EDIÇÃO COMENTADA

Unicamp 2027

1ª fase

Matemática

Questões 49 a 60 · Prova R e Z

PROF. YURI POLITANO

POLITANO APROVA · MATEMÁTICA COM PROPÓSITO

LEITURA ESTRATÉGICA

Mapa da prova

Matemática - Prova objetiva, questões 49 a 60 · Prova R e Z

12	12	1
questões objetivas	assuntos no mapa	gabarito comentado

Questão	Alternativa	Assunto
49	A	Sistemas lineares: problema de contagem de pizzas
50	D	Geometria analítica: distância entre pontos
51	B	Determinantes e gráfico de polinômio do 3º grau
52	C	Polinômios: relações de Girard
53	D	Funções trigonométricas: valor mínimo
54	C	Progressão geométrica e soma de uma série
55	A	Matrizes e progressão aritmética
56	B	Geometria analítica: regiões do plano com módulo
57	C	Funções: injetividade e função inversa
58	D	Probabilidade e máximo divisor comum
59	D	Funções e geometria analítica: área de triângulo com desigualdades
60	A	Geometria plana: triângulo isósceles e lei dos cossenos

Gabarito conferido com o oficial da Comvest (provas R e Z, divulgado em 21/10/2026); nenhuma questão foi anulada. As letras valem para a prova R e Z. Nas provas Q, S e T a ordem das questões é outra.

Como usar este material

Em cada questão, resolva o enunciado antes de consultar a análise e a resolução comentada. Use o mapa para revisar os assuntos e confira a resposta final ao terminar. Este material é o comentário do professor, não o gabarito oficial.

QUESTÃO 49

Enunciado

49. (Unicamp 2027, 1ª fase) Um grupo de alunos que pratica judô vendeu pizzas para ajudar a pagar os custos de uma viagem para um campeonato.

A pizza de calabresa custava R$ 45,00 e a pizza de brigadeiro custava R$ 40,00. O total arrecadado foi de R$ 8.750,00 pela venda de 205 pizzas. Quantas pizzas de brigadeiro foram vendidas?

a) 95.
b) 100.
c) 105.
d) 110.

Análise da questão

Assunto	Sistemas lineares: problema de contagem de pizzas
Ideia central	Duas incógnitas (calabresas e brigadeiros), duas informações (quantidade e valor): um sistema de duas equações.
Estratégia	Chame de c e b as quantidades, monte o sistema e elimine uma variável.

Resolução comentada

1. Sistema

$$\begin{cases} c+b=205 \\ 45c+40b=8750 \end{cases}$$

2. Eliminando c

Multiplicando a primeira equação por 45: $45c+45b=9225$. Subtraindo a segunda equação:

$$5b=9225-8750=475 \Rightarrow b=95$$

Conferência: $c=205-95=110$ e $45\cdot 110+40\cdot 95=4950+3800=8750$.

Comentário do professor

Um atalho: se as 205 pizzas fossem todas de calabresa, arrecadariam R$ 9.225,00. Cada brigadeiro no lugar de uma calabresa reduz R$ 5,00, e o total tem de cair R$ 475,00, então são $475\div 5=95$ brigadeiros.

RESPOSTA FINAL

95 pizzas de brigadeiro

Alternativa (A).

QUESTÃO 50

Enunciado

50. (Unicamp 2027, 1ª fase) Olimpíada de Inverno: como o curling esquentou o coração dos brasileiros?

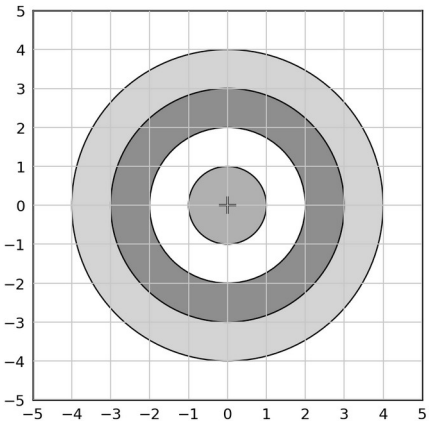
Conhecido como o "xadrez no gelo", a modalidade encanta pelas jogadas e pela famosa "vassourinha". A função, claro, não é limpar o gelo como se tira o pó do chão de casa, mas alisar a pista para tornar o gelo mais ou menos liso para as pedras atingirem o alvo.

Em uma pista de gelo de 45,7 m de extensão, duas equipes competem para lançar suas pedras de 20 kg cada no alvo formado por quatro círculos concêntricos, sendo o central chamado de botão. O jogo tem mais de uma rodada.

(Adaptado de Olimpíada de Inverno: como o curling esquentou o coração dos brasileiros? Disponível em veja.abril.com.br. Acesso em 04/05/2026.)

No curling, uma rodada consiste no arremesso de quatro pedras por cada equipe, de maneira alternada. Vence a rodada a equipe que tiver a pedra cujo centro está mais próximo do centro do alvo. Para calcular a pontuação da equipe vencedora, considere d a distância do centro do alvo até o centro da pedra do adversário que está mais próxima do centro do alvo. A pontuação da equipe vencedora é a quantidade de pedras dela cuja distância ao centro do alvo, medido do centro da pedra, é menor que d.

Considere que o alvo é composto por círculos de raios 1, 2, 3 e 4, todos centrados na origem de um plano cartesiano, conforme indicado pela figura.



Em uma rodada em que foram lançadas 4 pedras por cada equipe, temos a seguinte situação:

Os centros das pedras da equipe azul estão nos pontos $(1,2)$, $(-3/2,-1)$, $(-2,-3)$, $(4,-1)$.

Os centros das pedras da equipe vermelha estão nos pontos $(1/2,1/5)$, $(2,0)$, $(-1,1)$, $(2,-2)$.

Qual das equipes venceu essa rodada e quantos pontos foram feitos pela equipe vencedora nessa rodada?

a) Azul venceu com 1 ponto.
b) Azul venceu com 2 pontos.
c) Vermelho venceu com 1 ponto.
d) Vermelho venceu com 2 pontos.

Análise da questão

Assunto	Geometria analítica: distância entre pontos
Ideia central	A distância de cada pedra ao centro do alvo, $\sqrt{x^2+y^2}$, decide a vencedora e os pontos. Basta comparar quadrados.
Estratégia	Calcule x^2+y^2 para as oito pedras, ache a mais próxima, defina d pela melhor pedra do adversário e conte as pedras do vencedor com distância menor que d.

Resolução comentada

1. Distâncias ao quadrado

Equipe azul: $(1,2)$: 5; $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$: $\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}=3,25$; $(-2,-3)$: 13; $(4,-1)$: 17.

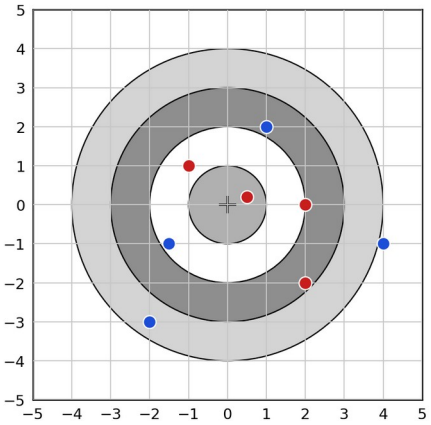
Equipe vermelha: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$: $\frac{1}{4}+\frac{1}{25}=0,29$; $(2,0)$: 4; $(-1,1)$: 2; $(2,-2)$: 8.

2. Quem venceu

A pedra mais próxima do centro é a vermelha $(\frac{1}{2},\frac{1}{5})$, com quadrado da distância 0,29. O vermelho venceu a rodada.

3. Pontuação

A melhor pedra do azul é $(-\frac{3}{2},-1)$, com $d^2=3,25$, ou seja, $d\approx 1,8$. As pedras vermelhas com $x^2+y^2<3,25$ são $(\frac{1}{2},\frac{1}{5})$ (0,29) e $(-1,1)$ (2). A pedra $(2,0)$ tem 4, que é maior que 3,25, e não conta; a $(2,-2)$ tem 8 e também não conta.



O vermelho (pontos vermelhos na figura) marca 2 pontos.

Comentário do professor

Comparar x^2+y^2 evita as raízes. O ponto $(2,0)$ é o caso de borda: está no limite do círculo de raio 2, mas a regra é comparar com d (o azul mais próximo), e não com os anéis do alvo. Os anéis são só decoração para a contagem.

RESPOSTA FINAL

Vermelho venceu com 2 pontos

Alternativa (D).

QUESTÃO 51

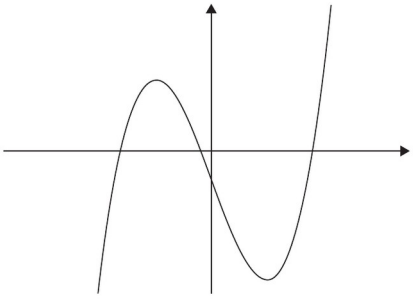
Enunciado

51. (Unicamp 2027, 1ª fase) Considere a matriz $A(x)$ dada por

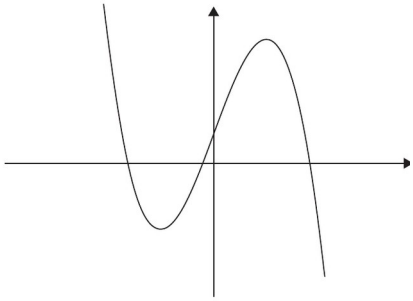
$$A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 1 & -3 \\ -7 & -3-x & 9 \\ 0 & 3 & 1-x \end{pmatrix},$$

em que x é um número real. Você que é fã do Vestibular Unicamp deve se lembrar dela: foi assunto da questão 7 da prova de matemática da segunda fase do Vestibular Unicamp de 1987. A opção que melhor representa o gráfico de $y=\det(A(x))$ é

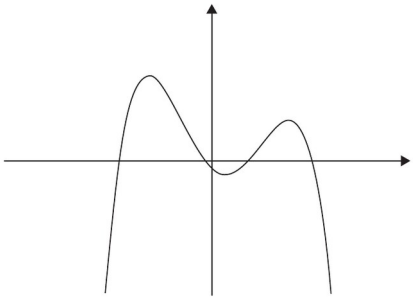
a)



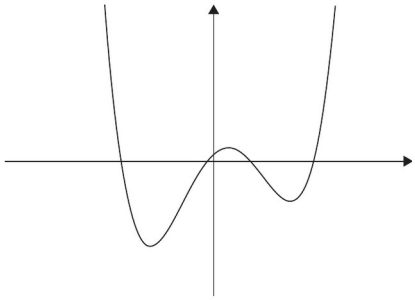
b)



c)



d)



Análise da questão

Assunto	Determinantes e gráfico de polinômio do 3º grau
Ideia central	O determinante de uma matriz 3×3 com x na diagonal é um polinômio de grau 3 em x. O sinal do coeficiente de x^3, as raízes e o valor em $x=0$ definem o gráfico.
Estratégia	Desenvolva o determinante pela 1ª coluna (tem um zero), fatore, ache as raízes e o valor em $x=0$, e compare com o formato das quatro curvas.

Resolução comentada

1. Determinante (Laplace pela 1ª coluna)

$$\det A=(2-x)((-3-x)(1-x)-27)+7((1-x)+9)$$

Como $(-3-x)(1-x)=x^2+2x-3$, o fator entre parênteses vale $x^2+2x-30$. Então:

$$(2-x)(x^2+2x-30)=-x^3+34x-60$$

$$7(10-x)=70-7x$$

$$\det A(x)=-x^3+27x+10$$

2. Raízes

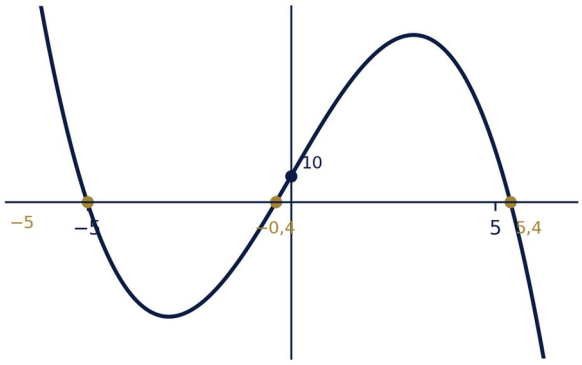
Testando divisores de 10: $x=-5$ é raiz, pois $125-135+10=0$. Fatorando:

$$-x^3+27x+10=-(x+5)(x^2-5x-2)$$

As outras raízes vêm de $x^2-5x-2=0$: $x=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2}$, isto é, $x\approx -0,37$ e $x\approx 5,37$.

3. Formato do gráfico

O coeficiente de x^3 é negativo: o gráfico vem de cima, à esquerda, e termina embaixo, à direita. Há três raízes reais, em -5, $-0,37$ e $5,37$. Em $x=0$, $y=10>0$: a curva corta o eixo y acima do eixo x, logo depois da raiz $-0,37$. Há um mínimo à esquerda de 0 (em $x=-3$) e um máximo à direita (em $x=3$).



Eliminação: (a) termina para cima, então o coeficiente de x^3 seria positivo. (c) e (d) têm formato de grau 4, com dois máximos ou dois mínimos. Só (b) vem de cima à esquerda, tem mínimo à esquerda e máximo à direita, termina para baixo e corta o eixo y em um valor positivo.

Comentário do professor

Você não precisa do gráfico exato. Três informações (sinal do coeficiente líder, número de raízes e sinal de $y(0)$) já isolam a opção. Conferi o formato diretamente na figura da prova oficial.

RESPOSTA FINAL

Gráfico (b)

Alternativa (B).

QUESTÃO 52

Enunciado

52. (Unicamp 2027, 1ª fase) Seja $p(x)=x^3+bx^2+cx+8$, com b e c números reais.

Sabendo que todas as soluções de $p(x)=0$ são inteiras, o maior valor possível para b é

a) 6.
b) 7.
c) 10.
d) 13.

Análise da questão

Assunto	Polinômios: relações de Girard
Ideia central	As raízes inteiras de um polinômio mônico de termo independente 8 são divisores de 8. As relações de Girard ligam o produto e a soma das raízes aos coeficientes.
Estratégia	Liste as ternas de inteiros com produto -8, calcule $b=-(r+s+t)$ para cada uma e fique com a maior.

Resolução comentada

1. Relações de Girard

Sejam r, s e t as raízes, todas inteiras. Em x^3+bx^2+cx+8:

$$r+s+t=-b \quad rst=-8$$

Para b ser o maior possível, a soma $r+s+t$ deve ser a menor possível.

2. Ternas de inteiros com produto -8

Para somar pouco, convém ter raízes negativas. Com produto negativo, ou há uma raiz negativa, ou as três são negativas. Veja as ternas mais relevantes:

$$(-1,-1,-8)\Rightarrow r+s+t=-10\Rightarrow b=10$$
$$(-1,-2,-4)\Rightarrow r+s+t=-7\Rightarrow b=7$$
$$(-2,-2,-2)\Rightarrow r+s+t=-6\Rightarrow b=6$$
$$(1,1,-8)\Rightarrow r+s+t=-6\Rightarrow b=6$$

As demais ternas ($(1,2,-4)$, $(1,-2,4)$, $(-1,2,4)$, $(2,2,-2)$, $(1,-1,8)$) dão soma maior, portanto b menor.

3. Conclusão

O maior valor é $b=10$, com raízes -1, -1 e -8. Conferência:
$p(x)=(x+1)(x+1)(x+8)=x^3+10x^2+17x+8$.

Comentário do professor

Aqui o parâmetro c não importa. Ele é determinado pelas raízes e só precisa ser real. A armadilha é parar nas ternas com três raízes iguais ou com raízes pequenas e esquecer a terna $(-1,-1,-8)$.

RESPOSTA FINAL

$$b=10$$

Alternativa (C).

QUESTÃO 53

Enunciado

53. (Unicamp 2027, 1ª fase) A tábua de marés consiste em uma tabela com informações sobre o horário e a altura das marés altas e baixas em algumas localidades litorâneas. Essa informação é muito utilizada no turismo, na visitação de piscinas naturais, atividade melhor aproveitada quando a maré está baixa.

Em um determinado dia, a tábua de maré de uma praia é modelada pela função

$$A(t)=\frac{7}{10}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(2t+3)\right)+\frac{13}{10},$$

com $0\leq t\leq 24$ em que $A(t)$ é a altura da maré em metros no tempo t medido em horas. Considerando essas informações, a maré estava no ponto mais baixo às

a) 06h e 18h.
b) 06h30 e 18h30.
c) 07h e 19h.
d) 07h30 e 19h30.

Análise da questão

Assunto	Funções trigonométricas: valor mínimo
Ideia central	A altura é mínima quando o seno vale -1. Isso acontece em instantes periódicos, e o intervalo $0\leq t\leq 24$ comporta dois deles.
Estratégia	Iguale o argumento do seno a $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, isole t e fique com os valores de t entre 0 e 24.

Resolução comentada

1. Quando a altura é mínima

O termo $\frac{7}{10}\operatorname{sen}(\cdot)$ é mínimo quando $\operatorname{sen}(\cdot)=-1$. Nesse caso $A=-\frac{7}{10}+\frac{13}{10}=0,6$ m.

2. Resolvendo o argumento

$$\frac{\pi}{12}(2t+3)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow 2t+3=18+24k$$

$$t=7,5+12k, k\in Z$$

3. Valores de t no intervalo

Para $k=0$: $t=7,5$. Para $k=1$: $t=19,5$. Para $k=-1$, $t<0$, e para $k=2$, $t=31,5>24$. Logo as marés baixas ocorrem em $t=7,5$ h e $t=19,5$ h, isto é, às 7h30 e às 19h30.

Comentário do professor

O período da função é $\frac{2\pi}{\pi/6}=12$ horas, o que explica a diferença de 12 h entre as duas marés baixas. Basta achar uma e somar 12.

RESPOSTA FINAL

07h30 e 19h30

Alternativa (D).

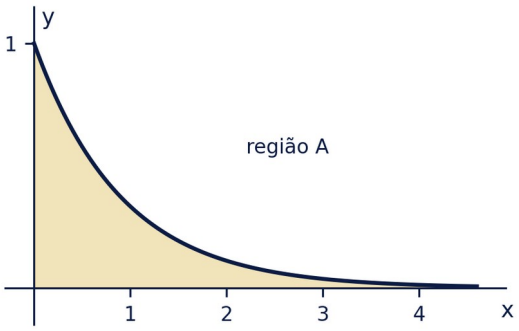
QUESTÃO 54

Enunciado

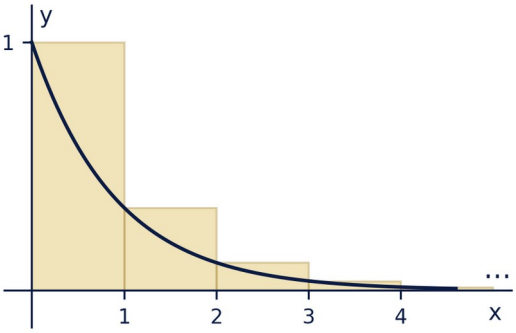
54. (Unicamp 2027, 1ª fase) Considere a região

$$A=\{(x,y)\in R^2; x\geq 0, 0\leq y\leq f(x)\}$$

em que $f(x)=\frac{1}{3^x}$, ilustrada na figura a seguir.



Considere a região B formada pela união de infinitos retângulos de base 1 e altura $f(n)$, com $n\in Z$, $n\geq 0$, como ilustrado na figura a seguir.



A região A está contida na região B, portanto, a área da região B é uma estimativa por excesso para a área da região A.

A área da região B é

a) 9/10.

b) 3/9.

c) 3/2.

d) 40/27.

Análise da questão

Assunto	Progressão geométrica e soma de uma série
Ideia central	A região B é a união de infinitos retângulos de base 1. Suas áreas formam uma progressão geométrica infinita de razão menor que 1, que tem soma finita.
Estratégia	Escreva a altura $f(n)=3^{-n}$ de cada retângulo, some a PG infinita com $S=\frac{a_1}{1-q}$ e compare com as opções.

Resolução comentada

1. Áreas dos retângulos

O retângulo de base 1 sobre $[n, n+1]$ tem altura $f(n)=\frac{1}{3^n}$, com $n=0,1,2,\ldots$ Logo sua área é $\frac{1}{3^n}$.

2. Soma da PG infinita

$$\text{área de } B = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$$

É uma PG com $a_1=1$ e razão $q=\frac{1}{3}$, com $|q|<1$:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

Comentário do professor

O enunciado pede a área de B, a estimativa por excesso, e não a área de A. Por curiosidade, a área exata de A é $\int_0^{\infty} 3^{-x}\,dx=\frac{1}{\ln 3}\approx 0,91$, menor que $\frac{3}{2}$, como a figura sugere. A opção 9/10 é a tentação de quem confunde A com B.

RESPOSTA FINAL

$$\frac{3}{2}$$

Alternativa (C).

QUESTÃO 55

Enunciado

55. (Unicamp 2027, 1ª fase) Considere a matriz

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

em que as entradas a, b, c, d formam, nessa ordem, uma PA de razão negativa. Sabendo que o determinante de M é -8 e o traço de M, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de M, vale -4, o valor de a é

a) 1.
b) -1.
c) 5.
d) -5.

Análise da questão

Assunto	Matrizes e progressão aritmética
Ideia central	Escrever as quatro entradas em função de a e da razão r faz o determinante depender só de r.
Estratégia	Calcule o determinante em função de r, use $r<0$ e depois use o traço para achar a.

Resolução comentada

1. Entradas em PA

$$b=a+r, c=a+2r, d=a+3r$$

2. Determinante

$$\det M=ad-bc=a(a+3r)-(a+r)(a+2r)=-2r^2$$

Como $\det M=-8$: $r^2=4$. A razão é negativa, então $r=-2$.

3. Traço

$$a+d=2a+3r=-4\Rightarrow 2a-6=-4\Rightarrow a=1$$

Conferência: a PA é $1, -1, -3, -5$. Então $\det M=1\cdot(-5)-(-1)(-3)=-8$ e o traço é $1+(-5)=-4$.

Comentário do professor

Se a condição de razão negativa fosse esquecida, $r=2$ daria $a=-5$, que é a alternativa (d). Ela é o distrator para quem usa $r=+2$.

RESPOSTA FINAL

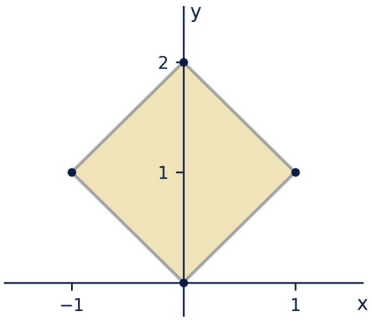
$$a=1$$

Alternativa (A).

QUESTÃO 56

Enunciado

56. (Unicamp 2027, 1ª fase) Considere a região sombreada da figura a seguir consistindo de um quadrado com vértices nos pontos $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,2)$.



O conjunto que descreve essa região é

a) $\{(x,y) \in R^2 : |x| \geq y \geq 2 - |x|\}$.

b) $\{(x,y) \in R^2 : |x| \leq y \leq 2 - |x|\}$.

c) $\{(x,y) \in R^2 : |x| \geq y \geq 2 + |x|\}$.

d) $\{(x,y) \in R^2 : |x| \leq y \leq 2 + |x|\}$.

Análise da questão

Assunto	Geometria analítica: regiões do plano com módulo
Ideia central	Os lados do quadrado são retas de coeficiente angular ± 1. Os dois lados de baixo formam o gráfico de $y = \|x\|$ e os dois de cima formam o de $y = 2 - \|x\|$.
Estratégia	Identifique a curva que limita a região por baixo e por cima, e depois teste um ponto interno.

Resolução comentada

1. Fronteira inferior

Os lados de $(0,0)$ a $(1,1)$ e de $(0,0)$ a $(-1,1)$ estão sobre $y = x$ e $y = -x$, ou seja, sobre $y = |x|$. A região fica acima: $y \geq |x|$.

2. Fronteira superior

Os lados de $(1,1)$ a $(0,2)$ e de $(-1,1)$ a $(0,2)$ estão sobre $y = 2 - x$ (para $x \geq 0$) e $y = 2 + x$ (para $x \leq 0$), isto é, $y = 2 - |x|$. A região fica abaixo: $y \leq 2 - |x|$.

3. Teste de um ponto

O centro $(0,1)$ está na região: $|0| \leq 1 \leq 2 - |0|$ é verdadeiro. As opções (a) e (c) exigem $|x| \geq y$, o que dá $0 \geq 1$, falso. A opção (d) aceita o ponto $(0,3)$, que está fora do quadrado.

Comentário do professor

O módulo transforma duas retas em um único V. $y=|x|$ é um V para cima e $y=2-|x|$ é um V invertido. A região entre eles é o quadrado inclinado.

RESPOSTA FINAL

$$|x|\leq y\leq 2-|x|$$

Alternativa (B).

QUESTÃO 57

Enunciado

57. (Unicamp 2027, 1ª fase) Sejam A, B subconjuntos de R. Considere a função $f: A \to B$, $f(x) = x^2 - x - 2$, com $x \in A$. Considerando que essa função é invertível, qual das alternativas abaixo indica uma possibilidade para o conjunto A?

a) $[0,2]$.
b) $[-1,2]$.
c) $[1,2]$.
d) $[-2,1]$.

Análise da questão

Assunto	Funções: injetividade e função inversa
Ideia central	Uma função é invertível quando é bijetora. Como B pode ser escolhido como a imagem, basta que f seja injetora em A, sem valores repetidos.
Estratégia	A parábola é simétrica em torno de $x = \frac{1}{2}$. Descarte os intervalos que contêm dois pontos simétricos e fique com o que está só de um lado do vértice.

Resolução comentada

1. Simetria da parábola

O vértice está em $x = \frac{1}{2}$ e $f(x) = f(1-x)$. Então f não é injetora em nenhum conjunto que contenha dois números distintos x e $1-x$.

2. Testando as opções

(a) $[0,2]$: $f(0) = f(1) = -2$. Não é injetora.

(b) $[-1,2]$: $f(-1) = f(2) = 0$. Não é injetora.

(d) $[-2,1]$: $f(0) = f(1) = -2$. Não é injetora.

(c) $[1,2]$: o simétrico de $x \in [1,2]$ é $1-x \in [-1,0]$, fora do intervalo. Além disso, f é crescente para $x \geq \frac{1}{2}$. Logo é injetora em $[1,2]$, e com $B = [-2,0]$ a função é bijetora.

Comentário do professor

A resposta natural é um intervalo contido em uma das metades da parábola. O erro comum é olhar só para as extremidades do intervalo, e não para os pontos simétricos dentro dele.

RESPOSTA FINAL

$$A = [1,2]$$

Alternativa (C).

QUESTÃO 58

Enunciado

58. (Unicamp 2027, 1ª fase) Para praticar seus conceitos de aritmética, Lúcio sorteia, sem reposição, duas bolinhas de uma urna com bolinhas numeradas de 1 até 100 e calcula o máximo divisor comum dos números sorteados. Qual a probabilidade do máximo divisor comum ser um número ímpar?

a) 1/2.
b) 50/198.
c) 100/199.
d) 149/198.

Análise da questão

Assunto	Probabilidade e máximo divisor comum
Ideia central	O mdc só é par se os dois números forem pares. Então é mais simples calcular a probabilidade do evento complementar.
Estratégia	Mostre que mdc par equivale a dois números pares, conte os pares possíveis e use o complementar.

Resolução comentada

1. Quando o mdc é par

Se um dos números é ímpar, o mdc divide esse número e portanto é ímpar. Se os dois são pares, 2 divide os dois, e o mdc é par. Logo: mdc par $\Leftrightarrow$ os dois números são pares.

2. Contagem

$$P(\text{mdc par}) = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{1225}{4950} = \frac{49}{198}$$

Outro caminho, sorteando em sequência: $\frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$.

3. Complementar

$$P(\text{mdc ímpar}) = 1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198}$$

Comentário do professor

Não é preciso calcular nenhum mdc. A chave é a observação de paridade. A opção (a) tenta quem pensa que metade dos números são ímpares e, por isso, metade dos mdc também.

RESPOSTA FINAL

$$\frac{149}{198}$$

Alternativa (D).

QUESTÃO 59

Enunciado

59. (Unicamp 2027, 1ª fase) Seja $f:R\to R$ uma função com a propriedade de que $x^3<f(x)<x^2$ para todo $0<x<1$.

Considere o triângulo de vértices $P=(0,0)$, $Q=(1/2,f(1/2))$ e $R=(1/2,1/2)$.

A respeito da área A desse triângulo, é correto afirmar que

a) $0<A<3/128$.
b) $3/128<A<1/32$.
c) $1/32<A<1/16$.
d) $1/16<A<3/32$.

Análise da questão

Assunto	Funções e geometria analítica: área de triângulo com desigualdades
Ideia central	Q e R têm a mesma abscissa, então QR é vertical e a altura do triângulo em relação a QR é a distância de P à reta $x=\frac{1}{2}$.
Estratégia	Limite $f(\frac{1}{2})$ pela condição dada, escreva a área em função de $f(\frac{1}{2})$ e propague a desigualdade.

Resolução comentada

1. Limites para f(1/2)

Com $x=\frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{2}\right)^3<f\left(\frac{1}{2}\right)<\left(\frac{1}{2}\right)^2$, isto é, $\frac{1}{8}<f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}$.

2. Área do triângulo

Tomando QR como base, sua medida é $\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)$, positiva porque $f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$. A altura é a distância de P à reta $x=\frac{1}{2}$, que vale $\frac{1}{2}$.

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-f(1/2)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-f(1/2)\right)$$

3. Propagando a desigualdade

$$\frac{1}{8}<f(1/2)<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}<\frac{1}{2}-f(1/2)<\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{1}{16}<A<\frac{3}{32}$$

Comentário do professor

Note que f não é conhecida. A questão só pede o intervalo em que a área necessariamente cai. Multiplicar por $\frac{1}{4}$ e inverter a desigualdade ao subtrair são os dois passos em que se erra com facilidade.

RESPOSTA FINAL

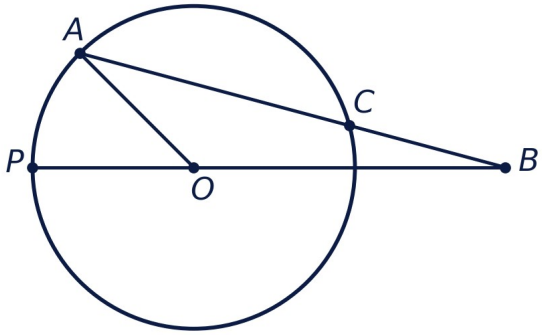
$$\frac{1}{16} < A < \frac{3}{32}$$

Alternativa (D).

QUESTÃO 60

Enunciado

60. (Unicamp 2027, 1ª fase) A figura a seguir, que também apareceu no Vestibular Unicamp 1987, exibe uma circunferência de centro O e raio r. Considere que o segmento BC mede r e o ângulo $A\hat{B}O$ mede 15 graus. Os pontos P, A, C estão na circunferência, e os pontos P, O, B e A, C, B são colineares.



Se $r=1$, determine o comprimento do segmento AP.
a) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
b) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
c) $\sqrt{4-\sqrt{2}}$.
d) $\sqrt{4+\sqrt{2}}$.

Análise da questão

Assunto	Geometria plana: triângulo isósceles e lei dos cossenos
Ideia central	Há dois triângulos isósceles encadeados, OCB e OAC, e um ângulo externo. Eles levam ao ângulo $A\hat{O}P=45^\circ$, e a lei dos cossenos dá o comprimento de AP.
Estratégia	Persiga os ângulos: $O\hat{C}B$ é isósceles, $A\hat{C}O$ é externo, OAC é isósceles, e então encontre $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}P$.

Resolução comentada

1. Triângulo OCB

Como $OC=r$ e $BC=r$, o triângulo OCB é isósceles de base OB. Então $C\hat{O}B=C\hat{B}O=15^\circ$.

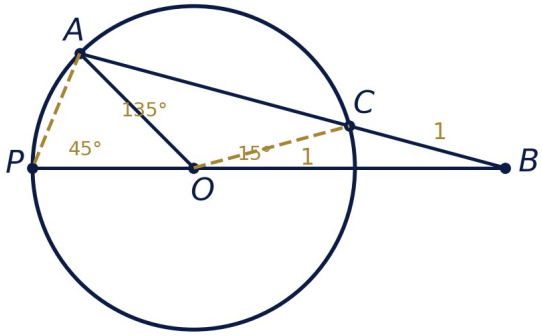
2. Triângulo OAC

O ângulo $A\hat{C}O$ é externo ao triângulo OCB em C, logo vale $15^\circ+15^\circ=30^\circ$. Como $OA=OC=r$, o triângulo OAC é isósceles e $O\hat{A}C=30^\circ$.

3. Ângulo AÔP

No triângulo AOB: $A\hat{O}B=180^\circ-15^\circ-30^\circ=135^\circ$. Como P, O e B são colineares, com O entre P e B:

$$A\hat{O}P=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$



4. Lei dos cossenos em AOP

Com $OA=OP=1$:

$$AP^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=2-\sqrt{2}\Rightarrow AP=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Comentário do professor

Esta é a figura clássica do vestibular de 1987. Como $\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 0,77$, o resultado é menor que o diâmetro 2 e coerente com o desenho. Uma conferência numérica independente, com $A=(\cos 135^\circ,\sin 135^\circ)$ e $P=(-1,0)$, dá $AP^2\approx 0,586=2-\sqrt{2}$.

RESPOSTA FINAL

$$AP=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Alternativa (A).