



EDIÇÃO COMENTADA

UERJ

Discursiva 2024

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

A prova combina estatística, sistemas lineares, geometria, funções, matemática financeira e probabilidade. A progressão de dificuldade exige domínio crescente de modelagem e argumentação.

10

questões discursivas

7

grandes eixos de conteúdo

3

questões de maior complexidade

Q	Conteúdo principal	Nível sugerido
01	Estatística: média aritmética	Básico
02	Sistemas lineares e modelagem	Intermediário
03	Geometria plana: setor e segmento circular	Intermediário
04	Trigonometria e modelagem periódica	Intermediário
05	Polinômios e estudo de sinais	Avançado
06	Matemática financeira: juros simples e compostos	Intermediário
07	Função exponencial	Intermediário
08	Geometria espacial: tronco de cone	Avançado
09	Progressão geométrica e logaritmos	Avançado
10	Combinatória e probabilidade	Intermediário- -avançado

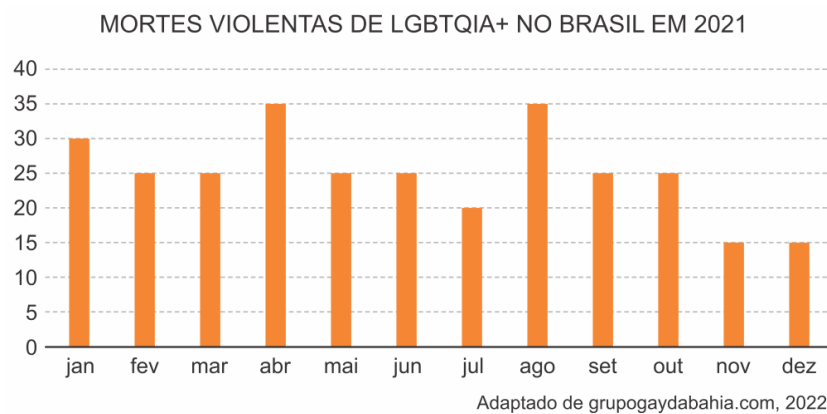
Como usar este material Resolva primeiro o caderno de questões sem consultar as soluções. Depois, compare o seu raciocínio com o gabarito comentado e registre os pontos que merecem revisão.

PARTE I

Caderno de questões

QUESTÃO 01

O gráfico a seguir apresenta o quantitativo de mortes violentas de pessoas da comunidade LGBTQIA+, no ano de 2021, no Brasil.



Com base nos dados do gráfico, calcule a média aritmética mensal de mortes violentas nessa comunidade, em 2021, no Brasil.

QUESTÃO 02

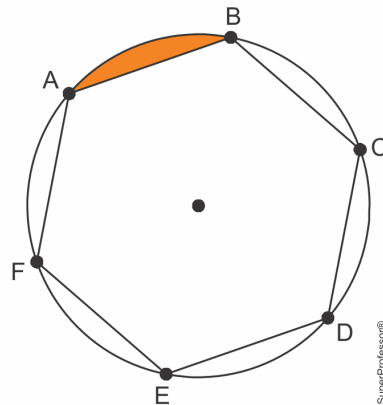
Uma nutricionista recomendou, para uma pessoa adulta, a ingestão de pão, fruta e iogurte no café da manhã. Os três alimentos, em conjunto, devem conter, exatamente, 16 g de proteínas, 124 g de carboidratos e 10 g de gorduras. Admita a seguinte quantidade de nutrientes, em gramas, em uma porção de 100 g de cada alimento:

Nutriente (g)	Porção de 100 g		
	Pão	Fruta	Iogurte
Proteínas	8	0	4
Carboidratos	60	20	2
Gorduras	4	0	3

A partir da tabela, calcule quantas porções de cada alimento essa pessoa deve ingerir de modo a consumir as quantidades de nutrientes recomendadas para seu café da manhã.

QUESTÃO 03

Um hexágono regular convexo ABCDEF está inscrito em um círculo, como mostra a figura a seguir. Sabe-se que o raio do círculo mede 6 m.



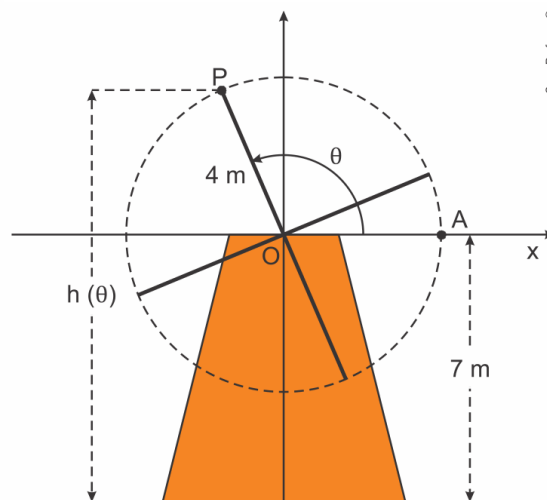
Calcule a área da região destacada, compreendida entre o menor arco AB do círculo e o lado AB do hexágono.

QUESTÃO 04

As imagens a seguir mostram a ilustração de um moinho de vento e seu esquema plano. Considere que a parte inferior do moinho é representada por um tronco de cone circular reto de bases paralelas e que suas quatro pás se movem no sentido anti-horário.



fonte: google.com



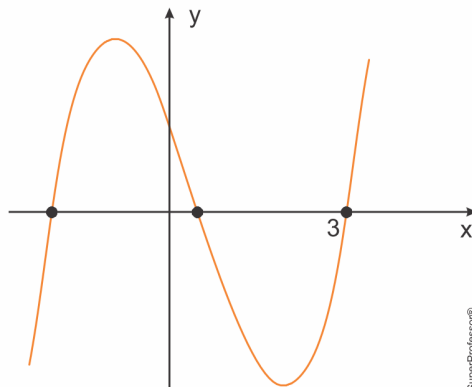
Admita as seguintes informações:

- o tronco possui altura de 7 m;
- cada pá mede 4 m de comprimento, sendo uma delas OP;
- a trajetória do movimento de rotação da extremidade P é a circunferência de centro O e raio de 4 m;
- o ângulo $\widehat{AOP} = \theta$ é medido no sentido anti-horário a partir do eixo horizontal x;
- a altura $h = h(\theta)$ do ponto P é relativa ao plano horizontal que contém a base maior do tronco.

Calcule a altura h do ponto P quando θ é igual a 120° .

QUESTÃO 05

No gráfico, está representada, fora de escala, a função polinomial P de variável real x , definida por $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.



Sabe-se que uma fatoração desse polinômio é $P(x) = (x - 3) \cdot (2x^2 + 3x - 2)$.

Calcule as raízes dessa função polinomial. Apresente, ainda, os valores de x que são as soluções da inequação $P(x) \geq 0$.

QUESTÃO 06

Uma instituição financeira oferece os seguintes tipos de aplicação a seus clientes:

- Alfa – rendimento com juros simples, a uma taxa de 12% ao ano, durante 5 anos;
- Beta – rendimento com juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano, durante 2 anos.

Considere que um cliente fez uma aplicação Alfa no valor de R\$ 2.000,00. Após 5 anos, esse cliente fez uma aplicação Beta, durante dois anos, com o montante y obtido na aplicação Alfa acrescido de x reais. Sabe-se que os juros obtidos pela aplicação Beta foram iguais a R\$ 1.050,00.

Calcule o valor de x , em reais, que foi acrescentado ao montante y .

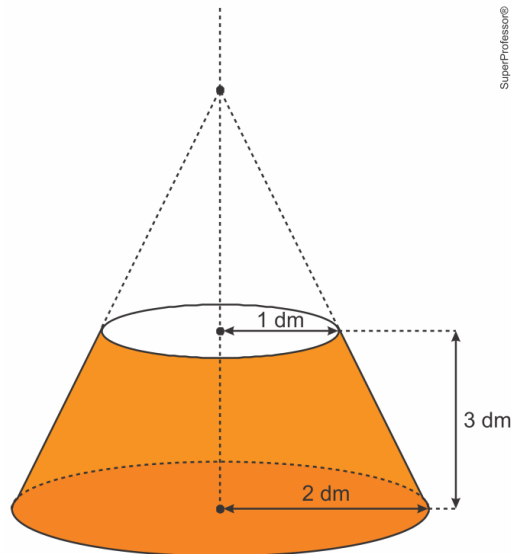
QUESTÃO 07

Um surto de gripe em uma escola teve início com apenas um aluno. O número total y de alunos infectados pelo vírus da gripe, até x horas depois do momento inicial da contaminação, é dado aproximadamente pela equação $y = 46 - k \cdot 3^{-0,1x}$, em que $0 \leq x < 20$ é uma constante positiva.

Observando que o surto teve início com $y = 1$, calcule o valor de k e, também, em quantas horas, exatamente, 31 alunos foram contaminados.

QUESTÃO 08

No tronco de cone circular reto de bases paralelas ilustrado a seguir, o raio da base menor, o raio da base maior e a altura do tronco medem, respectivamente, 1 dm, 2 dm e 3 dm.



Calcule o volume total do tronco de cone, admitindo $\pi = \frac{22}{7}$

QUESTÃO 09

Um paradoxo matemático pode ser exemplificado da seguinte maneira: considere um recipiente em que caiba, exatamente, um litro. Uma pessoa tem a tarefa de encher esse recipiente que, inicialmente, está vazio. Em um primeiro momento, ela coloca água até a metade da capacidade do recipiente. Após isso, ela deve adicionar, exatamente, a metade da quantidade de água que falta para enchê-lo, e assim sucessivamente. Dessa forma, ela terá a impressão de que o recipiente nunca ficará cheio.

Sabe-se que n é o menor número de vezes que essa pessoa terá de realizar a ação de colocar água no recipiente, até que ele esteja com mais de 95% do seu volume completo.

Considerando $\log_{10} 2 = 0,3$, calcule n .

QUESTÃO 10

Quatro pessoas decidem sortear entre elas dois presentes iguais, a partir da seguinte sequência de critérios:

- I. cada uma escolhe um número do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sem o revelar;
- II. escrevem, secretamente, esse número em um cartão;
- III. apresentam o cartão para que todas vejam seus números.

Se apenas duas pessoas escolherem o mesmo número, cada uma fica com um presente; caso contrário, repete-se o sorteio.

Calcule a probabilidade de duas pessoas ganharem os presentes no primeiro sorteio.

PARTE II

Gabarito comentado

Cada solução explicita o conteúdo, a ideia central, a estratégia e o desenvolvimento matemático.

Solução da questão 1

Assunto Estatística

Ideia central A média mensal é a razão entre o total anual e os doze meses.

Estratégia Somar as frequências do gráfico e dividir por 12.

A média aritmética é igual a:

$$M = \frac{30+25+25+35+25+25+20+35+25+25+15+15}{12}$$

$$M = \frac{300}{12}$$

$$\therefore M = 25$$

Solução da questão 2

Assunto Sistemas lineares

Ideia central Cada nutriente produz uma equação nas quantidades das porções.

Estratégia Montar e resolver o sistema de três equações e três incógnitas.

Sendo x, y e z, respectivamente, o número de porções de 100 g de pão, fruta e iogurte, temos:

$$\begin{cases} 8x + 4z = 16 \\ 60x + 20y + 2z = 124 \\ 4x + 3z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2z = -8 & (I) \\ 30x + 10y + z = 62 & (II) \\ 4x + 3z = 10 & (III) \end{cases}$$

Fazendo (I) + (III):

$$z = 2$$

Substituindo este resultado em (III):

$$4x + 3 \cdot 2 = 10$$

$$x = 1$$

Substituindo x e z em (II):

$$30 \cdot 1 + 10y + 2 = 62$$

$$y = 3$$

Portanto, a pessoa deve ingerir 1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte.

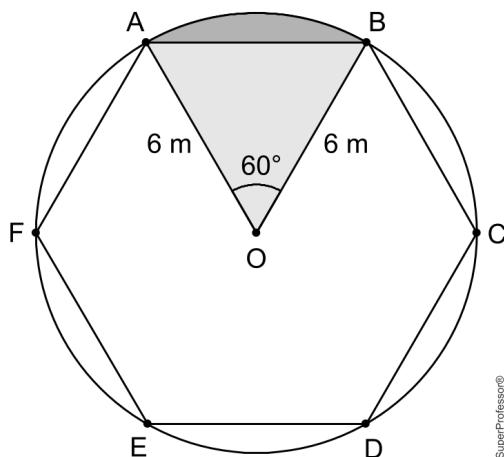
Solução da questão 3

Assunto Geometria plana

Ideia central A região pedida é um segmento circular.

Estratégia Subtrair da área do setor a área do triângulo central.

Área do setor circular de $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



$$A_s = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 6^2$$

$$A_s = 6\pi \text{ m}^2$$

Área do triângulo OAB:

$$A_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{OAB} = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Portanto, a área procurada vale:

$$A = 6\pi - 9\sqrt{3} \text{ m}^2$$

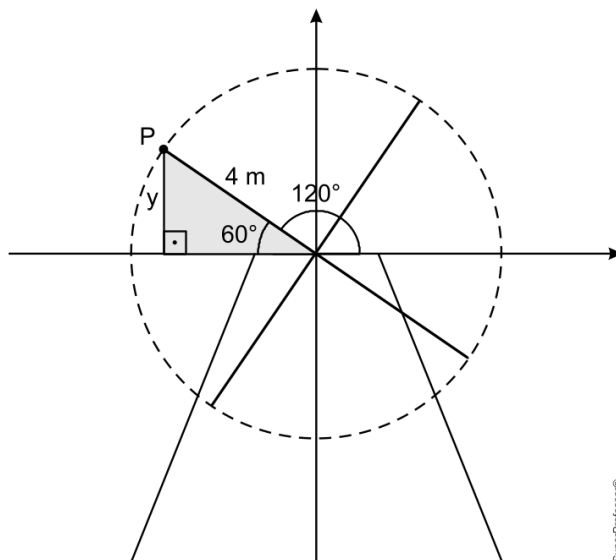
Solução da questão 4

Assunto Trigonometria

Ideia central A altura da extremidade depende da projeção vertical da pá.

Estratégia Calcular a componente vertical e somá-la à altura do tronco.

Cálculo da altura y da figura abaixo:



$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{y}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{y}{4} \\ y &= 2\sqrt{3}m\end{aligned}$$

Logo, a altura do ponto P é igual a:

$$h = 2\sqrt{3} + 7m$$

Solução da questão 5

Assunto Polinômios

Ideia central A fatoração permite localizar as raízes e organizar o estudo de sinais.

Estratégia Resolver o fator quadrático e analisar o sinal nos intervalos determinados pelas raízes.

As demais raízes são dadas por:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x = -2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$S = \left\{ -2, \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

E $P(x) \geq 0$ para:

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3$$

Solução da questão 6

Assunto Matemática financeira

Ideia central O montante da primeira aplicação compõe o capital da segunda.

Estratégia Calcular Alfa por juros simples e modelar os juros compostos de Beta.

Montante após a aplicação Alfa:

$$M_A = C_0 + J = C_0 + C_0 \cdot i \cdot t$$

$$M_A = 2000 + 2000 \cdot 0,12 \cdot 5$$

$$M_A = R\$ 3200,00$$

Dos juros da aplicação Beta, obtemos:

$$J_B = M_B - C$$

$$J_B = (C_0 + x) \cdot \left(1 + i'\right)^{t'} - (C_0 + x)$$

$$1050 = (3200 + x) \cdot 1,10^2 - (3200 + x)$$

$$1050 = 3872 + 1,21x - 3200 - x$$

$$378 = 0,21x$$

$$\therefore x = R\$ 1800,00$$

Solução da questão 7

Assunto Função exponencial

Ideia central A condição inicial determina k; o valor final determina o tempo.

Estratégia Substituir os dados na função e comparar potências de mesma base.

Para $y = 1$ e $x = 0$, temos:

$$1 = 46 - k \cdot 3^{-0,10}$$

$$1 = 46 - k \cdot 1$$

$$\therefore k = 45$$

Para $y = 31$, temos:

$$31 = 46 - 45 \cdot 3^{-0,1x}$$

$$-15 = -45 \cdot 3^{-0,1x}$$

$$\frac{1}{3} = 3^{-0,1x}$$

$$3^{-1} = 3^{-0,1x}$$

$$-1 = -0,1x$$

$$\therefore x = 10 \text{ h}$$

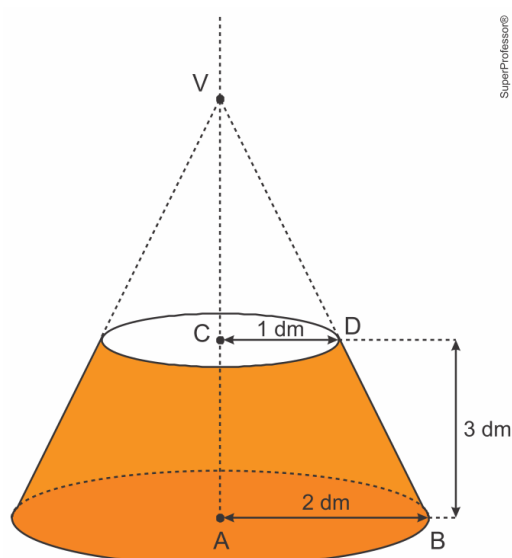
Solução da questão 8

Assunto Geometria espacial

Ideia central O tronco é a diferença entre dois cones semelhantes.

Estratégia Obter a altura do cone menor por semelhança e subtrair os volumes.

Por semelhança entre os triângulos ABV e CDV, obtemos:



$$\begin{aligned}\frac{\overline{CV}}{\overline{AV}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \\ \frac{\overline{CV}}{3+\overline{CV}} &= \frac{1}{2} \\ 2\overline{CV} &= 3 + \overline{CV} \\ \overline{CV} &= 3dm\end{aligned}$$

Logo, o volume do tronco de cone vale:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 \\ V &= 8\pi - \pi = 7 \cdot \frac{22}{7} \\ \therefore V &= 22 \text{ dm}^3\end{aligned}$$

Solução da questão 9

Assunto Progressão geométrica

Ideia central A quantidade acumulada forma uma soma geométrica.

Estratégia Expressar o volume após n etapas e resolver a desigualdade com logaritmos.

Da descrição do problema, devemos ter:

$$\begin{aligned}\left(+\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \cdot 1L &> 0,95 \cdot 1L \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} &> 0,95 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n &> 0,95 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n &< 0,05 \\ \log\left(\frac{1}{2}\right)^n &< \log\frac{1}{20} \\ n(\log 1 - \log 2) &< \log 1 - (\log 2 + \log 10) \\ n(0 - 0,3) &< 0 - 0,3 - 1 \\ -0,3n &< -1,3 \\ n &> 4,33 \\ \therefore n &= 5\end{aligned}$$

Solução da questão 10

Assunto Combinatória e probabilidade

Ideia central O evento favorável exige exatamente um par e dois valores distintos.

Estratégia Contar os pares de pessoas, as escolhas válidas e dividir pelo total de resultados.

Total de possibilidades:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

Quantidade de maneiras de 2 dentre as 4 pessoas escolherem o mesmo número:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Supondo que as pessoas A e B escolham o mesmo número, A tem 5 possibilidades de escolha, B tem 1, C tem 4 e D tem 3 possibilidades:

$$5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Número de casos favoráveis:

$$6 \cdot 60 = 360$$

Portanto, a probabilidade pedida vale:

$$\frac{360}{625} = \frac{72}{125}$$