EDIÇÃO COMENTADA

PUC-Rio 2027

Matemática

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

Matemática - Prova discursiva (Grupo 1), questões 1 a 4
2º dia, tarde · 15 de outubro de 2026

4
questões discursivas

4
assuntos no mapa

10
pontos (2,5 por questão)

Questão	Conteúdo principal	Nível sugerido
01	Triângulo retângulo 5-12-13 e quadrados inscritos	Intermediário
02	Hipérbole e circunferência (geometria analítica)	Avançado
03	Função modular e função iterada	Avançado
04	Probabilidade total	Intermediário

A prova articula geometria plana, geometria analítica, funções e probabilidade: os itens partem de aplicações diretas e avançam para discussão de casos e argumentação.

Como usar este material

Resolva cada questão antes de consultar a análise e a resolução comentada. Use o mapa para revisar os assuntos e confira a resposta final ao terminar.

Este material é um comentário do professor, com resoluções produzidas e conferidas de forma independente. Não é o padrão de respostas oficial da PUC-Rio.
Fontes: caderno de prova e gabarito oficiais do Concurso Vestibular PUC-Rio 2027 (2º dia, tarde, Grupo 1), divulgados em 16/10/2026 em dsi.puc-rio.br/vestibular.

QUESTÃO 1

Enunciado

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Sabe-se que os segmentos AB e AC medem 5 e 12, respectivamente.

a) Quanto mede o segmento BC?
b) Sabe-se que $ADEF$ é um quadrado, que D está no segmento AB, que E está no segmento BC e que F está no segmento AC. Quanto mede o segmento AD?
c) Sabe-se que $PQRS$ é um quadrado, que P e Q estão no segmento BC, que R está no segmento AC e que S está no segmento AB. Quanto mede o segmento PQ?

Análise da questão

Assunto	Semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo.
Ideia central	Cada quadrado inscrito recorta um triângulo menor, semelhante ao original — a razão de semelhança entrega o lado.
Estratégia	O item b) sai do triângulo BDE; o item c), da altura relativa à hipotenusa.

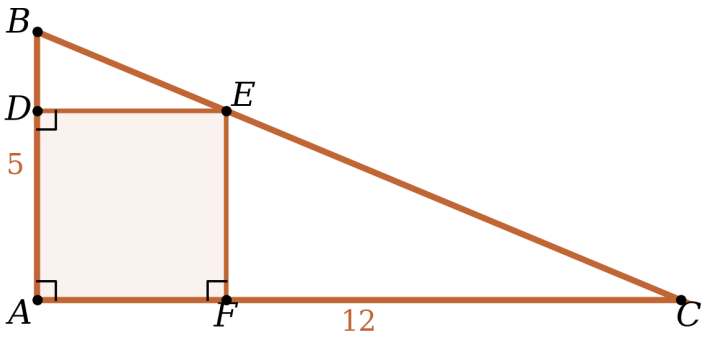
Resolução comentada

a) A hipotenusa. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \quad \Longrightarrow \quad BC = 13.$$

b) O quadrado do vértice. Seja $s = AD$. Como $ADEF$ é quadrado, $DE = s$ e $DE \parallel AC$; logo o triângulo BDE é retângulo em D e semelhante a BAC (caso AA: o ângulo em B é comum). Da semelhança,

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \Longrightarrow \frac{5-s}{5} = \frac{s}{12} \Longrightarrow 60 - 12s = 5s \Longrightarrow s = \frac{60}{17}.$$



Item b): o quadrado ADEF no vértice do ângulo reto.

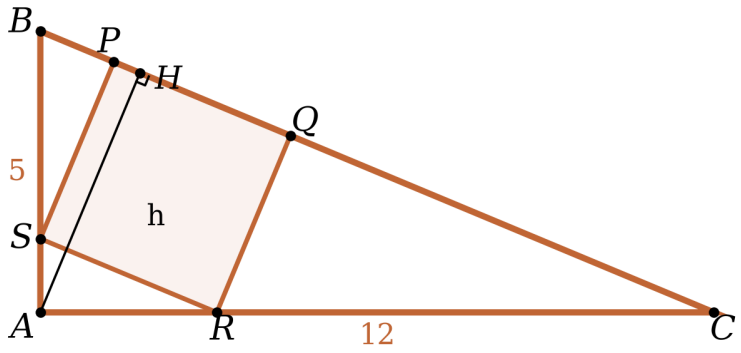
c) O quadrado da hipotenusa. Sejam $t = PQ$ e H o pé da altura relativa à hipotenusa, com $h = AH$.

> **Lembrete.** No triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é $h = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$: basta calcular a área de duas formas, $\dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{BC \cdot h}{2}$.

Aqui, $h = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13}$. Como $PQRS$ é quadrado, $SR \parallel BC$ e a distância entre essas paralelas é o próprio lado t. O triângulo ASR é semelhante a ABC, e sua altura relativa ao lado $SR = t$ mede

$h - t$. Portanto,

$$\frac{SR}{BC} = \frac{h-t}{h} \implies \frac{t}{13} = \frac{h-t}{h} \implies t\,(13+h) = 13h \implies t = \frac{13h}{13+h} = \frac{780}{229}.$$



Item c): o quadrado $PQRS$ apoiado na hipotenusa, e a altura $AH = h$.

Comentário do professor

Dois quadrados inscritos no mesmo triângulo, dois tamanhos diferentes: o quadrado do vértice, $\frac{60}{17} \approx 3{,}53$, é maior que o da hipotenusa, $\frac{780}{229} \approx 3{,}41$. Vale generalizar em sala: no triângulo retângulo de catetos a e b, hipotenusa c e altura h, o quadrado do vértice mede $\frac{ab}{a+b}$ e o da hipotenusa mede $\frac{ch}{c+h}$ — as duas fórmulas nascem da mesma semelhança. E o 5-12-13 é o segundo terno pitagórico mais famoso do vestibular: reconhecê-lo de cara dispensa a conta do item a).

RESPOSTA FINAL

a) $BC = 13$; b) $AD = \frac{60}{17}$; c) $PQ = \frac{780}{229}$.

QUESTÃO 2

Enunciado

Seja H a hipérbole de equação $2x^2 - y^2 = -1$. Para $r > 0$, seja C_r a circunferência de raio r e centro $(0, r+1)$.

a) A circunferência C_2 tem raio 2 e centro $(0, 3)$. Qual é a equação de C_2?
b) Quais são os pontos de interseção entre a hipérbole H e a circunferência C_2?
c) Em função de r, quantos pontos de interseção no plano $\mathbb{R}^2$ existem entre a hipérbole H e a circunferência C_r? Divida em casos se necessário.

Análise da questão

Assunto	Geometria analítica — interseção de cônicas.
Ideia central	Eliminar x^2 entre as equações reduz o problema a uma equação do 2º grau em y, cujo discriminante é um quadrado perfeito.
Estratégia	Resolver o sistema no item b) e, no item c), discutir quantas soluções geométricas cada raiz gera — lembrando que a hipérbole $y^2 - 2x^2 = 1$ exige $y^2 \geq 1$.

Resolução comentada

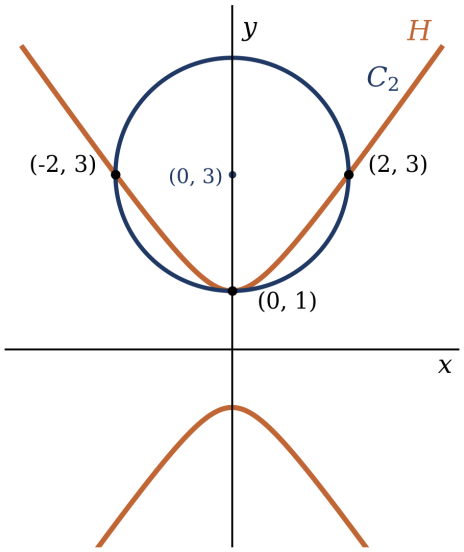
a) A circunferência C_2. Centro $(0,3)$ e raio 2:

$$C_2:\ x^2+(y-3)^2=4$$

b) Interseção de H e C_2. Da equação de C_2, $x^2=4-(y-3)^2$. Substituindo em $2x^2-y^2=-1$:

$$2\left(4-(y-3)^2\right)=y^2-1 \implies 8-2y^2+12y-18=y^2-1 \implies y^2-4y+3=0,$$

donde $y=1$ ou $y=3$. Para $y=1$: $x^2=0$, e temos o ponto $(0,1)$. Para $y=3$: $x^2=4$, e temos os pontos $(2,3)$ e $(-2,3)$. Os três pertencem a H e a C_2 (verificação direta).



Item b): H e C_2 intersectam-se em $(0,1)$, $(2,3)$ e $(-2,3)$.

c) O caso geral C_r. A equação de C_r é $x^2+(y-r-1)^2=r^2$, isto é, $x^2=-y^2+2(r+1)\,y-2r-1$. Substituindo $2x^2=y^2-1$:

$$y^2-1=-2y^2+4(r+1)\,y-4r-2 \quad\implies\quad 3y^2-4(r+1)\,y+(4r+1)=0.$$

O discriminante é um quadrado perfeito:

$$\Delta=16(r+1)^2-12(4r+1)=16r^2-16r+4=4(2r-1)^2,$$

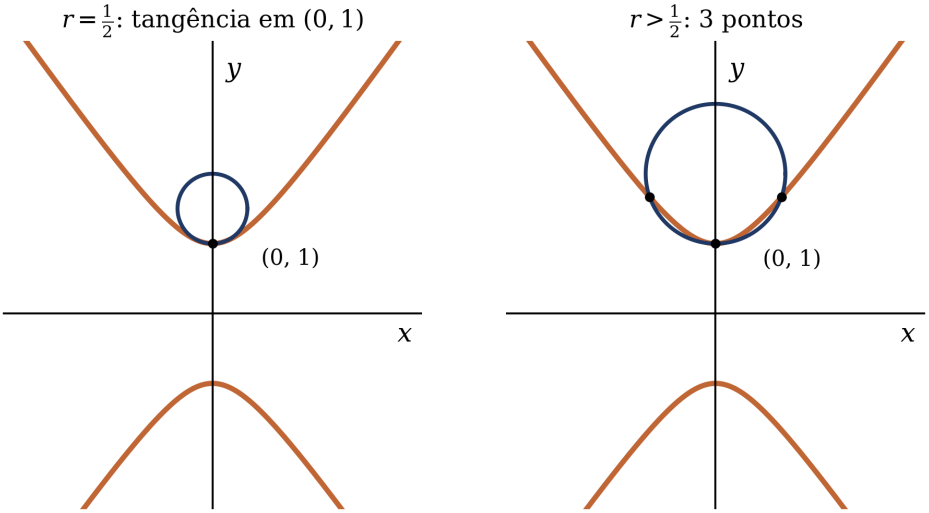
e as raízes são

$$y=\frac{4(r+1)\pm 2(2r-1)}{6} \quad\implies\quad y=1 \quad\text{ou}\quad y=\frac{4r+1}{3}.$$

A raiz $y=1$ dá $x^2=\frac{1-1}{2}=0$: o ponto $(0,1)$ — que está em H e pertence a toda C_r, pois a distância do centro $(0,r+1)$ a $(0,1)$ é exatamente r.

A raiz $y=\frac{4r+1}{3}$ só gera ponto se $y^2\geq 1$. Como $r>0$, temos $y>0$, e $y\geq 1 \iff 4r+1\geq 3 \iff r\geq\frac{1}{2}$. (O ramo inferior da hipérbole, $y\leq -1$, nunca aparece: as únicas soluções do sistema são as duas acima, ambas positivas.) Assim:

- se $0<r<\frac{1}{2}$: apenas o ponto $(0,1)$ — **1 ponto**;
- se $r=\frac{1}{2}$: as raízes coincidem em $y=1$ (raiz dupla) e a circunferência tangencia H em $(0,1)$ — **1 ponto**;
- se $r>\frac{1}{2}$: além de $(0,1)$, os dois pontos $\left(\pm\sqrt{\dfrac{y^2-1}{2}},\ \dfrac{4r+1}{3}\right)$ — **3 pontos**.



O caso-limite $r = \frac{1}{2}$ (tangência) e o caso $r > \frac{1}{2}$ (3 pontos).

Comentário do professor

O coração da questão é o discriminante quadrado perfeito: a conta foi desenhada para fatorar. Repare que $(0, 1)$ é ponto de H e pertence a todas as circunferências da família — o item b) já entregava isso, e a prova conversa entre os itens. No caso-limite $r = \frac{1}{2}$, a raiz é dupla, mas o ponto é um só: contar pontos de interseção não é contar raízes com multiplicidade. É o tipo de detalhe que separa o 2,5 do 2,0.

RESPOSTA FINAL

a) $x^2 + (y-3)^2 = 4$; b) $(0,1)$, $(2,3)$ e $(-2,3)$; c) 1 ponto se $0 < r \leq \frac{1}{2}$ e 3 pontos se $r > \frac{1}{2}$.

QUESTÃO 3

Enunciado

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{2}\,x + \frac{15}{4}\,(|x-1| - |x+1|)$.

a) Calcule o valor de $f(1)$.

b) Encontre todas as soluções reais da equação $f(x) = 0$.

c) Determine o número de soluções reais distintas da equação $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) = \frac{x}{2}$.

Análise da questão

Assunto	Função modular e composição de funções.
Ideia central	Abertos os módulos, f é afim por partes, com três gomos — e cada iteração triplica os gomos.
Estratégia	Os itens a) e b) saem intervalo a intervalo; o item c) conta as soluções sem expandir $f \circ f \circ f$, usando que cada gomo da iterada varre $[-5, 5]$ inteiro.

Resolução comentada

Os três gomos. O primeiro passo é abrir $|x-1|-|x+1|$ nos intervalos determinados por -1 e 1:

$$|x-1|-|x+1| = \begin{cases} 2, & x \le -1 \\ -2x, & -1 \le x \le 1 \\ -2, & x \ge 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}(x+3), & x \le -1 \\ -5x, & -1 \le x \le 1 \\ \frac{5}{2}(x-3), & x \ge 1 \end{cases}$$

a) $f(1) = -5$ — tanto pelo gomo do meio quanto pelo da direita, pois f é contínua.

b) Em cada gomo: $\frac{5}{2}(x+3) = 0$ dá $x = -3$ (vale: $-3 \le -1$); $-5x = 0$ dá $x = 0$; $\frac{5}{2}(x-3) = 0$ dá $x = 3$. As soluções são -3, 0 e 3.

c) Três observações resolvem sem expandir a iterada.

(i) f é ímpar. Trocando x por $-x$: $|-x-1|-|-x+1| = |x+1|-|x-1|$, logo $f(-x) = -f(x)$. Então $f^3 = f \circ f \circ f$ também é ímpar.

(ii) f varre $[-5,5]$ três vezes. $f(-5) = -5$, $f(-1) = 5$, $f(1) = -5$ e $f(5) = 5$: em cada um dos intervalos $[-5,-1]$, $[-1,1]$ e $[1,5]$, f é afim e tem imagem exatamente $[-5,5]$.

(iii) Cada iteração triplica os gomos. Se num intervalo f^n é afim com imagem $[-5,5]$, os dois pontos em que f^n vale -1 e 1 o dividem em três partes; em cada uma, $f^{n+1} = f \circ f^n$ volta a ser afim com imagem $[-5,5]$, por (ii). Por indução, f^3 tem $3^3 = 27$ gomos afins em $[-5,5]$, cada um varrendo $[-5,5]$ inteiro.

Agora a contagem. Em cada gomo, o coeficiente angular de f^3 é um produto de três números do conjunto $\left\{\frac{5}{2}, -5\right\}$, com módulo pelo menos $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} > \frac{1}{2}$. Se $[a,b]$ é um gomo, f^3 vai de ± 5 a ∓ 5, enquanto $\frac{x}{2}$ fica presa em $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$; assim $g(x) = f^3(x) - \frac{x}{2}$ é estritamente monótona em $[a,b]$ e tem sinais opostos nos extremos: **exatamente uma raiz por gomo**. São 27 raízes em $[-5,5]$.

Fora de $[-5,5]$ não há solução: para $x \ge 5$, tem-se $f(x) \ge 5$, e f^3 é afim de coeficiente $\frac{125}{8}$ com $f^3(5) = 5 > \frac{5}{2}$; como $\frac{125}{8} > \frac{1}{2}$, segue que $f^3(x) > \frac{x}{2}$ para todo $x \ge 5$. Por (i), $f^3(x) < \frac{x}{2}$ para $x \le -5$.

Total: **27 soluções reais distintas**.

Comentário do professor

A armadilha do item c) é sair expandindo $f(f(f(x)))$ na raça: são 27 expressões, inviável a lápis. O caminho é enxergar a estrutura — cada iteração triplica os gomos, cada gomo varre $[-5,5]$, e a reta $\frac{x}{2}$, de inclinação pequena, intersecta cada gomo uma única vez. Por isso a resposta é $3^3 = 27$. E a prova amarra os itens: o b) dá os zeros de f, e os valores que organizam o item c) são pontos fixos, $f(5) = 5$ e $f(-5) = -5$.

RESPOSTA FINAL

a) $f(1) = -5$; b) $x \in \{-3,\ 0,\ 3\}$; c) 27 soluções.

QUESTÃO 4

Enunciado

Em uma gaveta há 5 caixas iguais e, em cada caixa, 4 bolas. Cada bola é branca ou preta, e as bolas são iguais, exceto pela cor. Em uma caixa há 4 bolas brancas; em outra, 3 brancas e 1 preta; em outra, 2 brancas e 2 pretas; em outra, 1 branca e 3 pretas; na caixa restante, 4 bolas pretas.

a) Retira-se da gaveta uma caixa ao acaso. Retira-se da caixa uma bola ao acaso e examina-se a sua cor. Depois disso, recoloca-se a bola na caixa e a caixa na gaveta. Qual é a probabilidade de que a bola retirada seja branca?

b) Retira-se da gaveta uma caixa ao acaso. Retiram-se da caixa todas as 4 bolas e examinam-se suas cores. Depois disso, recolocam-se as 4 bolas na caixa e a caixa na gaveta. Qual é a probabilidade de que as 4 bolas retiradas sejam da mesma cor?

c) Retira-se da gaveta uma caixa ao acaso. Retiram-se da caixa 2 bolas simultaneamente e ao acaso. Examinam-se suas cores. Qual é a probabilidade de que as 2 bolas retiradas sejam da mesma cor?

Análise da questão

Assunto	Probabilidade total.
Ideia central	A caixa entra com probabilidade $\frac{1}{5}$ e, dentro dela, a conta é combinatória clássica.
Estratégia	Somar sobre as cinco caixas — a simetria branca–preta corta o trabalho pela metade.

Resolução comentada

Numeramos as caixas de 1 a 5 pelo número de bolas brancas: a caixa k tem $5-k$ brancas e $k-1$ pretas.

a) Uma bola. Pela probabilidade total:

$$P(\text{branca}) = \frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+0\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) As quatro bolas. As 4 bolas da caixa sorteada são da mesma cor somente nas caixas 1 (todas brancas) e 5 (todas pretas):

$$P = \frac{2}{5}$$

c) Duas bolas simultâneas. Numa caixa com b bolas brancas e $4-b$ pretas, retirar 2 bolas simultaneamente da mesma cor tem probabilidade

$$\frac{C_{b,2}+C_{4-b,\,2}}{C_{4,2}}.$$

Caixa a caixa: $\dfrac{C_{4,2}}{C_{4,2}} = 1$ nas caixas 1 e 5; $\dfrac{C_{3,2}+C_{1,2}}{C_{4,2}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ nas caixas 2 e 4; e $\dfrac{C_{2,2}+C_{2,2}}{C_{4,2}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ na caixa 3. Portanto,

$$P = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3} = \frac{2}{3}.$$

Comentário do professor

A simetria do enunciado (as caixas 1 e 5 se espelham, assim como a 2 e a 4) entrega o item a) sem conta: trocando branca por preta o cenário não muda, logo a probabilidade é $\frac{1}{2}$. No item c), "simultaneamente" é sem reposição — combinação, não binômio; quem modela como duas retiradas independentes erra feio. E a recolocação das bolas nos itens a) e b) não interfere em nada: cada experimento é uma única retirada, e o ritual repetido serve só para amarrar os três itens no mesmo cenário.

RESPOSTA FINAL

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{2}{3}$.