

IME 2027 — Gabarito Comentado

POLITANO APROVA

IME 2027 — Gabarito Comentado

Matemática — Prova objetiva, questões 1 a 15

Professor Yuri Politano • Politano Aprova

QUESTÃO 1

Enunciado

Sejam n e m números naturais. Sabe-se que n vale 5621 na base numérica m e 1208 na base numérica $m + 5$. O valor de n é:

- (A) 2020
- (B) 2022
- (C) 2024
- (D) 2026
- (E) 2028

Análise da questão

Assunto	Sistemas de numeração
Ideia central	Representação de um mesmo número natural em duas bases distintas.
Estratégia	Estabelecer as restrições sobre as bases, converter os numerais para a base decimal e resolver a equação obtida.

Resolução comentada

1. Restrições sobre a base

Para que a escrita $(5621)_m$ faça sentido, todo algarismo deve ser menor que a base; o maior algarismo é 6, logo

$$m \geq 7.$$

Para $(1208)_{m+5}$, o maior algarismo é 8, o que exige

$$m + 5 \geq 9,$$

isto é, $m \geq 4$ — condição mais fraca.

Portanto, a restrição efetiva é

$$m \geq 7.$$

2. Equação em m

Escrevendo os dois numerais na base decimal:

$$n = 5m^3 + 6m^2 + 2m + 1. \quad (1)$$

$$n = 1 \cdot (m + 5)^3 + 2 \cdot (m + 5)^2 + 0 \cdot (m + 5) + 8. \quad (2)$$

Expandindo (2):

$$(m + 5)^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125,$$

$$2(m + 5)^2 = 2m^2 + 20m + 50,$$

logo

$$n = m^3 + 17m^2 + 95m + 183.$$

Igualando com (1):

$$5m^3 + 6m^2 + 2m + 1 = m^3 + 17m^2 + 95m + 183,$$

$$4m^3 - 11m^2 - 93m - 182 = 0. \quad (3)$$

3. Resolução da cúbica

Pelo teorema das raízes racionais, uma raiz inteira divide

$$182 = 2 \cdot 7 \cdot 13.$$

Testando $m = 7$:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 343 - 11 \cdot 49 - 93 \cdot 7 - 182 \\ &= 1372 - 539 - 651 - 182 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $m = 7$ é raiz e podemos fatorar:

$$4m^3 - 11m^2 - 93m - 182 = (m - 7)(4m^2 + 17m + 26).$$

O fator quadrático tem discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= 17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 26 \\ &= 289 - 416 \\ &= -127 < 0, \end{aligned}$$

portanto não possui raízes reais.

Assim, a única raiz real de (3) é

$$m = 7,$$

que satisfaz $m \geq 7$.

4. Cálculo de n

$$\begin{aligned}n &= 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 \\&= 1715 + 294 + 14 + 1 \\&= 2024.\end{aligned}$$

Conferindo na outra base ($m + 5 = 12$):

$$\begin{aligned}n &= 1 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12 + 8 \\&= 1728 + 288 + 0 + 8 \\&= 2024.\end{aligned}$$

Verificação confirmada.

Caminho alternativo

Como o algarismo 6 aparece em $(5621)_m$, temos $m \geq 7$. Além disso, $(5621)_m = 5m^3 + 6m^2 + 2m + 1$. Se $m \geq 8$, então $n \geq 5m^3 \geq 5 \cdot 8^3 = 2560$, maior que todas as alternativas propostas (a maior é 2028). Logo, para que n esteja entre as respostas, a única base possível é $m = 7$. Assim, $n = (5621)_7 = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = 2024$. A outra escrita confirma: $(1208)_{12} = 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 8 = 2024$. Alternativa (C).

Comentário do professor

O cuidado inicial deve ser com a validade dos algarismos em cada base. A condição $m \geq 7$ não determina a resposta, mas restringe o universo de soluções admissíveis. Encontrar $m = 7$ como raiz da cúbica não dispensa a verificação dos demais fatores e a substituição na segunda representação de n .

RESPOSTA FINAL

$$n = 2024 \quad (m = 7)$$

Alternativa (C).

QUESTÃO 2

Enunciado

Considere os conjuntos

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

e

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Quantas funções injetivas $f: X \rightarrow Y$ existem, tais que, para dois elementos previamente fixados x_i e $x_j \in X$,

$$|f(x_i) - f(x_j)| \neq 1?$$

- (A) 4800
- (B) 5040
- (C) 5880
- (D) 6480
- (E) 6720

Análise da questão

Assunto	Análise combinatória
Ideia central	Contagem de funções injetivas sujeitas a uma restrição entre as imagens de dois elementos fixados.
Estratégia	Contar todas as injeções e subtrair aquelas em que os dois elementos fixados possuem imagens consecutivas.

Resolução comentada

1. Total de funções injetivas

Uma função injetiva $f : X \rightarrow Y$, com

$$|X| = 5 \quad \text{e} \quad |Y| = 8,$$

corresponde a um arranjo de 5 elementos escolhidos entre 8:

$$\begin{aligned} N_{\text{total}} &= A_{8,5} \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 6720. \end{aligned}$$

2. Contagem do complementar

Contemos as injeções em que

$$|f(x_i) - f(x_j)| = 1,$$

com x_i, x_j fixados.

Escolha do par ordenado $(f(x_i), f(x_j))$:

Os pares de inteiros consecutivos em $\{1, \dots, 8\}$ são

$$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\},$$

isto é, 7 pares não ordenados.

Como x_i e x_j são posições distintas e fixadas, cada par gera 2 atribuições ordenadas:

$$7 \cdot 2 = 14$$

possibilidades.

Escolha das imagens dos 3 elementos restantes:

Sobram

$$8 - 2 = 6$$

valores em Y , e devemos distribuí-los injetivamente entre 3 elementos de X :

$$A_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Logo,

$$N_{\text{ruim}} = 14 \cdot 120 = 1680.$$

3. Resultado

$$\begin{aligned} N &= 6720 - 1680 \\ &= 5040. \end{aligned}$$

4. Verificação numérica

Verificação por força bruta: enumerando todas as 6720 permutações de 5 elementos tomados de Y , obtêm-se exatamente 5040 com

$$|f(x_1) - f(x_2)| \neq 1.$$

Caminho alternativo

Contagem direta dos pares não consecutivos

Em vez de contar todas as funções injetivas e retirar aquelas que não satisfazem a condição, podemos construir diretamente as funções admissíveis.

Inicialmente, devemos escolher as imagens dos dois elementos fixados x_i e x_j .

Considere dois números distintos $a, b \in Y$, com

$$a < b.$$

A restrição do problema exige

$$b - a \geq 2.$$

Para contar esses pares, utilizamos a transformação

$$(a, b) \mapsto (a, b - 1).$$

Como $b - a \geq 2$, temos

$$1 \leq a < b - 1 \leq 7.$$

Portanto, a quantidade de pares não ordenados de números não consecutivos em Y corresponde à quantidade de pares distintos escolhidos entre os números de 1 a 7:

$$\binom{7}{2} = 21.$$

Como x_i e x_j são elementos distintos e previamente fixados, cada par admite duas distribuições de suas imagens:

$$2 \binom{7}{2} = 42.$$

Restam três elementos de X , cujas imagens devem ser escolhidas injetivamente entre os seis valores ainda disponíveis de Y :

$$A_{6,3} = 120.$$

Pelo princípio multiplicativo,

$$\begin{aligned}
 N &= 2 \binom{7}{2} \cdot A_{6,3} \\
 &= 2 \cdot 21 \cdot 120 \\
 &= 5040.
 \end{aligned}$$

Assim, recuperamos diretamente o resultado:

$$N = 5040.$$

Comentário do professor

Os elementos x_i e x_j já estão fixados: não devemos escolher novamente dois elementos de X . Além disso, o par de imagens é ordenado, pois atribuir 3 a x_i e 5 a x_j produz uma função diferente daquela que inverte essas imagens. Essa distinção explica o fator 2 presente nas duas resoluções.

RESPOSTA FINAL

5040 funções

Alternativa (B).

QUESTÃO 3

Enunciado

O polinômio $P(x)$, de grau 3 e coeficientes reais, satisfaz a identidade

$$P(x) - P(x - 1) = x^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, e, além disso,

$$P(0) = 5.$$

O valor de $P(10)$ é:

- (A) 380
- (B) 385
- (C) 390
- (D) 395
- (E) 400

Análise da questão

Assunto	Polinômios e somatórios
Ideia central	Uma identidade envolvendo diferenças sucessivas de um polinômio permite recuperar a variação de seus valores por meio de uma soma telescópica.
Estratégia	Aplicar a identidade aos inteiros de 1 a 10, somar as igualdades e utilizar $P(0) = 5$. A determinação explícita de $P(x)$ confirma o resultado.

Resolução comentada

1. Solução por telescopagem

A identidade

$$P(k) - P(k-1) = k^2$$

vale para todo real, em particular para

$$k = 1, 2, \dots, 10.$$

Somando:

$$\sum_{k=1}^{10} [P(k) - P(k-1)] = \sum_{k=1}^{10} k^2.$$

O lado esquerdo é telescópico e vale

$$P(10) - P(0).$$

O lado direito é

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(10) &= P(0) + 385 \\ &= 5 + 385 \\ &= 390. \end{aligned}$$

Assim,

$$P(10) = 390.$$

2. Determinação explícita de P (confirmação)

Escreva

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Então

$$P(x) - P(x-1) = 3ax^2 + (-3a + 2b)x + (a - b + c).$$

Igualando a x^2 :

$$3a = 1,$$

$$-3a + 2b = 0,$$

$$a - b + c = 0,$$

o que dá

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}.$$

De $P(0) = 5$ vem

$$d = 5,$$

ou seja,

$$P(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + 5 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + 5.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(10) &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 5 \\ &= 385 + 5 \\ &= 390. \end{aligned}$$

Verificação confirmada.

Comentário do professor

O enunciado não exige a determinação de todos os coeficientes de P , mas apenas o valor de $P(10)$. A telescopagem evita esse trabalho: os termos intermediários se cancelam, restando somente $P(10) - P(0)$. A condição inicial fixa a constante que não poderia ser determinada apenas pelas diferenças sucessivas.

RESPOSTA FINAL

$$P(10) = 390$$

Alternativa (C).

QUESTÃO 4

Enunciado

Sejam $m \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{vmatrix} x^m & x^{m+2} & x^{m+4} \\ y^m & y^{m+2} & y^{m+4} \\ z^m & z^{m+2} & z^{m+4} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} \right),$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

O valor de m é:

- (A) -6
- (B) -4
- (C) -2
- (D) 2
- (E) 4

Análise da questão

Assunto	Determinantes e Vandermonde
Ideia central	Reconhecimento de um determinante de Vandermonde e comparação entre expressões algébricas que representam o mesmo produto.
Estratégia	Colocar as potências comuns em evidência nas linhas do determinante, fatorar o produto de Vandermonde e comparar as potências de xyz nos dois membros da identidade.

Resolução comentada

1. Lado esquerdo

Colocando x^m , y^m e z^m em evidência nas linhas 1, 2 e 3, respectivamente:

$$D = x^m y^m z^m \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & y^2 & y^4 \\ 1 & z^2 & z^4 \end{vmatrix}.$$

O determinante restante é um determinante de Vandermonde nas variáveis x^2, y^2, z^2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & y^2 & y^4 \\ 1 & z^2 & z^4 \end{vmatrix} = (y^2 - x^2)(z^2 - x^2)(z^2 - y^2).$$

Logo,

$$D = (xyz)^m (y^2 - x^2)(z^2 - x^2)(z^2 - y^2). \quad (1)$$

2. Lado direito

Temos

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2},$$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - z^2}{y^2 z^2},$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 - x^2}{x^2 z^2}.$$

Multiplicando:

$$E = \frac{(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{x^4 y^4 z^4}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) \\ &= [-(y^2 - x^2)][-(z^2 - y^2)](z^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(z^2 - x^2)(z^2 - y^2), \end{aligned}$$

ou seja, o mesmo produto de Vandermonde que aparece em (1).

Assim,

$$E = (xyz)^{-4} (y^2 - x^2) (z^2 - x^2) (z^2 - y^2). \quad (2)$$

3. Comparação

Comparando (1) e (2), e cancelando o fator de Vandermonde (não identicamente nulo, pois a igualdade deve valer para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, em particular para valores com x^2, y^2, z^2 distintos):

$$(xyz)^m = (xyz)^{-4}$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

Consequentemente,

$$m = -4.$$

4. Verificação numérica

Com

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

e

$$m = -4,$$

ambos os lados valem

$$\begin{aligned} \frac{(4-1)(9-1)(9-4)}{1^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4} &= \frac{120}{1296} \\ &= \frac{5}{54}. \end{aligned}$$

Verificação confirmada.

Caminho alternativo

Uma solução por homogeneidade

Podemos determinar o valor de m sem desenvolver o determinante e sem utilizar explicitamente a fórmula de Vandermonde.

A ideia consiste em observar como os dois membros da identidade se transformam quando multiplicamos simultaneamente x, y, z por um mesmo número real positivo t .

1. Grau de homogeneidade do determinante Considere

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^m & x^{m+2} & x^{m+4} \\ y^m & y^{m+2} & y^{m+4} \\ z^m & z^{m+2} & z^{m+4} \end{vmatrix}.$$

Ao substituir

$$(x, y, z) \mapsto (tx, ty, tz),$$

podemos colocar

$$t^m, \quad t^{m+2}, \quad t^{m+4}$$

em evidência nas três colunas, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} D(tx, ty, tz) &= t^m \cdot t^{m+2} \cdot t^{m+4} D(x, y, z) \\ &= t^{3m+6} D(x, y, z). \end{aligned}$$

Portanto, o determinante é homogêneo de grau

$$3m + 6.$$

2. Grau de homogeneidade do segundo membro Observe que

$$\frac{1}{(ty)^2} - \frac{1}{(tx)^2} = t^{-2} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

O mesmo comportamento ocorre com os outros dois fatores.

Consequentemente, o produto do segundo membro é homogêneo de grau

$$-6.$$

3. Comparação dos graus Como a identidade deve valer para quaisquer valores não nulos de x, y, z , podemos escolher uma configuração em que ambos os membros sejam diferentes de zero.

Nessa configuração, a igualdade precisa continuar válida após a multiplicação simultânea das variáveis por qualquer $t > 0$.

Portanto,

$$t^{3m+6} = t^{-6}.$$

Como essa igualdade vale para todo $t > 0$, temos

$$3m + 6 = -6.$$

Logo,

$$3m = -12$$

e, finalmente,

$$m = -4.$$

A fatoração da resolução principal confirma que esse valor efetivamente satisfaz a identidade proposta.

Comentário do professor

Quando uma identidade algébrica deve valer para quaisquer valores das variáveis, vale a pena investigar sua homogeneidade antes de desenvolver produtos ou determinantes. Neste problema, comparar os graus dos dois membros determina m diretamente. Na resolução por Vandermonde, o cancelamento deve ser justificado escolhendo valores para os quais o produto não seja nulo.

RESPOSTA FINAL

$$m = -4$$

Alternativa (B).

QUESTÃO 5

Enunciado

Sabe-se que $i^2 = -1$. Seja

$$z = \frac{1 - 2i}{4 - 3i}$$

e, para cada número natural n ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\bar{z})^k,$$

em que $\bar{z}$ representa o conjugado de z .

O menor valor de n para o qual vale a desigualdade

$$\left| S_n - \frac{\bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} \right| < \frac{1}{2027}$$

é:

- (A) 5
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 10
- (E) 11

Análise da questão

Assunto	Números complexos e progressão geométrica
Ideia central	O número complexo subtraído de S_n corresponde à soma de uma progressão geométrica infinita convergente.
Estratégia	Determinar a forma algébrica de z , identificar a soma infinita, calcular o módulo do erro da soma parcial e encontrar o menor n que satisfaz a desigualdade.

Resolução comentada

1. Forma algébrica de z

Temos

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1-2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} \\
&= \frac{(1-2i)(4+3i)}{16+9} \\
&= \frac{4+3i-8i-6i^2}{25} \\
&= \frac{10-5i}{25} \\
&= \frac{2-i}{5}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{2+i}{5}$$

e

$$|z|^2 = \frac{4+1}{25} = \frac{1}{5},$$

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. Identificação do número subtraído

Afirmamos que

$$\frac{\bar{z} - |z|^2}{|1-z|^2}$$

é exatamente a soma da série geométrica infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z})^k.$$

De fato, como

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1,$$

a série converge e

$$\begin{aligned}
S_{\infty} &= \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z})^k \\
&= \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \\
&= \frac{\bar{z}(1-z)}{(1-\bar{z})(1-z)} \\
&= \frac{\bar{z} - z\bar{z}}{|1-z|^2} \\
&= \frac{\bar{z} - |z|^2}{|1-z|^2},
\end{aligned}$$

onde usamos

$$(1 - \bar{z})(1 - z) = |1 - z|^2$$

e

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Portanto, a desigualdade proposta no enunciado equivale a

$$|S_n - S_\infty| < \frac{1}{2027}.$$

3. Cálculo do erro

A soma parcial de uma PG de razão $\bar{z}$ e primeiro termo $\bar{z}$ é

$$\begin{aligned} S_n &= \bar{z} \frac{1 - \bar{z}^n}{1 - \bar{z}} \\ &= \frac{\bar{z} - \bar{z}^{n+1}}{1 - \bar{z}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_n - S_\infty &= \frac{\bar{z} - \bar{z}^{n+1}}{1 - \bar{z}} - \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} \\ &= -\frac{\bar{z}^{n+1}}{1 - \bar{z}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|S_n - S_\infty| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - \bar{z}|}.$$

Como

$$1 - \bar{z} = 1 - \frac{2+i}{5} = \frac{3-i}{5},$$

temos

$$|1 - \bar{z}| = \frac{\sqrt{9+1}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned} |S_n - S_\infty| &= \frac{5}{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{n+1} \\ &= \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot 5^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= \frac{5^{\frac{1-n}{2}}}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|S_n - S_\infty| = \frac{5^{\frac{1-n}{2}}}{\sqrt{10}}.$$

4. A desigualdade

Devemos resolver

$$\frac{5^{\frac{1-n}{2}}}{\sqrt{10}} < \frac{1}{2027}.$$

Equivalentemente,

$$5^{\frac{n-1}{2}} > \frac{2027}{\sqrt{10}}.$$

Aplicando logaritmos,

$$\frac{n-1}{2} \ln 5 > \ln 2027 - \frac{1}{2} \ln 10.$$

Numericamente,

$$\ln 2027 \approx 7,6143,$$

$$\frac{1}{2} \ln 10 \approx 1,513,$$

$$\ln 5 \approx 1,6094.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} &> \frac{7,6143 - 1,513}{1,6094} \\ &= \frac{6,4630}{1,6094} \\ &\approx 4,016. \end{aligned}$$

Logo,

$$n > 9,032.$$

Como n é natural,

$$n_{\min} = 10.$$

5. Verificação numérica

Conferindo diretamente,

$$\frac{1}{2027} \approx 4,9334 \times 10^{-4}.$$

Para $n = 9$,

$$\begin{aligned} |S_9 - S_\infty| &= \frac{5^{-4}}{\sqrt{10}} \\ &\approx 5,0596 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|S_9 - S_\infty| \not\leq \frac{1}{2027}.$$

Para $n = 10$,

$$\begin{aligned} |S_{10} - S_\infty| &= \frac{5^{-4,5}}{\sqrt{10}} \\ &\approx 2,2627 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|S_{10} - S_\infty| < \frac{1}{2027}.$$

Verificação confirmada.

Caminho alternativo

Comparação exata, sem logaritmos

É possível determinar o menor valor de n sem recorrer a aproximações logarítmicas.

Inicialmente, observe que

$$\bar{z} = \frac{2+i}{5}$$

e

$$|1 - z|^2 = \left| \frac{3+i}{5} \right|^2 = \frac{2}{5}.$$

Assim, o número complexo subtraído no enunciado pode ser simplificado diretamente:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} &= \frac{\frac{2+i}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{\frac{1+i}{5}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{1+i}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{2+i}{3-i} = \frac{1+i}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| S_n - \frac{1+i}{2} \right| &= \left| -\frac{\bar{z}^{n+1}}{1-\bar{z}} \right| \\ &= \frac{5^{\frac{1-n}{2}}}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Como

$$0 < \frac{1}{\sqrt{5}} < 1,$$

essa expressão é estritamente decrescente em n .

Basta, portanto, localizar a passagem pelo limite $\frac{1}{2027}$.

Para $n = 9$,

$$\frac{5^{-4}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{625\sqrt{10}}.$$

A desigualdade exigiria

$$625\sqrt{10} > 2027.$$

Entretanto,

$$625^2 \cdot 10 = 3\,906\,250 < 4\,108\,729 = 2027^2.$$

Logo, $n = 9$ não satisfaz a condição.

Para $n = 10$,

$$\frac{5^{-\frac{9}{2}}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{625\sqrt{50}}.$$

Agora,

$$625^2 \cdot 50 = 19\,531\,250 > 4\,108\,729 = 2027^2.$$

Consequentemente,

$$625\sqrt{50} > 2027,$$

e a desigualdade é satisfeita.

Como o erro diminui estritamente com n , concluímos que

$$n_{\min} = 10.$$

O procedimento confirma o resultado utilizando apenas propriedades da PG, módulos de números complexos e comparações algébricas exatas.

Comentário do professor

O principal cuidado desta questão está em reconhecer que o número complexo subtraído é a soma infinita da PG, e não um termo independente. O caso $n = 9$ é limítrofe: seu erro é aproximadamente $5,06 \times 10^{-4}$, contra $4,93 \times 10^{-4}$ do limite exigido. Arredondar prematuramente pode levar à alternativa incorreta.

RESPOSTA FINAL

$$n_{\min} = 10$$

Alternativa (D).

QUESTÃO 6

Enunciado

Sabe-se que $i^2 = -1$. Seja S a região do Plano de Argand-Gauss definida por

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 - i| + |z - 3 - 4i| \leq 7\}.$$

Qual a área do retângulo circunscrito à região S que tem um dos lados paralelos à reta que passa pelos pontos $1 - i$ e $-2 + 3i$?

- (A) $\frac{21\sqrt{6}}{2}$
- (B) $12\sqrt{6}$
- (C) $15\sqrt{6}$
- (D) $14\sqrt{6}$
- (E) $\frac{35\sqrt{6}}{2}$

Análise da questão

Assunto	Números complexos e cônicas
Ideia central	Reconhecer a região como uma elipse pela soma constante das distâncias aos focos e determinar a orientação do retângulo circunscrito.
Estratégia	Identificar os focos e os semieixos da elipse; comparar a direção focal com a reta dada; concluir que o retângulo tem dimensões $2a \times 2b$.

Resolução comentada

1. Identificação da região

Escrevendo

$$|z + 1 - i| = |z - (-1 + i)|$$

e

$$|z - 3 - 4i| = |z - (3 + 4i)|,$$

a condição é

$$d(z, F_1) + d(z, F_2) \leq 7,$$

com

$$F_1 = (-1, 1)$$

e

$$F_2 = (3, 4).$$

Trata-se, portanto, da região limitada por uma elipse de focos F_1 e F_2 , com

$$2a = 7,$$

incluindo o interior.

A distância focal é

$$\begin{aligned} 2c &= |F_1 F_2| \\ &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Logo,

$$c = \frac{5}{2}.$$

Como

$$2a = 7 > 5 = 2c,$$

a elipse é de fato não degenerada.

Assim,

$$a = \frac{7}{2}.$$

Pela relação

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

temos

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{49}{4} - \frac{25}{4} \\ &= \frac{24}{4} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Portanto,

$$b = \sqrt{6}.$$

2. Direção do lado do retângulo

A reta pelos pontos

$$1 - i = (1, -1)$$

e

$$-2 + 3i = (-2, 3)$$

tem vetor diretor

$$\vec{v} = (-2 - 1, 3 - (-1)) = (-3, 4).$$

O eixo maior da elipse tem a direção de

$$\vec{u} = F_2 - F_1 = (4, 3).$$

Como

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0,\end{aligned}$$

a reta dada é perpendicular ao eixo maior, isto é, **paralela ao eixo menor**.

3. Área

Logo, o retângulo circunscrito procurado tem lados paralelos aos eixos da elipse.

Portanto, suas dimensões são

$$2a \times 2b,$$

pois cada lado tangencia a elipse em um extremo de eixo.

Assim,

$$\begin{aligned}A &= 2a \cdot 2b \\ &= 7 \cdot 2\sqrt{6} \\ &= 14\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$A = 14\sqrt{6}.$$

Caminho alternativo

A direção pelo plano complexo

Depois de identificar a região como uma elipse, temos os focos

$$F_1 = -1 + i$$

e

$$F_2 = 3 + 4i.$$

Logo, um número complexo que representa a direção do eixo maior é

$$F_2 - F_1 = (3 + 4i) - (-1 + i) = 4 + 3i.$$

Por outro lado, a reta indicada no enunciado passa pelos pontos

$$1 - i$$

e

$$-2 + 3i.$$

Seu vetor diretor, escrito como número complexo, é

$$(-2 + 3i) - (1 - i) = -3 + 4i.$$

Agora observe que

$$i(4 + 3i) = 4i + 3i^2 = -3 + 4i.$$

Ou seja, a direção da reta dada é obtida multiplicando a direção do eixo maior por i .

No plano complexo, a multiplicação por i corresponde a uma rotação de 90° .

Portanto, a reta dada é perpendicular ao eixo maior da elipse e, conseqüentemente, paralela ao eixo menor.

Já sabemos que

$$2a = 7$$

e

$$b = \sqrt{6}.$$

Logo, o retângulo circunscrito tem dimensões

$$7$$

e

$$2\sqrt{6},$$

e sua área é

$$A = 7 \cdot 2\sqrt{6} = 14\sqrt{6}.$$

Comentário do professor

A desigualdade ≤ 7 descreve **toda a região elíptica**, não apenas a elipse. A pegadinha principal, porém, está na orientação do retângulo: só podemos usar diretamente $2a \cdot 2b$ depois de verificar que seus lados são paralelos aos eixos da elipse. Aqui, essa informação vem da perpendicularidade entre $(-3, 4)$ e $(4, 3)$.

RESPOSTA FINAL

$$A = 14\sqrt{6}$$

Alternativa (D).

QUESTÃO 7

Enunciado

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0,$$

r_2 e r_3 as raízes da equação

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0,$$

e r_3 e r_1 as raízes da equação

$$a_3x^2 + b_3x + c_3 = 0,$$

com

$$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^*$$

e

$$a_1a_2a_3 \neq 0.$$

Calcule

$$\left[\prod_{i=1}^3 \left(\frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} \right) \right]^{1/2}.$$

- (A) $r_1 + r_2 + r_3$
- (B) $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$
- (C) $(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)$
- (D) $r_1r_2r_3$
- (E) $(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)$

Análise da questão

Assunto

Ideia central

Estratégia

Equações do 2º grau e relações de Girard

Reescrever cada fator $\frac{a-b+c}{a}$ em função das raízes da respectiva equação quadrática.

Aplicar as relações de Girard em cada uma das três equações, multiplicar os fatores obtidos e reconhecer um quadrado perfeito.

Resolução comentada

1. Fatoração de cada fator

Se p e q são as raízes de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a \neq 0$, as relações de Girard fornecem

$$p + q = -\frac{b}{a}$$

e

$$pq = \frac{c}{a}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{a - b + c}{a} &= 1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ &= 1 + (p + q) + pq \\ &= (1 + p)(1 + q).\end{aligned}$$

2. Produto

Aplicando o resultado a cada uma das três equações:

$$\frac{a_1 - b_1 + c_1}{a_1} = (1 + r_1)(1 + r_2),$$

$$\frac{a_2 - b_2 + c_2}{a_2} = (1 + r_2)(1 + r_3),$$

$$\frac{a_3 - b_3 + c_3}{a_3} = (1 + r_3)(1 + r_1).$$

Multiplicando,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^3 \frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} &= (1 + r_1)^2 (1 + r_2)^2 (1 + r_3)^2 \\ &= [(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)]^2.\end{aligned}$$

3. Extração da raiz

Definindo

$$w = (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3),$$

temos

$$\prod_{i=1}^3 \frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} = w^2.$$

Como, para $w \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{w^2} = |w|,$$

segue rigorosamente que

$$\left[\prod_{i=1}^3 \left(\frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} \right) \right]^{1/2} = |(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)|.$$

Portanto, o valor matematicamente rigoroso da expressão é

$$|(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)|.$$

Resposta intencionada pela banca

A alternativa proposta pela banca que corresponde à expressão obtida **sem o módulo** é

$$(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)$$

— alternativa (C).

Nota de rigor — questão passível de anulação

O enunciado estabelece apenas que

$$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^*,$$

sem impor qualquer restrição de sinal a

$$(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3).$$

Portanto, esse produto pode ser negativo. Nesse caso,

$$\sqrt{[(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)]^2} = |(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)|$$

não coincide com a alternativa (C).

Um contraexemplo é

$$r_1 = -2, \quad r_2 = -3, \quad r_3 = -4.$$

As três equações podem ser tomadas como

$$x^2 + 5x + 6 = 0,$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0,$$

e

$$x^2 + 6x + 8 = 0,$$

cujas raízes são, respectivamente,

$$\{-2, -3\}, \quad \{-3, -4\}, \quad \{-4, -2\}.$$

Os três fatores do radicando valem

$$\frac{a_1 - b_1 + c_1}{a_1} = 1 - 5 + 6 = 2,$$

$$\frac{a_2 - b_2 + c_2}{a_2} = 1 - 7 + 12 = 6,$$

$$\frac{a_3 - b_3 + c_3}{a_3} = 1 - 6 + 8 = 3.$$

Logo, o radicando é

$$2 \cdot 6 \cdot 3 = 36,$$

e a expressão pedida vale

$$\sqrt{36} = 6.$$

Entretanto, para

$$r_1 = -2, \quad r_2 = -3, \quad r_3 = -4,$$

as alternativas assumem os valores

$$(A) \quad r_1 + r_2 + r_3 = -9,$$

$$(B) \quad r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 6 + 12 + 8 = 26,$$

$$(C) \quad (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) = (-1)(-2)(-3) = -6,$$

$$(D) \quad r_1 r_2 r_3 = -24,$$

$$(E) \quad (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Nenhuma das alternativas é igual a 6.

Assim, **na forma em que o enunciado está escrito, a questão é passível de anulação.**

Caminho alternativo

Avaliação dos polinômios em $x = -1$

Considere genericamente

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - p)(x - q),$$

em que p e q são suas raízes.

Observe que

$$P(-1) = a - b + c.$$

Portanto,

$$\frac{a - b + c}{a} = \frac{P(-1)}{a}.$$

Usando a forma fatorada,

$$\begin{aligned}\frac{P(-1)}{a} &= (-1 - p)(-1 - q) \\ &= (1 + p)(1 + q).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{a_1 - b_1 + c_1}{a_1} &= (1 + r_1)(1 + r_2), \\ \frac{a_2 - b_2 + c_2}{a_2} &= (1 + r_2)(1 + r_3), \\ \frac{a_3 - b_3 + c_3}{a_3} &= (1 + r_3)(1 + r_1).\end{aligned}$$

Multiplicando,

$$\prod_{i=1}^3 \frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} = [(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)]^2.$$

Logo,

$$\left[\prod_{i=1}^3 \left(\frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} \right) \right]^{1/2} = |(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)|.$$

A alternativa (C) corresponde à leitura intencionada pela banca, obtida ao suprimir o módulo.

Comentário do professor

A leitura rigorosa da expressão conduz necessariamente ao módulo, pois $\sqrt{w^2} = |w|$ para $w \in \mathbb{R}$. Como o enunciado não garante que $(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) \geq 0$, há contraexemplos para os quais nenhuma alternativa é correta; por isso, a questão é **passível de anulação**. O gabarito definitivo do IME está previsto para **02/10/2026**; este comentário será revisto caso a banca anule ou retifique a questão.

RESPOSTA FINAL

Resposta intencionada pela banca:

$$(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)$$

Alternativa (C).

Ressalva formal: rigorosamente, a expressão vale

$$|(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)|$$

e, nas hipóteses dadas, a questão é passível de anulação.

QUESTÃO 8

Enunciado

Seja a equação

$$9^x - 4 \cdot 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{2x-1}.$$

O seu conjunto solução contém:

- (A) nenhum elemento.
- (B) um número real positivo e mais nenhum outro elemento.
- (C) um número real negativo e mais nenhum outro elemento.
- (D) um número real negativo, um número real positivo e mais nenhum outro elemento.
- (E) dois números reais positivos e mais nenhum outro elemento.

Análise da questão

Assunto	Equação exponencial
Ideia central	Reescrever todas as potências em função de 9^x e 5^x , reduzindo a equação a uma igualdade de potências de mesma base.
Estratégia	Agrupar os termos de mesma base, simplificar os coeficientes e usar a injetividade de $x \mapsto \left(\frac{9}{5}\right)^x$.

Resolução comentada

1. Agrupamento das potências de mesma base

Reescrevemos tudo em função de

$$9^x = 3^{2x}$$

e 5^x .

Temos

$$3^{2x-1} = \frac{3^{2x}}{3} = \frac{9^x}{3},$$

$$5^{x-\frac{1}{2}} = \frac{5^x}{\sqrt{5}},$$

e

$$5^{x+\frac{1}{2}} = 5^x \sqrt{5}.$$

A equação torna-se

$$9^x - \frac{4 \cdot 5^x}{\sqrt{5}} = 5^x \sqrt{5} - \frac{2 \cdot 9^x}{3}.$$

Agrupando os termos:

$$9^x \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 5^x \left(\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

2. Simplificação

Temos

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

e

$$\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{5+4}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$\frac{5}{3} 9^x = \frac{9}{\sqrt{5}} 5^x.$$

Portanto,

$$\frac{9^x}{5^x} = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5}.$$

Assim,

$$\frac{9^x}{5^x} = \frac{27}{5\sqrt{5}}.$$

Como

$$5\sqrt{5} = 5^{3/2},$$

segue que

$$\frac{27}{5\sqrt{5}} = \frac{27}{5^{3/2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^3.$$

Portanto,

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^3.$$

3. Resolução

Observe que

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{9}{5}\right)^{3/2}.$$

Assim,

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^{3/2}.$$

Como

$$\frac{9}{5} > 1,$$

a função

$$x \mapsto \left(\frac{9}{5}\right)^x$$

é estritamente crescente e, portanto, injetora.

Logo,

$$x = \frac{3}{2}.$$

4. Verificação

Com

$$x = \frac{3}{2},$$

temos

$$9^{3/2} = 27,$$

$$5^{x-\frac{1}{2}} = 5^1 = 5,$$

$$5^{x+\frac{1}{2}} = 5^2 = 25,$$

e

$$3^{2x-1} = 3^2 = 9.$$

Substituindo na equação original:

$$27 - 4 \cdot 5 = 7,$$

enquanto

$$25 - 2 \cdot 9 = 7.$$

Os dois membros coincidem.

Verificação confirmada.

Portanto, o conjunto solução é

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Trata-se de exatamente **um número real positivo**.

Comentário do professor

A questão não exige nenhuma substituição sofisticada: o ponto decisivo é reconhecer $3^{2x} = 9^x$ e organizar corretamente os expoentes fracionários de 5. Depois da redução para

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^{3/2},$$

a unicidade da solução vem da injetividade da função exponencial de base $\frac{9}{5} > 1$.

RESPOSTA FINAL

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Um único número real positivo — alternativa (B).

QUESTÃO 9

Enunciado

Seja n o número de polinômios de grau 4 que têm coeficientes inteiros, coeficiente do termo de maior grau igual a 1 e cujas raízes também são raízes do polinômio

$$P(x) = x^{12} - 1.$$

O resto da divisão de n por 5 é:

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

Análise da questão

Assunto	Polinômios e raízes da unidade
Ideia central	Um polinômio mônico de coeficientes inteiros cujas raízes são raízes 12-ésimas da unidade deve ser produto de polinômios ciclotômicos Φ_d , com $d \mid 12$.
Estratégia	Listar os ciclotômicos disponíveis e seus graus, contar os produtos com grau total 4 e reduzir a quantidade obtida módulo 5.

Resolução comentada

1. Estrutura dos polinômios procurados

Seja $Q(x)$ mônico, de grau 4, com

$$Q \in \mathbb{Z}[x],$$

cujas raízes, com multiplicidade, estão entre as 12 raízes de

$$x^{12} - 1.$$

Essas raízes são as raízes 12-ésimas da unidade

$$\zeta^k = e^{2\pi i k/12}, \quad k = 0, \dots, 11,$$

todas simples e distintas em $x^{12} - 1$.

Fatore Q em irredutíveis mônicos de $\mathbb{Z}[x]$.

Cada fator irredutível F de Q possui alguma raiz ζ^k . Como F é mônico, irredutível e anula ζ^k , ele é o polinômio minimal de ζ^k sobre $\mathbb{Q}$.

Esse polinômio minimal é o ciclotômico

$$\Phi_d,$$

em que d é a ordem de ζ^k .

Como ζ^k é uma raiz 12-ésima da unidade,

$$d \mid 12.$$

Reciprocamente, todo produto de ciclotômicos Φ_d , com $d \mid 12$, admitindo repetições e com grau total 4, é mônico, possui coeficientes inteiros e tem todas as suas raízes entre as raízes de $x^{12} - 1$.

2. Graus disponíveis

Os divisores de 12 e os respectivos graus $\varphi(d)$ são:

d	1	2	3	4	6	12
$\varphi(d)$	1	1	2	2	2	4
$\Phi_d(x)$	$x - 1$	$x + 1$	$x^2 + x + 1$	$x^2 + 1$	$x^2 - x + 1$	$x^4 - x^2 + 1$

Portanto, dispomos de:

- 2 ciclotômicos de grau 1: Φ_1, Φ_2 ;
- 3 ciclotômicos de grau 2: Φ_3, Φ_4, Φ_6 ;
- 1 ciclotômico de grau 4: Φ_{12} .

Precisamos contar os produtos cuja soma dos graus seja igual a 4.

3. Contagem por partições do grau 4

Caso 4 Utilizamos apenas

$$\Phi_{12}.$$

Isso fornece

$$1$$

polinômio.

Caso $2 + 2$ Devemos escolher, com repetição permitida, dois elementos entre

$$\{\Phi_3, \Phi_4, \Phi_6\}.$$

O número de multiconjuntos é

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Portanto, temos

$$6$$

polinômios.

Caso $2 + 1 + 1$ Escolhemos um ciclotômico de grau 2:

$$3$$

possibilidades.

Para os dois fatores de grau 1, devemos escolher um multiconjunto de 2 elementos entre

$$\{\Phi_1, \Phi_2\}.$$

Assim,

$$\binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = 3.$$

Logo, esse caso produz

$$3 \cdot 3 = 9$$

polinômios.

Caso $1 + 1 + 1 + 1$ Devemos escolher um multiconjunto de 4 elementos entre

$$\{\Phi_1, \Phi_2\}.$$

Portanto,

$$\binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5.$$

Esse caso produz

$$5$$

polinômios.

4. Total

Somando todos os casos,

$$\begin{aligned}n &= 1 + 6 + 9 + 5 \\ &= 21.\end{aligned}$$

Logo,

$$n = 21.$$

5. Resto da divisão por 5

Temos

$$21 = 4 \cdot 5 + 1.$$

Portanto,

$$21 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Assim,

$$n \equiv 1 \pmod{5}.$$

6. Verificação computacional

Percorrendo os

$$\left(\frac{12 + 4 - 1}{4}\right) = \left(\frac{15}{4}\right) = 1365$$

multiconjuntos de 4 raízes 12-ésimas da unidade e expandindo os produtos correspondentes

$$\prod (x - \zeta),$$

obtêm-se exatamente 21 polinômios com todos os coeficientes inteiros.

A contagem confirma o resultado.

Caminho alternativo

Função geradora para os graus

Depois de estabelecido que os polinômios procurados são produtos dos ciclotômicos associados aos divisores de 12, podemos compactar toda a contagem combinatória em uma função geradora.

Existem:

- 2 fatores possíveis de grau 1;
- 3 fatores possíveis de grau 2;
- 1 fator possível de grau 4;

e todos podem aparecer com repetição.

Assim, a função geradora que registra o grau total é

$$\frac{1}{(1-t)^2} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^3} \cdot \frac{1}{1-t^4}.$$

Precisamos apenas do coeficiente de t^4 .

Até grau 4,

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-t^2)^3} = 1 + 3t^2 + 6t^4 + \dots,$$

e

$$\frac{1}{1-t^4} = 1 + t^4 + \dots.$$

O coeficiente de t^4 no produto recebe contribuições de:

$$5 \cdot 1 \cdot 1$$

correspondente a $1 + 1 + 1 + 1$;

$$3 \cdot 3 \cdot 1$$

correspondente a $2 + 1 + 1$;

$$1 \cdot 6 \cdot 1$$

correspondente a $2 + 2$;

e

$$1 \cdot 1 \cdot 1$$

correspondente a 4.

Portanto,

$$n = 5 + 9 + 6 + 1 = 21.$$

Logo,

$$n \equiv 1 \pmod{5}.$$

Comentário do professor

O ponto delicado não está na contagem, mas na estrutura algébrica anterior: **coeficientes inteiros obrigam as raízes conjugadas sobre $\mathbb{Q}$ a aparecerem agrupadas em fatores ciclotômicos**. Além disso, as repetições de um mesmo Φ_d são permitidas; o enunciado exige que as raízes de Q sejam raízes de $x^{12} - 1$, mas não afirma que Q deva dividir $x^{12} - 1$. Confundir essas duas condições reduziria indevidamente a contagem.

RESPOSTA FINAL

$$n = 21 \quad \text{e} \quad n \equiv 1 \pmod{5}$$

Alternativa (B).

QUESTÃO 10

Enunciado

Pedro propõe a Maria o seguinte desafio. Existem dez caixas fechadas, sendo que duas delas contêm uma moeda cada e as demais estão vazias. Pedro sabe onde estão as moedas, mas Maria não.

Maria ganha um prêmio se encontrar as duas caixas com as moedas. Maria escolhe duas caixas ao acaso. Dentre as oito restantes, Pedro escolhe seis que ele sabe que estão vazias, mostra seu conteúdo a Maria e as remove do desafio.

Ele então oferece a Maria três opções:

1. continuar com as duas caixas originalmente escolhidas;
2. trocar uma das caixas por uma das que sobraram;
3. trocar as duas caixas pelas duas que sobraram.

Seja $P(i)$ a probabilidade de Maria ganhar o prêmio se escolher a opção (i) .

Temos que

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{a}{b},$$

onde $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

O valor de $a + b$ é:

- (A) 3
- (B) 26
- (C) 54
- (D) 76
- (E) 78

Análise da questão

Assunto	Probabilidade
Ideia central	Condicionar a análise ao número de moedas presentes nas duas caixas escolhidas inicialmente por Maria.
Estratégia	Calcular a distribuição de K , número de moedas na escolha inicial, determinar o conteúdo das caixas restantes após a ação de Pedro e avaliar separadamente as três estratégias.

Resolução comentada

1. Distribuição inicial

Maria escolhe 2 caixas entre 10.

O número total de escolhas equiprováveis é

$$\binom{10}{2} = 45.$$

Seja K o número de moedas existentes nas duas caixas inicialmente escolhidas por Maria.

Caso $K = 2$ Maria escolheu exatamente as duas caixas com moedas:

$$\Pr(K = 2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{0}}{45} = \frac{1}{45}.$$

Caso $K = 1$ Maria escolheu uma das duas caixas com moeda e uma das oito vazias:

$$\Pr(K = 1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{1}}{45} = \frac{16}{45}.$$

Caso $K = 0$ Maria escolheu duas das oito caixas vazias:

$$\Pr(K = 0) = \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{2}}{45} = \frac{28}{45}.$$

Como verificação,

$$\frac{1 + 16 + 28}{45} = 1.$$

Portanto,

$$\Pr(K = 2) = \frac{1}{45}, \quad \Pr(K = 1) = \frac{16}{45}, \quad \Pr(K = 0) = \frac{28}{45}.$$

2. O que sobra após a ação de Pedro

Das 8 caixas restantes, Pedro remove 6 que ele sabe estarem vazias.

Isso é sempre possível.

K	Moedas nas 8 restantes	Vazias nas 8 restantes	Conteúdo das 2 caixas que sobram
2	0	8	2 vazias
1	1	7	1 com moeda + 1 vazia
0	2	6	2 com moeda

O ponto crucial é que a ação de Pedro é sempre possível e independe de qual dos três casos ocorreu. Portanto, ela não altera as probabilidades

$$\Pr(K = k)$$

calculadas anteriormente.

3. Opção (1): ficar com as duas caixas

Maria vence se, e somente se,

$$K = 2.$$

Logo,

$$P(1) = \frac{1}{45}.$$

4. Opção (3): trocar as duas caixas pelas duas restantes

Maria vence se, e somente se, as duas caixas remanescentes contiverem as duas moedas. Isso ocorre precisamente quando

$$K = 0.$$

Logo,

$$P(3) = \frac{28}{45}.$$

5. Opção (2): trocar apenas uma caixa

Maria devolve uma de suas duas caixas, escolhida ao acaso, e toma uma das duas caixas que sobraram, também ao acaso.

Analisemos os três casos.

Caso $K = 2$ Maria possui as duas moedas.

Ao trocar uma caixa, ela perde necessariamente uma moeda e recebe uma caixa vazia.

Portanto, a probabilidade de vitória é

$$0.$$

Caso $K = 1$ Maria possui

$$\{\text{moeda, vazia}\},$$

e as duas caixas remanescentes também são

$$\{\text{moeda, vazia}\}.$$

Para vencer, Maria precisa:

- devolver a caixa vazia, com probabilidade $\frac{1}{2}$;
- escolher, entre as caixas remanescentes, aquela que contém a moeda, também com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Assim,

$$\Pr(\text{vitória} \mid K = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Caso $K = 0$ Maria possui duas caixas vazias.

Depois da troca, continuará necessariamente com uma caixa vazia e poderá obter, no máximo, uma moeda.

Logo, a probabilidade de vitória é

$$0.$$

Pela lei da probabilidade total,

$$P(2) = \frac{1}{45} \cdot 0 + \frac{16}{45} \cdot \frac{1}{4} + \frac{28}{45} \cdot 0$$

$$= \frac{4}{45}.$$

Portanto,

$$P(2) = \frac{4}{45}.$$

6. Soma

Temos

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{45} + \frac{4}{45} + \frac{28}{45}$$

$$= \frac{33}{45}$$

$$= \frac{11}{15}.$$

Como

$$\gcd(11, 15) = 1,$$

a fração já está na forma irredutível.

Assim,

$$a = 11$$

e

$$b = 15.$$

Portanto,

$$a + b = 26.$$

Caminho alternativo

Calcular diretamente a soma pedida

Como o problema pede apenas

$$P(1) + P(2) + P(3),$$

podemos evitar o cálculo separado das três probabilidades e condicionar diretamente pelo valor de K .

Se $K = 2$, apenas a opção (1) produz vitória. Logo, a soma das probabilidades de vitória das três estratégias, condicionada a esse caso, é

$$1.$$

Se $K = 1$, as opções (1) e (3) falham, enquanto a opção (2) vence com probabilidade

$$\frac{1}{4}.$$

Logo, a contribuição condicionada é

$$\frac{1}{4}.$$

Se $K = 0$, apenas a opção (3) produz vitória. Assim, a contribuição condicionada é novamente

$$1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) &= \Pr(K = 2) \cdot 1 + \Pr(K = 1) \cdot \frac{1}{4} + \Pr(K = 0) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{45} + \frac{16}{45} \cdot \frac{1}{4} + \frac{28}{45} \\ &= \frac{1}{45} + \frac{4}{45} + \frac{28}{45} \\ &= \frac{33}{45} \\ &= \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a = 11, \quad b = 15$$

e

$$a + b = 26.$$

Comentário do professor

A ação de Pedro não altera a distribuição de K (é sempre possível), mas a informação de quem conhece a configuração quebra a simetria: as quatro caixas finais não são equiprováveis quanto à posição das moedas. Na opção (2), adota-se a hipótese natural do enunciado de que Maria escolhe uniformemente qual caixa devolver e qual das duas restantes tomar.

RESPOSTA FINAL

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{11}{15}$$

$$a + b = 26$$

Alternativa (B).

QUESTÃO 11

Enunciado

Seja o polígono formado pelos vértices (x, y) que satisfazem as equações

$$y = \frac{2025}{x}$$

e

$$y^2 = -x^2 + 10145,$$

com

$$x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Em relação ao polígono é correto afirmar que:

- (A) suas duas diagonais passam pela origem.
- (B) seus ângulos internos somam 180° .
- (C) seu círculo circunscrito tem raio inferior a 100.
- (D) ele possui um total de 5 diagonais.
- (E) ele inexistente, pois há apenas dois pontos (x, y) distintos.

Análise da questão

Assunto	Geometria analítica
Ideia central	Interpretar o sistema como a interseção de uma hipérbole equilátera com uma circunferência e explorar as simetrias do conjunto de soluções.
Estratégia	Transformar o sistema em $xy = 2025$ e $x^2 + y^2 = 10145$, provar que existem quatro pontos distintos e identificar os pares antípodas na circunferência.

Resolução comentada

1. O sistema

As condições dadas equivalem a

$$\begin{cases} xy = 2025, \\ x^2 + y^2 = 10145. \end{cases}$$

Trata-se da interseção de uma hipérbole equilátera, cujos ramos estão no primeiro e no terceiro quadrantes, pois

$$xy > 0,$$

com a circunferência de centro na origem e raio

$$\sqrt{10145}.$$

2. Existência e número de pontos

Substituindo

$$y = \frac{2025}{x}$$

na segunda equação:

$$x^2 + \frac{2025^2}{x^2} = 10145.$$

Multiplicando por x^2 ,

$$x^4 - 10145x^2 + 2025^2 = 0.$$

Fazendo

$$t = x^2,$$

obtemos

$$t^2 - 10145t + 4\,100\,625 = 0.$$

O discriminante é

$$\begin{aligned}\Delta &= 10145^2 - 4 \cdot 4\,100\,625 \\ &= 102\,921\,025 - 16\,402\,500 \\ &= 86\,518\,525 > 0.\end{aligned}$$

Como

$$\Delta > 0,$$

e tanto a soma das raízes

$$10145 > 0$$

quanto o produto

$$4\,100\,625 > 0$$

são positivos, existem duas raízes reais distintas e positivas:

$$t_1 > t_2 > 0.$$

Cada uma fornece

$$x = \pm\sqrt{t}.$$

Logo, existem quatro valores distintos de x e, conseqüentemente, quatro pontos distintos.

Isso já elimina a alternativa **(E)**.

Numericamente,

$$\sqrt{\Delta} \approx 9301,0,$$

$$t_1 \approx 9723,2, \quad t_2 \approx 421,7,$$

e

$$x \approx \pm 98,607$$

ou

$$x \approx \pm 20,536.$$

Denotando

$$\alpha \approx 98,607, \quad \beta \approx 20,536,$$

os quatro vértices são

$$A = (\alpha, \beta),$$

$$B = (\beta, \alpha),$$

$$C = (-\alpha, -\beta),$$

$$D = (-\beta, -\alpha).$$

3. Natureza do quadrilátero

Se

$$(x_0, y_0)$$

é solução, então

$$(y_0, x_0)$$

também é solução, pois o sistema é simétrico em x e y .

Além disso,

$$(-x_0, -y_0)$$

também é solução, pela simetria central em relação à origem.

Assim:

- A e C são pontos antípodas na circunferência;
- B e D também são pontos antípodas.

Portanto,

$$AC$$

é um diâmetro da circunferência e passa pela origem.

Da mesma forma,

$$BD$$

também é um diâmetro e passa pela origem.

Ordenando os vértices ao longo da circunferência, obtemos

$$A, B, C, D,$$

e suas diagonais são precisamente

$$AC$$

e

$$BD.$$

Logo, o polígono é um retângulo, pois suas diagonais são congruentes e se cortam ao meio, e **ambas passam pela origem**.

4. Análise das alternativas

Alternativa (A) Verdadeira.

As diagonais

$$AC$$

e

$$BD$$

são diâmetros da circunferência

$$x^2 + y^2 = 10145.$$

Logo, ambas contêm a origem.

Alternativa (B) Falsa.

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é

$$360^\circ,$$

e, neste caso, o polígono é um retângulo.

Alternativa (C) Falsa.

O círculo circunscrito é

$$x^2 + y^2 = 10145,$$

portanto seu raio é

$$\sqrt{10145} \approx 100,72 > 100.$$

Alternativa (D) Falsa.

Um quadrilátero possui

$$\frac{4(4-3)}{2} = 2$$

diagonais.

Um pentágono é que possui 5 diagonais.

Alternativa (E) Falsa.

Já demonstramos que existem quatro pontos distintos.

Caminho alternativo

Usando $x + y$ **e** $x - y$

Partimos diretamente do sistema

$$xy = 2025$$

e

$$x^2 + y^2 = 10145.$$

Então

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 10145 + 2 \cdot 2025 \\ &= 10145 + 4050 \\ &= 14195.\end{aligned}$$

Portanto,

$$x + y = \pm\sqrt{14195}.$$

Da mesma forma,

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= 10145 - 4050 \\ &= 6095.\end{aligned}$$

Assim,

$$x - y = \pm\sqrt{6095}.$$

Como os sinais podem ser escolhidos independentemente, surgem quatro pares:

$$x = \frac{\pm\sqrt{14195} \pm \sqrt{6095}}{2},$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{14195} \mp \sqrt{6095}}{2}.$$

Definindo

$$\alpha = \frac{\sqrt{14195} + \sqrt{6095}}{2}$$

e

$$\beta = \frac{\sqrt{14195} - \sqrt{6095}}{2},$$

com

$$\alpha > \beta > 0,$$

obtemos exatamente

$$(\alpha, \beta),$$

$$(\beta, \alpha),$$

$$(-\alpha, -\beta),$$

$$(-\beta, -\alpha).$$

Os pontos aparecem, portanto, em pares opostos relativamente à origem.

Como todos também pertencem à circunferência

$$x^2 + y^2 = 10145,$$

cada par de pontos opostos determina um diâmetro.

Logo, as duas diagonais do quadrilátero passam pela origem.

Portanto,

alternativa (A).

Comentário do professor

O atalho geométrico está na simetria do sistema: trocar x por y ou simultaneamente (x, y) por $(-x, -y)$ preserva as equações. Uma vez constatados quatro pontos distintos sobre a circunferência, os pares opostos já revelam as diagonais como diâmetros. A conta numérica ajuda a visualizar, mas não é necessária para concluir a alternativa correta.

RESPOSTA FINAL

As duas diagonais passam pela origem.

Alternativa (A).

QUESTÃO 12

Enunciado

Considere a equação

$$|\sin x - \cos x| + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x} = \sqrt{3},$$

com

$$x \in (0, 6\pi)$$

e

$$x \notin \left\{ \frac{m\pi}{2} ; m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

O número de soluções dessa equação é:

- (A) 0
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 6
- (E) 8

Análise da questão

Assunto	Trigonometria
Ideia central	Reduzir as expressões trigonométricas a uma única variável $t = \sin x \cos x$ e estabelecer uma cota inferior para o primeiro membro.
Estratégia	Simplificar o radical e o módulo em função de t , separar os casos $t > 0$ e $t < 0$ e comparar o valor mínimo possível do primeiro membro com $\sqrt{3}$.

Resolução comentada

1. Simplificação do radical

A exclusão

$$x \neq \frac{m\pi}{2}$$

garante

$$\sin x \neq 0 \quad \text{e} \quad \cos x \neq 0.$$

Defina

$$t = \sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

Então

$$t \neq 0$$

e

$$|t| \leq \frac{1}{2}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} \\ &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 2 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = \frac{1}{t^2}.$$

Logo,

$$\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{|t|}.$$

2. Simplificação do módulo

Temos

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Assim,

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 1 - 2t.$$

Consequentemente,

$$|\operatorname{sen} x - \cos x| = \sqrt{1 - 2t}.$$

3. A função a estudar

A equação equivale a

$$f(t) := \sqrt{1 - 2t} + \frac{1}{|t|} = \sqrt{3},$$

com

$$t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad t \neq 0.$$

Caso $t > 0$ Nesse caso,

$$0 < t \leq \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{t} \geq 2$$

e

$$\sqrt{1-2t} \geq 0.$$

Portanto,

$$f(t) \geq 2.$$

A igualdade

$$f(t) = 2$$

ocorre apenas quando

$$t = \frac{1}{2},$$

pois então

$$\sqrt{1-2t} = 0$$

e

$$\frac{1}{t} = 2.$$

Caso $t < 0$ Agora,

$$-\frac{1}{2} \leq t < 0.$$

Temos

$$\frac{1}{|t|} \geq 2$$

e, como $t < 0$,

$$1-2t > 1.$$

Logo,

$$\sqrt{1-2t} > 1.$$

Portanto,

$$f(t) > 3.$$

Em ambos os casos,

$$f(t) \geq 2.$$

Mas

$$2 > \sqrt{3} \approx 1,732.$$

4. Conclusão

O primeiro membro da equação é sempre maior ou igual a 2, ao passo que o segundo membro vale

$$\sqrt{3} < 2.$$

Portanto, a equação não admite solução alguma, qualquer que seja o intervalo considerado.

Em particular, no intervalo

$$(0, 6\pi),$$

o número de soluções é

$$0.$$

5. Verificação numérica

Varrendo 2×10^6 pontos do intervalo

$$(0, 6\pi),$$

o menor valor assumido pelo primeiro membro é exatamente

$$2,000000,$$

atingido nos pontos em que

$$\sin(2x) = 1,$$

isto é,

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

A verificação confirma a cota inferior demonstrada.

Caminho alternativo

O radical sozinho já resolve a questão

A condição sobre x garante que $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ estão definidas.

Além disso,

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1.$$

Como

$$\operatorname{tg}^2 x > 0,$$

podemos aplicar

$$u + \frac{1}{u} \geq 2, \quad u > 0,$$

com

$$u = \operatorname{tg}^2 x.$$

Assim,

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \geq 2.$$

Consequentemente,

$$2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \geq 4.$$

Logo,

$$\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x} \geq 2.$$

Como

$$|\operatorname{sen} x - \cos x| \geq 0,$$

temos imediatamente

$$|\operatorname{sen} x - \cos x| + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x} \geq 2.$$

Por outro lado,

$$\sqrt{3} < 2.$$

Portanto, é impossível que

$$|\operatorname{sen} x - \cos x| + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x} = \sqrt{3}.$$

Assim,

não há soluções.

Comentário do professor

Esta é uma questão em que **resolver demais pode custar tempo de prova**. Antes de fazer substituições trigonométricas, vale procurar uma cota simples: só o radical já é ≥ 2 , enquanto o segundo membro é $\sqrt{3} < 2$. A solução principal é útil por descrever precisamente o comportamento da expressão; o caminho alternativo é o atalho de concurso.

RESPOSTA FINAL

0 soluções

Alternativa (A).

QUESTÃO 13

Enunciado

Considere a equação

$$\log_{0,5 \cdot \cos(4x) + 0,5} (0,5 \cdot \sin(4x)) = 1.$$

O número de valores de x , pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$, que satisfazem essa equação é:

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

Análise da questão

Assunto	Logaritmos e Trigonometria
Ideia central	Reescrever a base e o logaritmando por meio de identidades trigonométricas e, antes de resolver a equação, impor corretamente as condições de existência do logaritmo.
Estratégia	Identificar a base como $\cos^2(2x)$, usar $\log_b A = 1 \Leftrightarrow A = b$ e eliminar o ramo incompatível com $b > 0$.

Resolução comentada

1. Condições de existência

Defina $b = 0,5 \cdot \cos(4x) + 0,5$ e $A = 0,5 \cdot \sin(4x)$. Usando $1 + \cos(4x) = 2\cos^2(2x)$, temos $b = (1 + \cos(4x))/2 = \cos^2(2x)$. Além disso, $\sin(4x) = 2 \cdot \sin(2x) \cos(2x)$, de modo que $A = \sin(4x)/2 = \sin(2x) \cos(2x)$. Para que $\log_b A$ esteja definido nos reais, é necessário $b > 0$, $b \neq 1$, $A > 0$. Ou seja, $\cos^2(2x) > 0$, $\cos^2(2x) \neq 1$, $\sin(2x) \cos(2x) > 0$.

2. Resolução da equação

Como $\log_b A = 1$, pela própria definição de logaritmo, $A = b$. Portanto $\sin(2x) \cos(2x) = \cos^2(2x)$. Fatorando, $\cos(2x) \cdot [\sin(2x) - \cos(2x)] = 0$. Surgem dois ramos.

Primeiro ramo: $\cos(2x) = 0$. Nesse caso $b = \cos^2(2x) = 0$. Mas uma base logarítmica deve satisfazer $b > 0$. Logo, esse ramo é impossível; $\cos(2x) = 0$ é descartado.

Segundo ramo: $\sin(2x) = \cos(2x)$. Como já sabemos que $\cos(2x) \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por $\cos(2x)$: $\tan(2x) = 1$. Assim, $2x = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e, portanto, $x = \pi/8 + k\pi/2$.

3. Seleção no intervalo $[0, \pi]$

Devemos ter $0 \leq \pi/8 + k\pi/2 \leq \pi$. Os valores possíveis são $k = 0 \Rightarrow x = \pi/8$, e $k = 1 \Rightarrow x = 5\pi/8$. Para $k = -1$, $x = -3\pi/8 < 0$, e para $k = 2$, $x = 9\pi/8 > \pi$. Logo, restam apenas $x = \pi/8$ e $x = 5\pi/8$.

4. Validação das condições de existência

Para $x = \pi/8$, temos $2x = \pi/4$. Assim, $b = \cos^2(\pi/4) = 1/2$ e $A = \sin(\pi/4) \cos(\pi/4) = 1/2$. Portanto $0 < b \neq 1$, $A > 0$, e $\log_{1/2}(1/2) = 1$. Logo $x = \pi/8$ é solução.

Para $x = 5\pi/8$, temos $2x = 5\pi/4$. Consequentemente $b = \cos^2(5\pi/4) = 1/2$ e $A = \sin(5\pi/4) \cos(5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2)(-\sqrt{2}/2) = 1/2$. Também nesse caso $0 < b \neq 1$, $A > 0$. Portanto $x = 5\pi/8$ também é solução legítima.

5. Conclusão

A equação possui exatamente duas soluções no intervalo considerado: $x = \pi/8$ e $x = 5\pi/8$. Logo, o número de valores de x é 2.

6. Verificação numérica

Considerando $F(x) = \log_{\cos^2(2x)}(\sin(2x) \cos(2x)) - 1$ apenas nos pontos em que o logaritmo está definido, a varredura numérica do intervalo $[0, \pi]$ identifica exatamente os zeros $x = \pi/8$ e $x = 5\pi/8$, confirmando a análise algébrica.

Caminho alternativo — Transformação em uma equação trigonométrica elementar

Depois de impostas as condições de existência, temos $\log_b A = 1 \Leftrightarrow A = b$. Logo, $(1/2) \cdot \sin(4x) = (1/2) \cdot [1 + \cos(4x)]$. Portanto $\sin(4x) - \cos(4x) = 1$. Utilizando $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \cdot \sin(\theta - \pi/4)$, obtemos $\sqrt{2} \cdot \sin(4x - \pi/4) = 1$, isto é, $\sin(4x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$. Daí surgem duas famílias: $4x - \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi$ ou $4x - \pi/4 = 3\pi/4 + 2k\pi$. Na primeira, $4x = \pi/2 + 2k\pi$, portanto $x = \pi/8 + k\pi/2$. Na segunda, $4x = \pi + 2k\pi$, portanto $x = \pi/4 + k\pi/2$. Entretanto, para essa segunda família, $2x = \pi/2 + k\pi$, e então $\cos(2x) = 0$. Consequentemente $b = \cos^2(2x) = 0$, impossível para uma base de logaritmo. Assim, toda a segunda família deve ser descartada. Da primeira família, em $[0, \pi]$, permanecem somente $\pi/8$ e $5\pi/8$.

Comentário do professor

“O ponto mais importante desta questão não está na trigonometria, mas no domínio do logaritmo. Resolver apenas a igualdade $A = b$ sem controlar as condições $b > 0$, $b \neq 1$, $A > 0$ pode produzir candidatos ilegítimos. Em questões que misturam logaritmos com funções trigonométricas, as condições de existência não são um detalhe técnico: elas fazem parte da própria equação.”

RESPOSTA FINAL

2 soluções; $x = \pi/8$ e $x = 5\pi/8$. **Alternativa (B).**

QUESTÃO 14

Enunciado

Seja C_1 o círculo inscrito em um quadrado $ABCD$ de lado 2, e seja O o centro de C_1 .

Considere uma reta L passando pelo vértice A do quadrado. Um círculo variável, de centro M , tangencia externamente o círculo C_1 e também é tangente à reta L , de forma que M e O estejam no mesmo semiplano definido pela reta L .

O lugar geométrico do ponto M é:

- (A) uma elipse de focos em A e O .
- (B) um ramo de hipérbole de centro em O .
- (C) uma parábola com foco em O .
- (D) uma circunferência concêntrica a C_1 .
- (E) duas retas paralelas à reta L .

Análise da questão

Assunto	Lugar geométrico e Cônicas
Ideia central	Traduzir as duas condições de tangência em relações métricas envolvendo o centro variável M .
Estratégia	Eliminar o raio do círculo variável e reconhecer a condição foco-diretriz de uma parábola.

Resolução comentada

1. Tradução geométrica das tangências

Como C_1 está inscrito em um quadrado de lado 2, seu raio vale

$$R = 1.$$

Seja $r > 0$ o raio do círculo variável de centro M .

A tangência externa entre o círculo variável e C_1 implica que a distância entre seus centros é igual à soma dos raios:

$$MO = r + 1.$$

Por outro lado, como o círculo variável é tangente à reta L , seu raio é exatamente a distância de seu centro à reta:

$$d(M, L) = r.$$

Eliminando r , obtemos

$$MO = d(M, L) + 1. \quad (1)$$

É essa relação que revela o lugar geométrico.

2. A construção da diretriz

Considere agora uma reta L' , paralela a L , situada a uma distância 1 de L , no semiplano **oposto** àquele que contém O e M .

Como M e O estão, por hipótese, no mesmo semiplano determinado por L , temos

$$d(M, L') = d(M, L) + 1.$$

Logo, pela relação (1),

$$MO = d(M, L').$$

Portanto,

$$MO = d(M, L').$$

Mas essa igualdade é precisamente a propriedade métrica que define uma parábola:

uma parábola é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo, chamado **foco**, e de uma reta fixa, chamada **diretriz**.

Assim,

o foco é O

e

a diretriz é L' .

Consequentemente, a curva suporte do lugar geométrico de M é uma parábola de foco O .

3. Por que a reta L não é a diretriz?

Esse é um ponto conceitual importante.

Da tangência à reta L ,

$$d(M, L) = r,$$

enquanto da tangência externa aos círculos,

$$MO = r + 1.$$

Logo,

$$MO = d(M, L) + 1.$$

Portanto, L não pode ser diretamente a diretriz.

O raio 1 do círculo fixo C_1 produz justamente o deslocamento necessário:

$$d(M, L') = d(M, L) + 1.$$

A diretriz verdadeira é, portanto, uma reta L' paralela a L , transladada de uma unidade para o lado oposto a O .

4. Reversibilidade da construção

Também convém verificar que a condição obtida não é apenas necessária.

Suponha que M , situado no mesmo semiplano de O em relação a L , satisfaça

$$MO = d(M, L').$$

Como

$$d(M, L') = d(M, L) + 1,$$

segue que

$$MO = d(M, L) + 1.$$

Definindo

$$r = d(M, L),$$

temos

$$MO = r + 1.$$

Portanto, o círculo de centro M e raio r :

- é tangente à reta L ;
- é externamente tangente ao círculo C_1 , de raio 1.

Logo, a caracterização é reversível e identifica efetivamente o lugar geométrico procurado.

5. Uma sutileza geométrica

Seja

$$h = d(O, L).$$

Caso

$$0 \leq h < 1,$$

a reta L é secante ao círculo C_1 . Nessa situação, a parábola associada possui uma pequena porção no semiplano oposto a O .

Entretanto, o enunciado exige que M e O pertençam ao mesmo semiplano determinado por L . Assim, estritamente falando, apenas a parte da parábola compatível com essa restrição constitui o lugar efetivamente percorrido por M .

Isso não altera a natureza da cônica pedida pela questão:

parábola de foco O .

Caminho alternativo

Solução por Geometria Analítica

Vamos escolher um sistema cartesiano adaptado à reta L .

Tome L como eixo x :

$$L : y = 0.$$

Escolha a orientação de modo que O esteja no semiplano

$$y > 0.$$

Podemos escrever

$$O = (0, h),$$

em que

$$h = d(O, L) > 0.$$

Se

$$M = (x, y),$$

a condição de semiplano fornece

$$y > 0.$$

Como o círculo variável é tangente à reta L , seu raio vale

$$r = y.$$

A tangência externa ao círculo C_1 , cujo raio é 1, fornece

$$MO = r + 1 = y + 1.$$

Assim,

$$\sqrt{x^2 + (y - h)^2} = y + 1.$$

Elevando ao quadrado,

$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 = y^2 + 2y + 1.$$

Cancelando y^2 em ambos os membros,

$$x^2 - 2hy + h^2 = 2y + 1.$$

Isolando x^2 ,

$$x^2 = 2(h + 1)y + 1 - h^2.$$

Como

$$1 - h^2 = -(h - 1)(h + 1),$$

temos

$$x^2 = 2(h + 1) \left(y - \frac{h - 1}{2} \right).$$

Portanto,

$$x^2 = 2(h + 1) \left(y - \frac{h - 1}{2} \right).$$

Comparando com a forma canônica

$$x^2 = 4p(y - y_V),$$

obtemos

$$y_V = \frac{h - 1}{2}$$

e

$$4p = 2(h + 1),$$

de modo que

$$p = \frac{h + 1}{2}.$$

O foco possui ordenada

$$y_F = y_V + p = \frac{h - 1}{2} + \frac{h + 1}{2} = h.$$

Logo,

$$F = (0, h) = O.$$

A diretriz possui equação

$$y = y_V - p = \frac{h - 1}{2} - \frac{h + 1}{2} = -1.$$

Assim,

$$L' : y = -1,$$

que é exatamente a reta paralela a L , distante uma unidade dela e situada no semiplano oposto a O .

A abordagem analítica confirma integralmente a construção sintética:

$$\text{foco } O, \quad \text{diretriz } L'.$$

Comentário do professor

Esta é uma bela questão de **tradução geométrica**.

A dificuldade não está em manipular uma equação de cônica, mas em perceber que o raio do círculo variável funciona como uma variável intermediária que deve ser eliminada:

$$MO = r + 1, \quad d(M, L) = r.$$

Daí,

$$MO = d(M, L) + 1.$$

O passo decisivo é interpretar geometricamente o termo $d(M, L) + 1$: ele é a distância de M a uma nova reta fixa L' , paralela a L e deslocada de uma unidade.

Assim, uma configuração aparentemente envolvendo **dois círculos e uma reta** se reduz exatamente à definição foco-diretriz de uma parábola.

Há ainda um detalhe elegante de prova: o vértice A do quadrado praticamente desaparece da solução. Sua função é determinar uma reta L pertencente à configuração; ele não entra na relação métrica que caracteriza o lugar geométrico. Por isso, a alternativa que sugere uma elipse de focos A e O explora justamente uma informação visualmente destacada, mas matematicamente irrelevante para a definição da cônica.

Finalmente, em uma leitura absolutamente rigorosa, a condição de M e O estarem no mesmo semiplano pode selecionar apenas uma **porção** da parábola quando L corta C_1 . Ainda assim, a cônica que sustenta o lugar geométrico — e a única compatível com as alternativas — é uma parábola de foco O .

RESPOSTA FINAL

Parábola com foco em O .

A diretriz é a reta L' , paralela a L , situada a uma unidade de L no semiplano oposto a O .

Alternativa (C).

QUESTÃO 15

Enunciado

Em uma esfera de raio R inscreve-se um prisma regular reto de base hexagonal. Sabendo-se que a área lateral desse prisma é máxima, o seu valor em função de R é:

- (A) $\sqrt{6} R^2$
- (B) $3R^2$
- (C) $6R^2$
- (D) $2\sqrt{6} R^2$
- (E) $12R^2$

Análise da questão

Assunto	Geometria espacial e máximos
Ideia central	Relacionar o lado da base e a altura do prisma com o raio da esfera e maximizar a área lateral sob esse vínculo.
Estratégia	Usar o fato de que o raio circunscrito de um hexágono regular é igual ao seu lado, obter a relação $a^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$ e maximizar o produto ah .

Resolução comentada

1. Relação entre as dimensões

Seja a o lado do hexágono regular da base e h a altura do prisma.

Num hexágono regular, o raio da circunferência circunscrita à base é igual ao lado. Portanto, esse raio vale

$$a.$$

Como o prisma está inscrito na esfera, seus 12 vértices pertencem à superfície esférica.

Por simetria, o centro da esfera coincide com o centro do prisma. A distância desse centro a qualquer vértice do prisma é igual a R .

Considerando um vértice da base superior, suas componentes radial e vertical relativamente ao centro da esfera são, respectivamente,

$$a$$

e

$$\frac{h}{2}.$$

Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Logo,

$$a^2 + \frac{h^2}{4} = R^2. \quad (1)$$

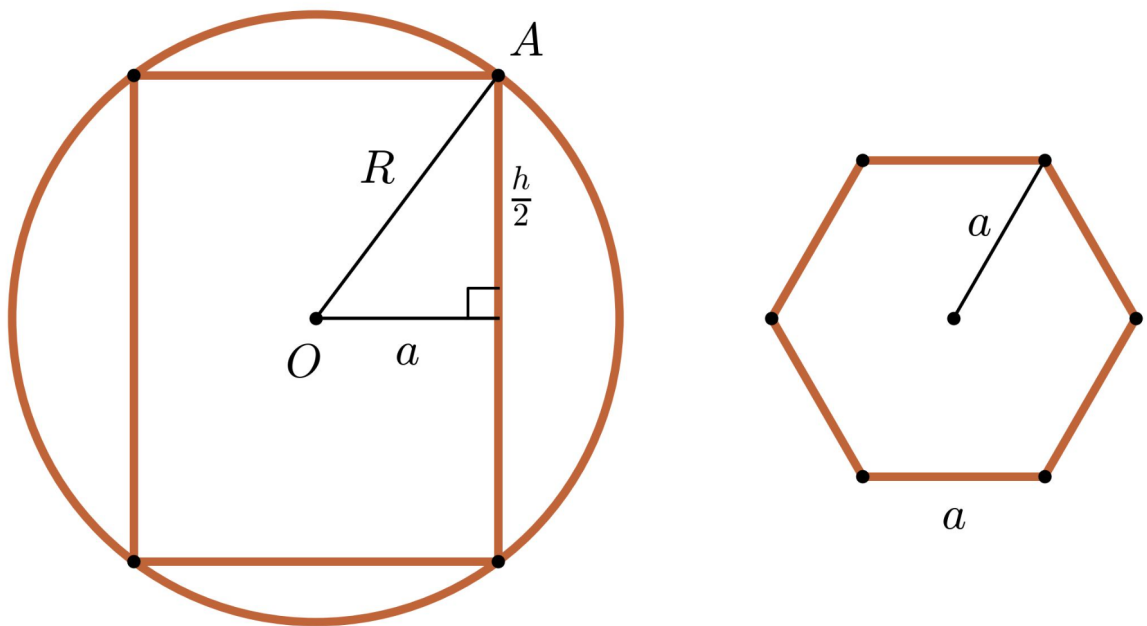


Figura — seção axial do prisma inscrito na esfera e base hexagonal regular.

2. Área lateral

O prisma possui 6 faces laterais retangulares, cada uma com dimensões

$$a \times h.$$

Portanto, sua área lateral é

$$S_\ell = 6ah. \quad (2)$$

3. Maximização

Defina

$$k = \frac{h}{2}.$$

A relação (1) torna-se

$$a^2 + k^2 = R^2,$$

enquanto, pela relação (2),

$$S_\ell = 6a(2k) = 12ak.$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$ak \leq \frac{a^2 + k^2}{2}.$$

Como

$$a^2 + k^2 = R^2,$$

segue que

$$ak \leq \frac{R^2}{2}.$$

Consequentemente,

$$S_\ell = 12ak \leq 12 \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Portanto,

$$S_\ell \leq 6R^2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$a = k.$$

Logo, no caso de máximo,

$$a = k = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

e

$$h = 2k = R\sqrt{2}.$$

Portanto, a área lateral máxima é

$$S_{\ell, \max} = 6R^2.$$

4. Verificação

Substituindo

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

e

$$h = R\sqrt{2}$$

na expressão da área lateral,

$$S_{\ell} = 6ah,$$

obtemos

$$S_{\ell} = 6 \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2}.$$

Logo,

$$S_{\ell} = 6 \cdot \frac{2R^2}{2} = 6R^2.$$

A condição de inscrição também é satisfeita:

$$a^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} = R^2.$$

Verificação confirmada.

Além disso,

$$h = 2a.$$

Portanto, a seção axial que contém duas arestas laterais opostas é um quadrado de lado

$$R\sqrt{2}$$

inscrito em um círculo máximo da esfera.

Uma varredura numérica de

$$a \in (0, R)$$

confirma que a área lateral atinge o máximo

$$6R^2$$

quando

$$a = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,7071R.$$

Caminho alternativo

A seção axial transforma o problema em um retângulo inscrito

Considere a seção axial do prisma que passa pelo eixo do sólido e por dois vértices opostos de cada base.

Como a base é um hexágono regular de lado a , a distância entre dois vértices opostos é

$$2a.$$

Assim, essa seção axial é um retângulo de lados

$$2a$$

e

$$h.$$

Como os quatro vértices desse retângulo pertencem à esfera, a seção está inscrita em um círculo máximo de raio R .

Logo, a diagonal do retângulo é o diâmetro do círculo:

$$\sqrt{(2a)^2 + h^2} = 2R.$$

Portanto,

$$4a^2 + h^2 = 4R^2. \quad (3)$$

A área desse retângulo axial é

$$A_{\text{axial}} = 2ah.$$

A área lateral do prisma vale

$$S_{\ell} = 6ah,$$

portanto

$$S_{\ell} = 3A_{\text{axial}}. \quad (4)$$

Assim, basta maximizar a área do retângulo inscrito no círculo de raio R .

Se seus lados são

$$p = 2a$$

e

$$q = h,$$

então sua diagonal é $2R$, de modo que

$$p^2 + q^2 = 4R^2.$$

Como

$$(p - q)^2 \geq 0,$$

temos

$$p^2 + q^2 \geq 2pq.$$

Logo,

$$4R^2 \geq 2pq,$$

isto é,

$$pq \leq 2R^2.$$

Portanto,

$$A_{\text{axial}} \leq 2R^2.$$

A igualdade ocorre quando

$$p = q,$$

ou seja, quando a seção axial é um quadrado.

Usando (4),

$$S_{\ell} \leq 3 \cdot 2R^2.$$

Assim,

$$S_{\ell} \leq 6R^2.$$

Consequentemente,

$$S_{\ell, \max} = 6R^2.$$

Comentário do professor

O ponto-chave é perceber que, no hexágono regular, o **raio da circunferência circunscrita é igual ao lado** a — não ao apótema. A partir daí, o problema espacial reduz-se a maximizar um produto sob uma relação pitagórica. A leitura pela seção axial é especialmente eficiente: o máximo ocorre exatamente quando essa seção retangular se torna um quadrado.

RESPOSTA FINAL

$$S_{\ell, \max} = 6R^2.$$

Alternativa (C).

Gabarito — Matemática IME 2027

Questão	Alternativa	Assunto
1	C	Sistemas de numeração
2	B	Análise combinatória
3	C	Polinômios
4	B	Determinantes / Vandermonde
5	D	Números complexos / PG
6	D	Complexos / Cônicas
7	C	Relações de Girard
8	B	Equação exponencial
9	B	Polinômios ciclotômicos
10	B	Probabilidade
11	A	Geometria analítica
12	A	Trigonometria
13	B	Logaritmos / Trigonometria
14	C	Lugar geométrico
15	C	Geometria espacial