



EDIÇÃO COMENTADA

UERJ

Discursiva 2025

Gabarito comentado e mapa de conteúdos

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

A prova articula proporcionalidade, álgebra, matrizes, geometria, otimização e probabilidade. O conjunto valoriza modelagem direta e soluções bem justificadas.

7

grandes eixos de conteúdo

10

questões discursivas

3

questões de maior complexidade

Q	Conteúdo principal	Nível sugerido
01	Proporcionalidade e comparação de custos	Básico
02	Razões: densidade demográfica	Básico
03	Frações e equação do primeiro grau	Básico
04	Operações com matrizes	Intermediário
05	Geometria plana: semelhança e área	Avançado
06	Trigonometria: lei dos cossenos	Intermediário
07	Geometria espacial e otimização trigonométrica	Avançado
08	Programação linear	Intermediário- -avançado
09	Progressão aritmética e somatórios	Intermediário
10	Probabilidade binomial	Avançado

Como usar este material Resolva primeiro o caderno de questões sem consultar as soluções. Depois, compare o seu raciocínio com o gabarito comentado e registre os pontos que merecem revisão.

PARTE I

Caderno de questões

QUESTÃO 01

Um atleta consome diariamente 3 ovos médios, comprados em embalagens com exatamente 30 ovos, ao custo de 15 reais. Ele verificou que consumiria a mesma quantidade de nutrientes comendo diariamente apenas 2 ovos grandes, comprados em embalagens com exatamente 10 ovos, ao custo de 6 reais. Calcule a diferença, em reais, entre os valores gastos pelo atleta, em 30 dias, ao trocar o consumo diário de 3 ovos médios por 2 ovos grandes.

QUESTÃO 02

Observe na tabela a seguir dados aproximados da área territorial e do número de habitantes de cinco municípios do estado do Rio de Janeiro, de acordo com o Censo de 2022.

Município	População	Área territorial (km ²)
Arraial do Cabo	31.000	155
Casimiro de Abreu	46.000	460
Maricá	198.000	360
Rio das Ostras	156.000	220
Saquarema	90.000	360

Adaptado de ibge.gov.br.

Sabe-se que a densidade demográfica de um município é calculada pela razão entre sua população e sua área territorial.

Calcule a maior e a menor densidade demográfica, em habitantes/km², do conjunto de municípios apresentados.

QUESTÃO 03

Uma pessoa realizou um empréstimo de x reais e já pagou $\frac{3}{4}$ desse valor, que correspondem a R\$ 1.050,00. Foi acordado que a dívida a ser paga corresponderá a $\frac{13}{7}$ de x .

Calcule o valor total, que será pago a mais do que o empréstimo realizado.

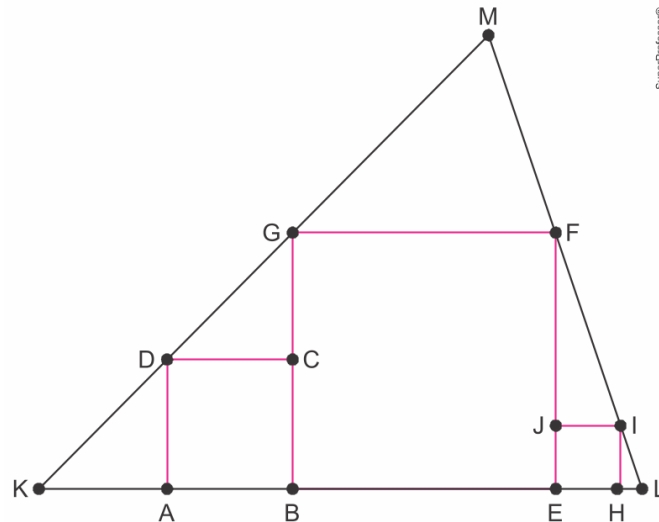
QUESTÃO 04

Considere a equação $2X + B - 2A = A \cdot B$ e, também, as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Calcule a matriz X .

QUESTÃO 05

Os quadrados ABCD, BEFG e EHIJ têm os lados AB, BE e EH contidos na base KL do triângulo KLM, ilustrado a seguir. Os pontos D e G pertencem ao lado KM, e os pontos I e F ao lado LM, do mesmo triângulo.

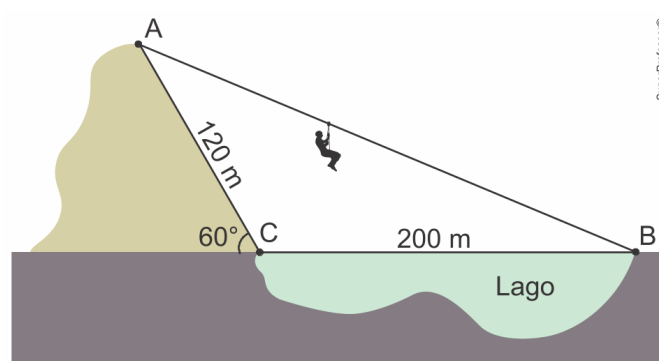


São conhecidas as seguintes medidas: $AB = 4$ cm, $BE = 8$ cm e $EH = 2$ cm.

Calcule, em cm^2 , a área do triângulo GFM.

QUESTÃO 06

Uma tirolesa foi instalada sobre um lago, conforme indica o esquema:



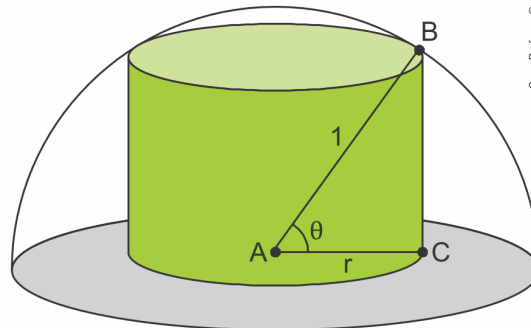
Considere as seguintes informações:

- o triângulo ABC encontra-se no plano vertical;
- AC representa uma rampa de 120 m, que forma um ângulo de 60° com o plano horizontal;
- BC é a extensão do lago, que mede 200 m.

Sabendo que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, calcule a distância, em metros, de A até B.

QUESTÃO 07

Um cilindro circular reto está contido em uma semiesfera de raio $AB = 1$, como ilustra a imagem. O raio $\overline{AC}$ da base desse cilindro mede r e o ângulo agudo $\widehat{BAC}$ mede θ graus.



Calcule a altura e a área lateral do cilindro em função de θ .

Em seguida, calcule o valor de θ para que essa área seja máxima.

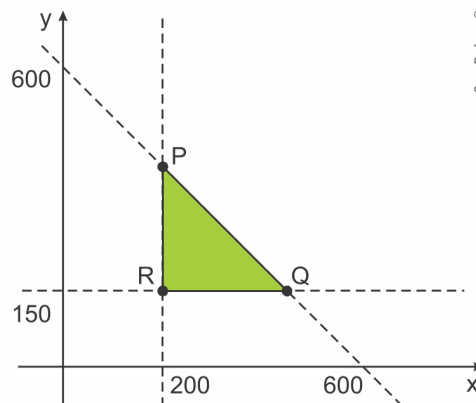
QUESTÃO 08

Uma doceira, que vende trufas de cerejas e de nozes, tem a encomenda fixa semanal de 200 trufas de cerejas (C) e de 150 de nozes (N). Se houver demanda, ela consegue fazer, no máximo, 600 trufas por semana. Os lucros por unidade vendida de C e N são, respectivamente, R\$ 4,00 e R\$ 3,00.

Considerando que a doceira faça, por semana, x unidades de C e y de N, valem as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 150 \\ x + y \leq 600 \end{cases}$$

Os pares (x, y) de números de trufas que essa doceira pode fazer estão representados, no plano cartesiano, por pontos do triângulo PQR. Observe:



Calcule, em reais, o lucro de apenas uma encomenda fixa semanal. Calcule, em reais, também, o lucro semanal máximo que a doceira pode obter com a venda de 600 trufas.

QUESTÃO 09

Considere a sequência dos números naturais ímpares e as somas S_1 e S_2 :

$$(a_n) = (1, 3, 5, 7, \dots)$$

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

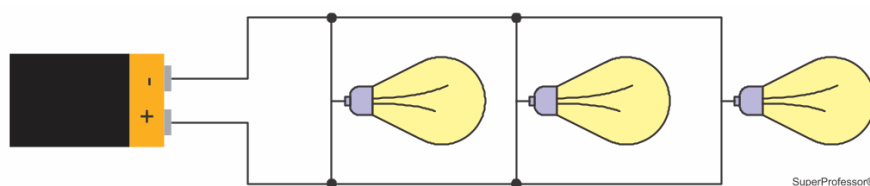
$$S_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n}$$

S_1 é a soma dos n primeiros números ímpares e S_2 é a soma dos n números ímpares seguintes.

Calcule S_2 e, também, a razão $\frac{S_1}{S_2}$.

QUESTÃO 10

Em um circuito de três lâmpadas iguais ligadas em paralelo, se uma delas queimar, as outras duas ainda permanecem acesas. Sabe-se que, ao conectar o circuito a uma bateria, a probabilidade de qualquer uma dessas lâmpadas queimarem é igual a 20%. Observe o esquema:



Calcule a probabilidade de, ao conectar o circuito, pelo menos duas lâmpadas queimarem.

PARTE II

Gabarito comentado

Cada solução explicita o conteúdo, a ideia central, a estratégia e o desenvolvimento matemático.

Solução da questão 1

Assunto Proporcionalidade

Ideia central Comparar o custo mensal dos dois padrões de consumo.

Estratégia Converter consumo em embalagens e calcular a diferença entre os gastos.

Quantia gasta com ovos médios:

$$3 \cdot 30 \frac{\text{ovos}}{\text{mês}} \cdot \frac{\text{R\$ } 15,00}{30 \text{ ovos}} = \text{R\$ } 45,00$$

Quantia gasta com ovos grandes:

$$2 \cdot 30 \frac{\text{ovos}}{\text{mês}} \cdot \frac{\text{R\$ } 6,00}{10 \text{ ovos}} = \text{R\$ } 36,00$$

Diferença entre os valores gastos:

$$\text{R\$ } 45,00 - \text{R\$ } 36,00 = \text{R\$ } 9,00$$

Solução da questão 2

Assunto Razões

Ideia central Densidade demográfica é população dividida pela área.

Estratégia Calcular as cinco razões e identificar os valores extremo.

Densidades demográficas dos municípios:

$$\begin{aligned}d_{\text{Arraial do Cabo}} &= \frac{31.000}{155} = 200 \text{ hab/km}^2, \\d_{\text{Casimiro de Abreu}} &= \frac{46.000}{460} = 100 \text{ hab/km}^2, \\d_{\text{Maricá}} &= \frac{198.000}{360} = 550 \text{ hab/km}^2, \\d_{\text{Rio das Ostras}} &= \frac{156.000}{220} \approx 709 \text{ hab/km}^2, \\d_{\text{Saquarema}} &= \frac{90.000}{360} = 250 \text{ hab/km}^2.\end{aligned}$$

Portanto, Rio das Ostras possui a maior densidade demográfica, e Casimiro de Abreu, a menor.

Solução da questão 3

Assunto Equação do primeiro grau

Ideia central A parcela paga permite recuperar o valor original do empréstimo.

Estratégia Determinar x , calcular a dívida acordada e comparar os dois valores.

Valor do empréstimo:

$$\frac{3x}{4} = 1050 \Rightarrow x = R\$1.400,00$$

Dívida a ser paga:

$$\frac{13}{7} \cdot R\$1.400,00 = R\$2.600,00$$

Valor que será pago a mais do que o empréstimo realizado:

$$R\$ 2.600,00 - R\$ 1.400,00 = R\$ 1200,00$$

Solução da questão 4

Assunto Matrizes

Ideia central Isolar a matriz X preservando a ordem dos produtos.

Estratégia Efetuar o produto AB e combinar as matrizes termo a termo.

A matriz X é dada por:

$$\begin{aligned}2X + B - 2A &= A \cdot B \\2X &= A \cdot B - B + 2A \\X &= \frac{1}{2} \cdot (A \cdot B - B + 2A)\end{aligned}$$

Matriz $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ X &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \right) \\ X &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \\ \therefore X &= \begin{bmatrix} 4 & 5/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

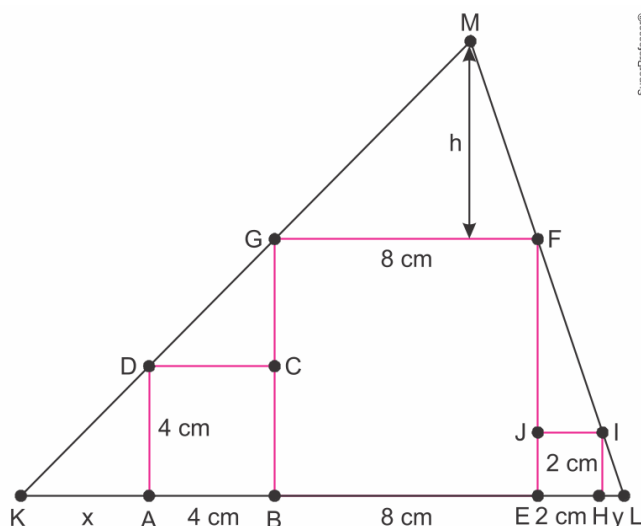
Solução da questão 5

Assunto Geometria plana

Ideia central Os quadrados determinam triângulos semelhantes dentro da figura.

Estratégia Usar semelhança para obter base e altura do triângulo GFM.

Por semelhança entre os triângulos KAD e KBG, obtemos:



$$\frac{x}{x+4} = \frac{4}{8} \Rightarrow 8x = 4x + 16 \Rightarrow x = 4cm$$

Por semelhança entre os triângulos LHI e LEF, obtemos:

$$\frac{y}{y+2} = \frac{2}{8} \Rightarrow 8y = 2y + 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}cm$$

Por semelhança entre os triângulos GFM e KLM, obtemos:

$$\frac{h}{h+8} = \frac{8}{4+4+8+2+\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{56h}{3} = 8h + 64 \Rightarrow \frac{32h}{3} = 64 \Rightarrow h = 6cm$$

Portanto:

$$A_{GFM} = \frac{8cm \cdot 6cm}{2} = 24cm^2$$

Solução da questão 6

Assunto Trigonometria

Ideia central A distância procurada é o terceiro lado de um triângulo não retângulo.

Estratégia Identificar o ângulo interno e aplicar a lei dos cossenos.

Sendo x a distância procurada, pela lei dos cossenos, chegamos a:

$$\begin{aligned} x^2 &= 120^2 + 200^2 - 2 \cdot 120 \cdot 200 \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ x^2 &= 14400 + 40000 - \boxed{2} \cdot 24000 \cdot \left(-\boxed{\frac{1}{2}}\right) \\ x^2 &= 78400 \\ \therefore x &= 280m \end{aligned}$$

Solução da questão 7

Assunto Geometria espacial

Ideia central Raio e altura são projeções trigonométricas do raio da semiesfera.

Estratégia Escrever a área lateral e maximizar a expressão usando seno do arco duplo.

Sendo h a altura do cilindro, temos:

$$\sin \theta = \frac{h}{1} \Rightarrow h = \sin \theta$$

O raio da base do cilindro é dado por:

$$\cos \theta = \frac{r}{1} \Rightarrow r = \cos \theta$$

Sendo assim, a área lateral do cilindro vale:

$$A_L = 2\pi r h = 2\pi \cos \theta \operatorname{sen} \theta = \pi \operatorname{sen} 2 \theta$$

A área será máxima para:

$$\operatorname{sen} 2 \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Solução da questão 8

Assunto Programação linear

Ideia central Uma função linear atinge o máximo em um vértice da região viável.

Estratégia Avaliar o lucro sob as restrições e priorizar o produto de maior margem.

Lucro de uma encomenda fixa semanal:

$$\begin{aligned} L &= 200 \cdot 4 + 150 \cdot 3 \\ \therefore L &= R\$1250,00 \end{aligned}$$

O lucro será máximo quando a quantidade de unidades x for máxima, ou seja, $x = 600 - 150 = 450$ e $y = 600 - 450 = 150$. Logo:

$$\begin{aligned} L_{\max} &= 4 \cdot 450 + 3 \cdot 150 \\ \therefore L_{\max} &= R\$ 2250,00 \end{aligned}$$

Solução da questão 9

Assunto Progressão aritmética

Ideia central As duas somas reúnem blocos consecutivos de números ímpares.

Estratégia Aplicar a soma da PA em cada bloco e simplificar a razão.

Cálculo de S_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + nr - r) \cdot n}{2} \\ S_1 &= \frac{(2 \cdot 1 + n \cdot 2 - 2) \cdot n}{2} = n^2 \end{aligned}$$

A soma S_2 é dada por $S_2 = (2n + 1) + (2n + 3) + \dots + (4n - 1)$. Pois

$$a_{n+1} = a_1 + (n + 1 - 1) \cdot r = 1 + n \cdot 2 = 2n + 1$$

$$a_{n+2} = a_1 + (n + 2 - 1) \cdot r = 1 + (n + 1) \cdot 2 = 2n + 3$$

$$a_{2n} = a_1 + (2n - 1) \cdot r = 1 + (2n - 1) \cdot 2 = 4n - 1$$

Logo:

$$S_2 = \frac{(2n + 1 + 4n - 1) \cdot n}{2} = 3n^2$$

Portanto, a razão pedida vale:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

Solução da questão 10

Assunto Probabilidade

Ideia central Pelo menos duas falhas reúne os casos de exatamente duas e de três lâmpadas.

Estratégia Somar as probabilidades binomiais correspondentes.

Probabilidade de duas lâmpadas queimarem:

$$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot \frac{3!}{2!} = 0,096 = 9,6\%$$

Probabilidade de as três lâmpadas queimarem:

$$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008 = 0,8\%$$

Logo, a probabilidade de pelo menos duas lâmpadas queimarem é de:

$$9,6\% + 0,8\% = 10,4\%$$