



EDIÇÃO COMENTADA

UERJ

Discursiva 2021

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

A prova percorre leitura de dados, aritmética, funções, geometria e probabilidade. As questões finais concentram maior elaboração algébrica e geométrica.

7

grandes eixos de conteúdo

10

questões discursivas

3

questões de maior complexidade

Q	Conteúdo principal	Nível sugerido
01	Estatística: amplitude térmica	Básico
02	Divisibilidade e restrições	Básico
03	Geometria plana: perímetro e área	Básico- -intermediário
04	Progressão aritmética e médias	Básico
05	Função quadrática: domínio e imagem	Intermediário
06	Geometria espacial: cilindro, cones e volume	Intermediário
07	Geometria analítica: circunferências tangentes	Avançado
08	Probabilidade em escolhas sucessivas	Intermediário
09	Geometria plana: áreas e tangente	Avançado
10	Polinômios: divisibilidade e fatoração	Avançado

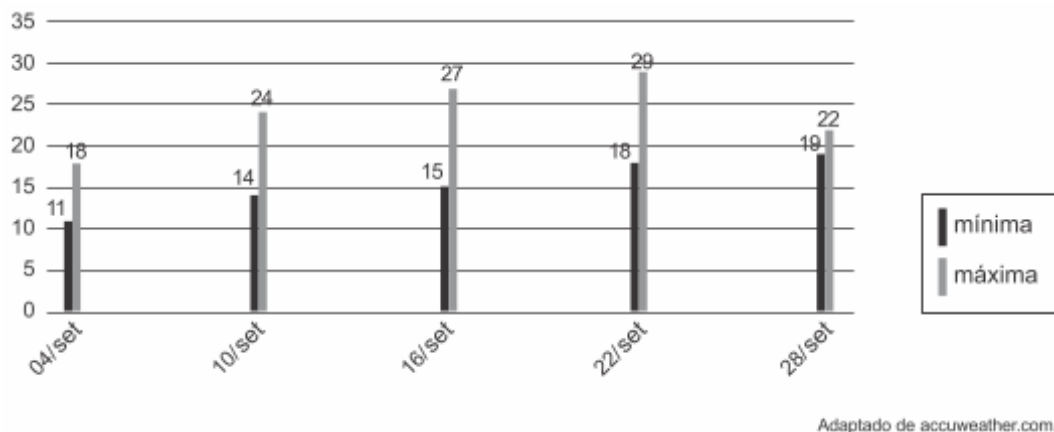
Como usar este material Resolva primeiro o caderno de questões sem consultar as soluções. Depois, compare o seu raciocínio com o gabarito comentado e registre os pontos que merecem revisão.

PARTE I

Caderno de questões

QUESTÃO 01

No gráfico a seguir, estão indicados valores de temperatura, em $^{\circ}\text{C}$, registrados no bairro de Pinheiros, em São Paulo, em setembro de 2018.



A partir dos valores diários registrados, calcule a maior diferença entre a temperatura máxima e mínima, em $^{\circ}\text{C}$, ocorrida em um mesmo dia.

QUESTÃO 02

As informações da tabela abaixo apresentam a quantidade de material que um marceneiro possui em seu estoque e a quantidade de cada material necessária para montar uma estante perfeita.

MATERIAL	QUANTIDADE TOTAL EM ESTOQUE	QUANTIDADE NECESSÁRIA PARA MONTAGEM DE ESTANTE PERFEITA
Painéis	18	01
Prateleiras horizontais	70	05
Madeiras laterais	33	02
Parafusos pequenos	320	24
Parafusos grandes	60	04

Calcule o maior número de estantes perfeitas que o marceneiro consegue montar usando apenas seu estoque.

QUESTÃO 03

Considere um robô cujo movimento é acionado por um controle remoto, como o ilustrado na imagem. As teclas N, S, L e O o direcionam, respectivamente, para Norte, Sul, Leste e Oeste. O robô percorre sempre 1 metro em linha reta a cada tecla pressionada.



Admita que o robô encontra-se em um ponto da superfície plana do chão, e as teclas são acionadas na sequência (O, O, N, L, N, L, N, L, S, L, S, S, O, O). Com isso, ele sai da posição inicial e retorna a ela, descrevendo uma trajetória que define um polígono.

Calcule a medida do perímetro e a área do polígono.

QUESTÃO 04

A sequência de cinco elementos (16, ____, ____, 43, Y) é definida do seguinte modo: em três elementos consecutivos dessa sequência, o central é sempre a média aritmética dos outros dois.

Determine o valor de Y.

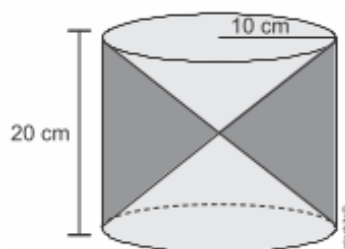
QUESTÃO 05

Seja f uma função de domínio A e conjunto imagem $B = \{-1, 0, 3, 8\}$. Os elementos de A são números positivos e, para todo x pertencente ao conjunto A , $f(x) = x^2 - 2x$.

Calcule $f(4)$ e determine o conjunto A .

QUESTÃO 06

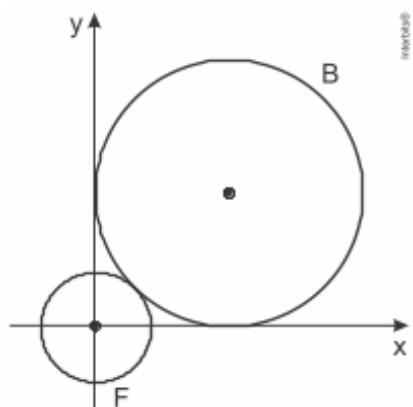
No cilindro circular reto representado a seguir, observam-se dois cones congruentes, de mesmo vértice, cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Sabe-se que o cilindro tem raio da base de 10 cm e altura de 20 cm .



Calcule, em centímetros, a altura de um desses cones. Em seguida, determine, em cm^3 , o volume da região interior ao cilindro e exterior aos cones.

QUESTÃO 07

O plano cartesiano abaixo contém duas circunferências tangentes, F e B .



Considere que a equação de F é $x^2 + y^2 = 4$ e que B é tangente aos eixos coordenados x e y .

Calcule o raio e a equação da circunferência B .

QUESTÃO 08

Cada uma das letras do nome do matemático Cavalieri (1598-1647) foi escrita em um cartão, conforme a ilustração a seguir.



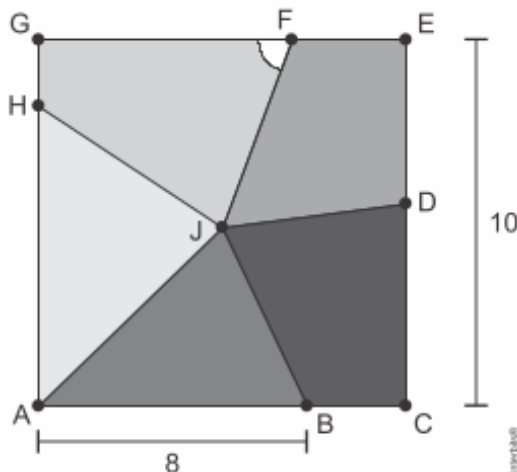
Após os cartões serem virados e embaralhados, um estudante foi desafiado a escolher um cartão de cada vez, de modo a obter a sequência exata das letras do nome. Os quatro primeiros cartões escolhidos ocupam a posição correta na sequência desejada:

CAVA ____.

Calcule a probabilidade de o estudante acertar as posições corretas das vogais no restante da palavra.

QUESTÃO 09

O quadrado ACEG, de centro J, foi dividido em cinco polígonos de mesma área: ABJ, BCDJ, DEFJ, FGHJ e HAJ. Observe a imagem:



Sabe-se que o lado do quadrado mede 10 e que $\overline{AB} = 8$.

Calcule a medida de $\overline{GH}$ e, também, a tangente do ângulo $\widehat{GFJ}$.

QUESTÃO 10

O polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 36x + 36$ é divisível por $(x - 2)^2$.

Calcule $P(2)$ e resolva a equação $P(x) = 0$.

PARTE II

Gabarito comentado

Cada solução explicita o conteúdo, a ideia central, a estratégia e o desenvolvimento matemático.

Solução da questão 1

Assunto Estatística

Ideia central Comparar as amplitudes térmicas registradas em cada dia.

Estratégia Calcular máximo menos mínimo e selecionar a maior diferença.

Tem-se que

$$\begin{aligned} 27 - 15 = 12 &> 29 - 18 = 11 \\ &> 24 - 14 = 10 \\ &> 18 - 11 = 7 \\ &> 22 - 19 = 3. \end{aligned}$$

Portanto, a maior diferença é $12^{\circ}C$ ocorrida em 16 de setembro.

Solução da questão 2

Assunto Aritmética e divisibilidade

Ideia central A quantidade de estantes é limitada pelo material mais restritivo.

Estratégia Dividir cada estoque pelo consumo unitário e tomar a menor parte inteira.

Como $\frac{18}{1} = 18$, $\frac{70}{5} = 14$, $\frac{33}{2} = 16 + \frac{1}{2}$, $\frac{320}{24} = 13 + \frac{1}{3}$ e $\frac{60}{4} = 15$, podemos afirmar que o maior número de estantes perfeitas que o marceneiro consegue montar com seu estoque é 13.

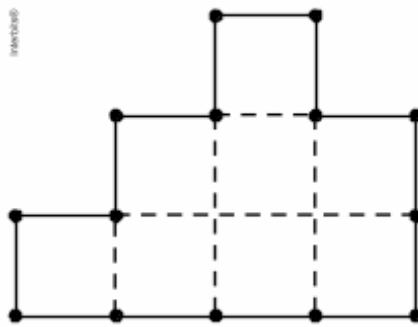
Solução da questão 3

Assunto Geometria plana

Ideia central A sequência de movimentos determina um polígono sobre uma malha unitária.

Estratégia Contar os lados percorridos e decompor a região em quadrados de área 1.

Considere a figura.



É fácil ver que o perímetro corresponde numericamente à quantidade de teclas acionadas, ou seja, 14 m.

Como o polígono é constituído de oito quadrados de lado 1 m, segue que sua área é igual a $8 m^2$.

Solução da questão 4

Assunto Progressão aritmética

Ideia central A condição de média transforma a sequência em uma progressão aritmética.

Estratégia Determinar a razão e avançar até o último termo.

Toda sequência que possui a propriedade descrita é uma progressão aritmética. Logo, se r é a razão dessa progressão aritmética, então

$$16 + 3r = 43 \Leftrightarrow r = 9.$$

Em consequência, a resposta é $Y = 43 + 9 = 52$.

Solução da questão 5

Assunto Função quadrática

Ideia central Relacionar os valores da imagem às soluções positivas da equação $f(x)$.

Estratégia Resolver cada equação e reunir apenas as raízes positivas do domínio.

Tem-se que $f(x) = x(x - 2)$. Logo, se $x > 0$, então

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\Rightarrow x \cdot (x - 2) = -1 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow x \cdot (x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Rightarrow x \cdot (x - 2) = 3 \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x) = 8 &\Leftrightarrow x \cdot (x - 2) = 8 \\ &\Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Portanto, vem $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $f(4) = 8$.

Solução da questão 6

Assunto Geometria espacial

Ideia central A simetria divide a altura do cilindro entre os dois cones congruentes.

Estratégia Subtrair do volume do cilindro os volumes dos dois cones.

Como os cones são congruentes, a altura de cada um tem medida igual a $\frac{20}{2} = 10\text{cm}$, ou seja, metade da altura do cilindro.

O volume da região interior ao cilindro e exterior aos cones é dado por

$$\begin{aligned} \pi \cdot 10^2 \cdot 20 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10 &= 2000\pi - \frac{2000}{3}\pi \\ &= \frac{4000}{3}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

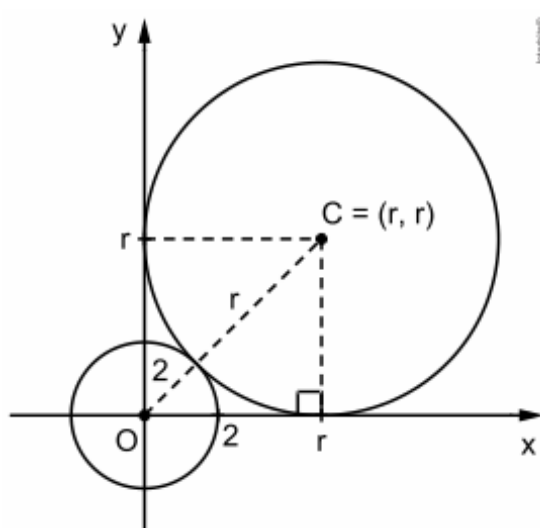
Solução da questão 7

Assunto Geometria analítica

Ideia central Usar tangência aos eixos e entre circunferências para localizar o centro.

Estratégia Modelar a distância entre centros e escrever a equação reduzida.

Considere a figura.



Seja $C = (r, r)$ o centro da circunferência B.

Sendo $x^2 + y^2 = 2^2$, podemos concluir que o raio da circunferência F mede 2.

Como B é tangente aos eixos cartesianos, o segmento $OC = 2 + r$ é a diagonal do quadrado de lado r. Logo, temos

$$\begin{aligned} 2 + r &= r\sqrt{2} && \Leftrightarrow r = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \\ &&& \Leftrightarrow r = 2(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

A equação de B é

$$(x - 2\sqrt{2} - 2)^2 + (y - 2\sqrt{2} - 2)^2 = 4(\sqrt{2} + 1)^2.$$

Solução da questão 8

Assunto Probabilidade

Ideia central As letras restantes são escolhidas sem reposição.

Estratégia Multiplicar as probabilidades condicionais de cada acerto sucessivo.

A probabilidade do estudante acertar a quinta letra é $\frac{2}{5}$.

A probabilidade do estudante acertar a sexta letra, sabendo que ele acertou a quinta letra é $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4}$.

A probabilidade do estudante acertar a sétima letra, sabendo que ele acertou as duas letras anteriores é $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$.

A probabilidade do estudante acertar a oitava letra, sabendo que ele acertou as três letras anteriores é $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

Portanto, acertando as quatro letras anteriores, ele acertará a nona letra com probabilidade $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.

A resposta é

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{30}.$$

Solução da questão 9

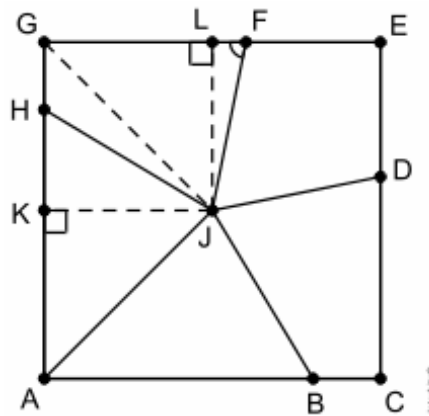
Assunto Geometria plana

Ideia central As cinco regiões possuem a mesma área.

Estratégia Usar áreas de triângulos para obter os segmentos e então calcular a tangente.

Sabendo que os cinco polígonos que constituem o quadrado ACEG são equivalentes, a área de cada um deles mede $\frac{10^2}{5} = 20$.

Considere a figura.



Se $(AHJ) = 20$ e $JK = 5$, então

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{JK} = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \cdot 5 = 20$$

$$\Leftrightarrow \overline{AH} = 8.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \overline{GH} &= \overline{AG} - \overline{AH} \\ &= 10 - 8 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ademais, sendo $JL = 5$ e $(FGHJ) = 20$, temos

$$(FGHJ) = (GHJ) + (FGJ) \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2} \cdot \overline{GH} \cdot \overline{JK} + \frac{1}{2} \cdot \overline{FG} \cdot \overline{JL}$$

$$\Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \overline{FG} \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \overline{FG} = 6.$$

Daí, como L é ponto médio de EG, vem

$$\begin{aligned} \overline{FL} &= \overline{FG} - \overline{GL} \\ &= 6 - 5 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Em consequência, encontramos

$$\tan \widehat{GFJ} = \frac{\overline{JL}}{\overline{FL}} = \frac{5}{1}$$

$$\therefore \tan \widehat{GFJ} = 5.$$

Solução da questão 10

Assunto Polinômios

Ideia central A divisibilidade fornece uma raiz dupla.

Estratégia Aplicar Briot-Ruffini duas vezes e fatorar o quociente restante.

Se $P(x)$ é divisível por $(x - 2)^2$, então $x = 2$ é raiz de $P(x)$. Logo, segue que $P(2) = 0$.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, vem

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & -4 & 13 & -36 & 36 \\ & 2 & 1 & -2 & 9 & -18 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 0 & & \end{array}$$

Daí, temos $P(x) = (x - 2)^2 (x^2 + 9)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x - 2)^2 (x^2 + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3i \text{ ou } x = 3i. \end{aligned}$$