é correção oficial). O valor impresso no caderno da banca é 5540, conferido no PDF oficial (inscricoes.ime.eb.br). Com 5540, a resposta é a caracterização exata acima — legítima, mas sem a forma simples que se espera do comando "Determine" em uma questão de valor 1,0. A equipe de Matemática do Poliedro registra a mesma suspeita de erro de digitação: se a soma dos termos pares fosse 5440, a equação seria $u^3-2u = \frac{85}{8}$, ou $8u^3-16u-85 = (2u-5)(4u^2+10u+17) = 0$, cuja única raiz real é $u = \frac{5}{2}$ (o fator quadrático tem discriminante $-172 < 0$). Daí $q+\frac{1}{q} = \frac{5}{2}$ com $q > 1$ dá $q = 2$, $x_1 = \frac{512}{2^4} = 32$ e $S = 32+128+512+2048+8192 = 10\,912$. Até a publicação deste comentário, não localizamos errata da banca; convém reconferir o gabarito oficial.

Comentário do professor

A leitura $a_i = \log_2 x_i$ transforma PA em PG — é o primeiro movimento de quase toda questão que mistura os dois assuntos. O produto ímpar travar x_5 é o segundo; a partir daí, a conta é série geométrica com a substituição $u = q+\frac{1}{q}$, padrão para equações palindrômicas.

RESPOSTA FINAL

Com o enunciado impresso (5540): $S = 512+5540\,u-512\,u^2$, onde u é a única raiz real de $128u^3-256u-1385 = 0$; numericamente $S \approx 11\,196{,}50$.
Sob a hipótese de errata (5440): $S = 10\,912$.

QUESTÃO 6

Enunciado

Seja $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Escolhe-se ao acaso uma função bijetora $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Sabendo-se que $f^{(9)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (9 vezes), qual a probabilidade de que $f^{(9)}(1) = 1$?

Análise da questão

Assunto	Análise combinatória: permutações em ciclos; probabilidade
Ideia central	$f^{(9)}(1) = 1$ vale exatamente quando o ciclo da permutação que contém o elemento 1 tem comprimento divisor de 9.
Estratégia	Conte as permutações pelo comprimento do ciclo de 1: para cada comprimento fixo, a contagem é 8!.

Resolução comentada

1. O que a condição significa

Uma função bijetora $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é uma permutação, e toda permutação se decompõe em ciclos disjuntos. Se o ciclo que contém 1 tem comprimento d, então $f^{(k)}(1) = 1 \iff d \mid k$. Como $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $d \mid 9$, restam $d \in \{1, 3, 9\}$.

2. Contagem para comprimento fixo

Fixado o comprimento d do ciclo de 1: escolhemos os outros $d - 1$ elementos do ciclo ($\binom{8}{d-1}$ maneiras), ordenamo-los no ciclo ($(d-1)!$ maneiras) e permutamos livremente os $9 - d$ elementos restantes ($(9-d)!$ maneiras). O total é

$$\binom{8}{d-1}(d-1)!\,(9-d)! = \frac{8!}{(9-d)!}(9-d)! = 8!$$

independente de d.

3. Probabilidade

Os casos favoráveis somam $3 \cdot 8!$ (um para cada $d \in \{1, 3, 9\}$) e o total de bijeções é 9!:

$$P = \frac{3 \cdot 8!}{9!} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Comentário do professor

O fato de a contagem não depender do comprimento do ciclo é um clássico: em uma permutação aleatória de n elementos, o ciclo de um elemento fixo tem distribuição uniforme em $\{1, 2, \ldots, n\}$. Aqui só precisamos dos divisores de 9: 1, 3 e 9.

RESPOSTA FINAL

$$P = \frac{1}{3}$$

QUESTÃO 7

Enunciado

Considere m e n inteiros positivos, com $m > n$. Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times(n+2)}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{(n+2)\times 3}$ matrizes cujas entradas são dadas, respetivamente, pelas combinações

$$a_{1j} = \binom{m}{j-3}, \quad a_{2j} = \binom{m}{j-2}, \quad a_{3j} = \binom{m}{j-1}$$

com $1 \leq j \leq n+2$ e

$$b_{i1} = b_{i2} = \binom{n}{n+2-i}, \qquad b_{i3} = \binom{n+1}{n+2-i},$$

para $1 \leq i \leq n+2$. Em que $\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!\,(a-b)!}$ para a e b inteiros não-negativos, com $b \leq a$, e $\binom{a}{c} = 0$ para $c < 0$ ou $c > a$. Usando as propriedades relacionadas a combinações, mostre que, para $m = 2^{10}$ e $n = 10^3$, o traço de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é divisível por 1013.

Análise da questão

Assunto	Análise combinatória: binômio e identidade de Vandermonde; divisibilidade
Ideia central	Cada entrada da diagonal de $A \cdot B$ é uma soma de Vandermonde; o traço colapsa, por Stiefel, em um único binomial.
Estratégia	Compute c_{11}, c_{22}, c_{33} pela identidade de Vandermonde, aplique Stiefel duas vezes e compare os fatores de 1013 em numerador e denominador.

Resolução comentada

1. As entradas da diagonal

Com a convenção $\binom{a}{c} = 0$ para $c < 0$ ou $c > a$, todos os índices podem correr livremente. Cada entrada da diagonal de $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma soma de Vandermonde, $\sum_k \binom{m}{k}\binom{r}{s-k} = \binom{m+r}{s}$:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{n+2} \binom{m}{j-3}\binom{n}{n+2-j} = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{(n-1)-k} = \binom{m+n}{n-1}$$

$$c_{22} = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{m+n}{n}$$

$$c_{33} = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n+1}{(n+1)-k} = \binom{m+n+1}{n+1}$$

2. O traço colapsa por Stiefel

Pela relação de Stiefel, $\binom{m+n}{n-1} + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}$, e somando com c_{33}:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+2}{n+1}$$

3. Substituição dos valores

Com $m = 2^{10} = 1024$ e $n = 10^3 = 1000$: $m + n + 2 = 2026$ e $n + 1 = 1001$, donde

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \binom{2026}{1001} = \prod_{k=1}^{1001} \frac{2027 - k}{k}$$

4. Divisibilidade por 1013

1013 é primo (não é divisível por nenhum primo até $31 < \sqrt{1013}$). No produto acima, o numerador percorre $2026, 2025, \ldots, 1026$ e o denominador, $1, 2, \ldots, 1001$. O único fator do numerador divisível por 1013 é $2026 = 2 \cdot 1013$ (o múltiplo anterior, 1013, é menor que 1026), e nenhum fator do denominador é divisível por 1013. Como o binomial é inteiro e o fator 1013 do numerador não é cancelado, conclui-se que $1013 \mid \operatorname{tr}(\mathbf{AB})$.

Comentário do professor

A questão é uma joia de montagem: as três somas de Vandermonde estão deslocadas por 1, justamente para que dois Stiefel em sequência compactem tudo em $\binom{2026}{1001}$ — e $2026 = 2 \cdot 1013$ entrega a divisibilidade. Escolha da banca: o ano da prova é o próprio 2026.

RESPOSTA FINAL

$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \binom{2026}{1001}$, divisível por 1013, como se queria demonstrar.

QUESTÃO 8

Enunciado

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\operatorname{sen}\alpha \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \cos(j\alpha) \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1$$

Mostre a identidade

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)\,\cos((n+1)\alpha)}$$

Análise da questão

Assunto	Trigonometria: prostaférese; somas telescópicas
Ideia central	O denominador, por prostaférese, vira produto; multiplicando pelo seno do arco metade, cada parcela vira uma diferença de tangentes.
Estratégia	Escreva $\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha = 2\cos(k+1)\alpha\cos k\alpha$ e use a identidade $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y}$ para telescopar.

Resolução comentada

1. Prostaférese no denominador

$$\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha = 2\cos\frac{(2k+2)\alpha}{2}\cos\frac{2k\alpha}{2} = 2\cos((k+1)\alpha)\,\cos(k\alpha)$$

As hipóteses garantem que nenhum denominador se anula (com $j=1$, $\cos\alpha \neq 0$).

2. A identidade que telescopa

Das fórmulas de subtração de arcos segue

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen} x\cos y - \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x\cos y} = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\,\cos y}$$

Com $x=(k+1)\alpha$ e $y=k\alpha$, temos $x-y=\alpha$ e portanto

$$\frac{1}{\cos\alpha+\cos(2k+1)\alpha} = \frac{1}{2\cos((k+1)\alpha)\cos(k\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}((k+1)\alpha)-\operatorname{tg}(k\alpha)}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

3. A soma telescópica

$$S_n = \frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha}\sum_{k=1}^{n}[\operatorname{tg}((k+1)\alpha)-\operatorname{tg}(k\alpha)] = \frac{\operatorname{tg}((n+1)\alpha)-\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

4. Fechamento

Usando novamente a identidade do passo 2, agora com $x=(n+1)\alpha$ e $y=\alpha$:

$$S_n = \frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\cos((n+1)\alpha)\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\cos((n+1)\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)\,\cos((n+1)\alpha)},$$

pois $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$, como se queria demonstrar.

Comentário do professor

Somas com produto de cossenos consecutivos no denominador pedem o mesmo gesto: multiplicar pelo seno da diferença dos arcos para abrir uma diferença de tangentes — identidade que merece lugar no caderno de fórmulas.

RESPOSTA FINAL

Identidade demonstrada para todo $n\in\mathbb{N}$: $S_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos((n+1)\alpha)}$.

QUESTÃO 9

Enunciado

A normal no ponto P da elipse

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

intercepta o eixo x no ponto Q. Se M é o ponto médio do segmento PQ, determine os pontos em que o lugar geométrico de M intersecta as retas $x = +c$ e $x = -c$, sabendo que $2c$ é a distância entre os focos da elipse dada.

Análise da questão

Assunto	Geometria analítica: normal à elipse; lugares geométricos
Ideia central	A normal em P corta o eixo x num ponto Q cuja abscissa é $\frac{3}{4}$ da de P; o ponto médio M percorre uma nova elipse, afastamento vertical da original.
Estratégia	Derive implicitamente para obter o coeficiente angular da normal, ache Q, escreva M em função de P e elimine P usando a equação da elipse.

Resolução comentada

1. Os focos

A elipse é $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$: semieixos $a = 4$ e $b = 2$, e $c^2 = a^2 - b^2 = 12$, donde $c = 2\sqrt{3}$. As retas são $x = \pm 2\sqrt{3}$.

2. A normal e o ponto Q

Seja $P = (x_0, y_0)$ com $y_0 \neq 0$. Derivando implicitamente $x^2 + 4y^2 = 16$: $2x + 8y\,y' = 0$, logo o coeficiente angular da tangente é $y' = -\dfrac{x_0}{4y_0}$ e o da normal, $\dfrac{4y_0}{x_0}$. A reta normal é

$$y - y_0 = \frac{4y_0}{x_0}\,(x - x_0)$$

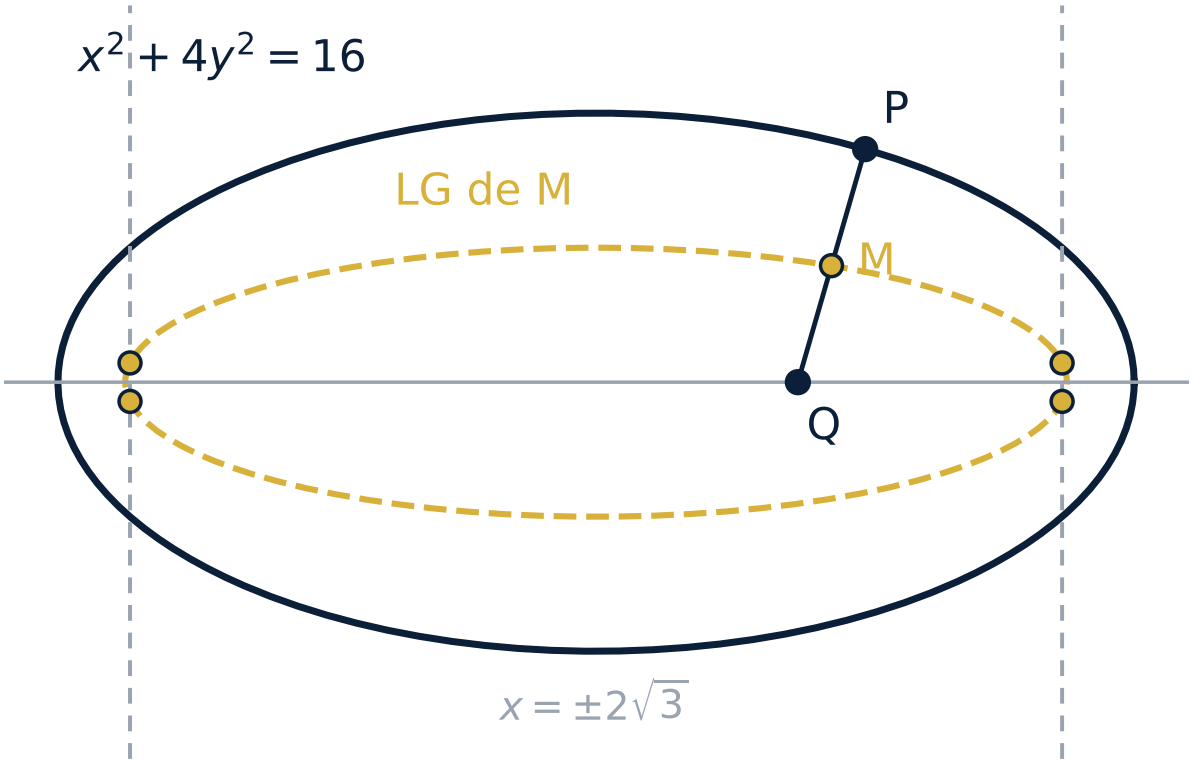
Fazendo $y = 0$: $-x_0 = 4\,(x - x_0)$, donde $x = \dfrac{3x_0}{4}$ e $Q = \left(\dfrac{3x_0}{4}, 0\right)$.

3. O lugar geométrico de M

O ponto médio é $M = \left(\dfrac{x_0 + \frac{3x_0}{4}}{2}, \dfrac{y_0}{2}\right) = \left(\dfrac{7x_0}{8}, \dfrac{y_0}{2}\right)$. Escrevendo $M = (x, y)$: $x_0 = \dfrac{8x}{7}$ e $y_0 = 2y$. Substituindo na equação da elipse:

$$\left(\frac{8x}{7}\right)^2 + 4\,(2y)^2 = 16 \implies \frac{4x^2}{49} + y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

uma elipse de semieixos $\frac{7}{2}$ e 1 (os pontos com $y_0 = 0$ correspondem à normal degenerada no eixo x e não afetam o que segue).



4. Interseção com as retas $x = \pm 2\sqrt{3}$

$$\frac{4 \cdot 12}{49} + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - \frac{48}{49} = \frac{1}{49} \implies y = \pm\frac{1}{7}$$

Comentário do professor

O fator $\frac{3}{4}$ na abscissa de Q é caso particular de uma fórmula geral: na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a normal corta o eixo maior em $Q = \left(\frac{c^2}{a^2}x_0, 0\right)$ — aqui $\frac{c^2}{a^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$. E o lugar geométrico é a imagem da elipse pela afinidade $(x_0, y_0) \mapsto \left(\frac{7x_0}{8}, \frac{y_0}{2}\right)$ — por isso ainda é uma elipse.

RESPOSTA FINAL

Os quatro pontos $\left(2\sqrt{3},\ \frac{1}{7}\right)$, $\left(2\sqrt{3},\ -\frac{1}{7}\right)$, $\left(-2\sqrt{3},\ \frac{1}{7}\right)$ e $\left(-2\sqrt{3},\ -\frac{1}{7}\right)$.

QUESTÃO 10

Enunciado

Considere um prisma quadrangular reto, completamente contido em uma esfera $\mathcal{S}$ de raio 6 cm. Sabe-se que os quatro vértices de uma das faces do prisma pertencem à superfície da esfera $\mathcal{S}$. Determine:

(a) o volume máximo que esse prisma pode assumir;

(b) a altura e as dimensões da base do prisma correspondentes a esse volume máximo.

Análise da questão

Assunto	Geometria espacial: prisma inscrito em esfera; otimização por MA-MG
Ideia central	A face com os quatro vértices na esfera está inscrita num círculo da esfera; o volume cresce quando a base é o quadrado inscrito e a altura atravessa a esfera até a face oposta também se apoiar na superfície.
Estratégia	Mostre que o prisma de volume máximo é o paralelepípedo retângulo inscrito, depois maximize $V^2 = a^2b^2(144 - a^2 - b^2)$ pela desigualdade das médias.

Resolução comentada

1. Redução ao paralelepípedo inscrito

Seja π o plano da face F cujos quatro vértices estão na esfera. A interseção $\pi \cap \mathcal{S}$ é um círculo de raio r, e, sendo d a distância do centro O da esfera a π, vale $d^2 + r^2 = 36$. A face F é um quadrilátero inscrito nesse círculo; é clássico (quadrilátero cíclico de área máxima) que

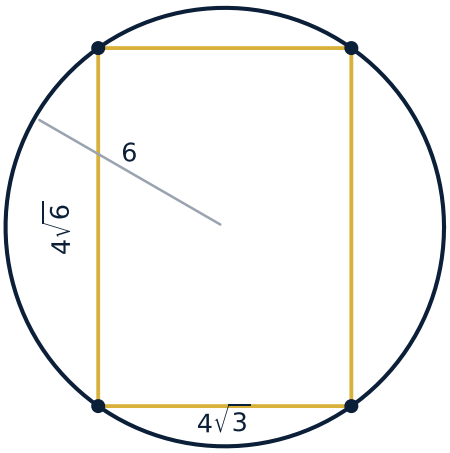
$$\text{área}(F) \leq 2r^2,$$

com igualdade exatamente quando F é o quadrado inscrito. Seja h a altura do prisma: a face oposta F' está num plano paralelo π', e seus vértices são as translações dos de F na direção perpendicular a π, ficando à mesma distância r do eixo por O perpendicular a π. Se d' é a distância (com sinal) de O a π', a contenção na esfera exige $(d')^2 + r^2 \leq 36 = d^2 + r^2$, isto é, $|d'| \leq d$. Logo

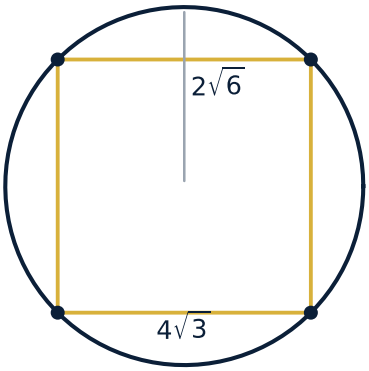
$$h \leq 2d,$$

com igualdade quando $d' = -d$: a face oposta também está apoiada na esfera, simétrica a F. Conclusão: o prisma de volume máximo é o paralelepípedo retângulo inscrito na esfera, com base quadrada.

Seção diagonal do cubo:
retângulo inscrito no círculo máximo



Seção horizontal pelo centro:
base quadrada do cubo inscrita



2. Otimização

Para o paralelepípedo retângulo de dimensões $a \times b \times h$ inscrito na esfera, a diagonal é o diâmetro: $a^2 + b^2 + h^2 = 12^2 = 144$. Queremos maximizar

$$V = a\,b\,h \iff V^2 = a^2b^2\,(144 - a^2 - b^2)$$

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica nas três parcelas a^2, b^2 e $144 - a^2 - b^2$:

$$V^2 \leq \left(\frac{a^2 + b^2 + (144 - a^2 - b^2)}{3}\right)^3 = 48^3 \implies V \leq 48^{3/2} = 192\sqrt{3}$$

3. O prisma ótimo

A igualdade na MA-MG exige $a^2 = b^2 = 144 - a^2 - b^2$, ou seja, $3a^2 = 144$, donde $a = b = 4\sqrt{3}$ e $h = \sqrt{144 - 2 \cdot 48} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$: as três dimensões são iguais — o prisma é um cubo. (Conferindo com o passo 1: $d = \frac{h}{2} = 2\sqrt{3}$, $r^2 = 36 - 12 = 24$ e o quadrado inscrito tem lado $r\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$ ✓.)

Comentário do professor

Duas maximizações empilhadas: primeiro a forma (quadrilátero cíclico → quadrado) e a posição (prisma → inscrito simétrico), depois o tamanho (MA-MG). O resultado — o cubo — é a resposta que a simetria do problema anunciava desde o início.

RESPOSTA FINAL

(a) $V_{máx} = 192\sqrt{3}$ cm^3; (b) altura $h = 4\sqrt{3}$ cm e base quadrada de lado $4\sqrt{3}$ cm — o prisma é um cubo de aresta $4\sqrt{3}$ cm.